

Implementación de modelos no lineales para coeficientes aerodinámicos de las palas de un decelerador de alas rotatorias

Juan F. Martiarena¹, Vicente Nadal Mora¹, Rogelio Faut¹, Joaquin Piechocki¹ y Álvaro Cuerva Tejero²

¹UIDET GTA-GIAI Grupo de Transporte Aéreo-Grupo de Ingeniería Aplicada a la Industria. Departamento de Aeronáutica, Facultad de Ingeniería UNLP, La Plata, Argentina.

²ETSI Aeronáuticos y del Espacio, UPM, Madrid, España.

Fecha de recepción del manuscrito: 01/02/2019

Fecha de aceptación del manuscrito: 28/05/2019

Fecha de publicación: 15/07/2019

Resumen—Los pararrotos son deceleradores aerodinámicos conformados por alas giratorias en régimen de autorrotación. Este tipo de dispositivo puede ser utilizado para la realización de una variedad de tareas en las que se requiera la utilización de vehículos aéreos no tripulados en descenso: recuperación de sondas espaciales, caracterización de parámetros atmosféricos e incluso guiado de proyectiles. La particularidad que presentan los dispositivos estudiados en este trabajo es el pequeño alargamiento y el bajo número de Reynolds en el que operan las palas, con lo que se constituye este singular régimen aerodinámico. En investigaciones previas se desarrolló un modelo teórico para determinar las fuerzas y momentos aerodinámicos generados por el efecto de la variación cíclica y colectiva del ángulo de paso de las palas. Estas acciones son estimadas mediante un modelo llamado “completo de la pala”, obteniéndose una expresión matemática que permite conocer la fuerza y el momento a lo largo de una vuelta. Distintos modelos de coeficientes aerodinámicos son implementados para la evaluación de las fuerzas y momentos que afectan al pararrotor: se utilizan modelos con coeficientes constantes, y con variaciones lineales y no lineales para palas de pequeño alargamiento. Los resultados en el desempeño del pararrotor son comparados a través de la evaluación de la evolución de las variables de estado que describen el comportamiento del dispositivo.

Palabras clave— Pararrotos, aerodinámica, dinámica, control.

Abstract – Pararotors are aerodynamics decelerators builded by rotary wings on autorotation regime. This kind of devices can be used for the execution of a variety of tasks in which unmanned aerial vehicles should be required: spacecraft recovery, atmospheric characterization and even guide of projectiles. The particularity that shows the studied devices in this work are the low aspect ratio and the low Reynolds number at the blades operate, which make up this singular aerodynamic regime. In previous works, a force and moment theoretical model had been developed, including the effects of the collective and cyclic pitch variations. These actions are estimated by means a “complete model” of the blade, which give rise to a mathematical expression that allows obtain the force and moment around a complete turn. Several aerodynamical models are implemented for the force and moment evaluation: constant coefficients and linear and nonlinear models are used. The results on the pararotor behavior are compared trough the evaluation of the state variables evolution which describes the device behavior.

Keywords— Pararotors, aerodynamics, dynamics, control.

INTRODUCCIÓN

Los pararrotos son dispositivos aerodinámicos que operan en régimen de autorrotación, con una potencialidad de aplicaciones que abarcan desde la caracterización de parámetros atmosféricos hasta el guiado de sondas y proyectiles.

Presentan como aspecto particular que, debido a factores de almacenamiento y transporte, utilizan palas de pequeño alargamiento. Este tipo de palas presenta un singular régimen

aerodinámico que es fundamental a la hora de modelizar el comportamiento general de estos dispositivos.

Existen numerosos trabajos sobre esta temática. Uno de los primeros es el de Bollay (Bollay, 1939), que desarrolla una teoría no lineal para alas rectangulares de pequeño alargamiento, reemplazando el ala por un sistema de vórtices constantes a lo largo de la envergadura. Partiendo de la ley de Biot-Savart, obtiene una expresión para la velocidad inducida y una distribución de presiones. Este modelo se demostró apto para valores de alargamiento cercanos a la unidad.

Dirección de contacto:

Juan Francisco Martiarena, Calle 1 y 47 1900, Tel: 0221 4258911, juanfmartiarena@gmail.com.

Kuchemann (1952) obtuvo un modelo generalizado para los coeficientes aerodinámicos, abarcando alas de pequeño y gran alargamiento. El modelo se basa en la teoría de línea sustentadora de Prandtl, y representa la posición del centro de presiones en función de la cuerda, el alargamiento y el ángulo de torsión de la pala.

Un trabajo que compendia los desarrollos referentes a alas de pequeño alargamiento es el de Carmichael (1981), donde se relevan estudios realizados a bajo número de Reynolds tanto en túnel de viento como en ensayos en vuelo.

Los trabajos impulsados en torno al interés motorizado por el desarrollo de los UAV aportan nuevos modelos para los coeficientes aerodinámicos. Mueller (2000) caracterizaron aerodinámicamente perfiles Eppler 61 y Pfenninger 048, identificando distintas estructuras de flujo. Pelletier y Mueller (2000) continuaron esta línea, estudiando el efecto de la curvatura y el alargamiento de las palas en los coeficientes aerodinámicos. Destacan que, a menor alargamiento, las palas alcanzan ángulos de ataque de operación mayores, incrementando el rango de sustentación de la pala. Torres y Mueller (2004) estudiaron distintas plantas alares de pequeño alargamiento, concluyendo que el principal parámetro que caracteriza aerodinámicamente los perfiles es el alargamiento, seguido por la forma de la planta y el número de Reynolds.

Otro trabajo que caracteriza palas de pequeño alargamiento es el realizado por Ortíz et al. (2015), en el que se configuran las evoluciones del coeficiente de resistencia y de sustentación para amplios rangos del ángulo de ataque.

El presente trabajo se organiza en diferentes secciones. La segunda sección está dedicada al desarrollo teórico del modelo dinámico del pararrotor, donde se ponen de manifiesto las fuerzas aerodinámicas que actúan y su influencia sobre las variables dinámicas que caracterizan el comportamiento del dispositivo. En la tercera sección se presentan los modelos aerodinámicos implementados y sus principales características. En la cuarta sección se muestran los resultados obtenidos en la implementación de dichos modelos. Por último, se resaltan las principales conclusiones recogidas a lo largo de la investigación.

MODELO TEÓRICO

Para la obtención de las ecuaciones que describen el movimiento del pararrotor en vuelo libre (Martiarena, 2018) se consideran los distintos elementos que lo constituyen y las fuerzas que se transmiten entre ellos.

En primer lugar, se analizan las fuerzas y momentos sobre el cuerpo cilíndrico, denominado H , incorporando los efectos aerodinámicos.

Una vez concluido este estudio, se analizan las fuerzas y momentos que se generan en las palas, indicadas con el índice b . La manera en la que estos fenómenos modifican el comportamiento del pararrotor también es analizada en el apartado correspondiente.

La Figura 1 muestra los principales componentes del pararrotor.

Para expresar las distintas magnitudes que intervienen en la definición del modelo, se utilizan distintos sistemas de referencia. Una terna inercial, indicada con el subíndice T , una terna ligada al cuerpo, indicada con el subíndice A , y una

terna solidaria a las palas indicada con el subíndice $A1$ (Martiarena, 2018).

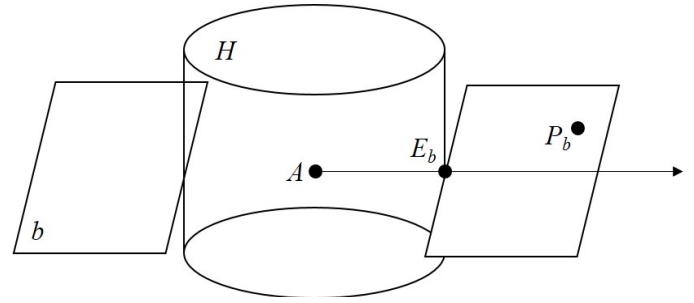


Fig. 1: Modelo de pararrotor.

Se utilizarán de aquí en adelante, las siguientes variables de estado para caracterizar al sistema:

- u , v y w son las componentes del vector velocidad absoluta del centro de masas del cuerpo del pararrotor expresada en el sistema de referencia A .
- ω_x , ω_y y ω_z , son las velocidades angulares del cuerpo del pararrotor en el sistema A .
- Θ , Φ y ψ son los ángulos de Euler entre el sistema tierra y el sistema A .
- r_{G1} , r_{G2} y r_{G3} son las coordenadas de la posición del centro de masas del pararrotor en el sistema tierra.

Se define el vector de control como $\mathbf{u}_C(t)$, cuyas componentes son θ_0 (ángulo de paso colectivo), θ_{1S} y θ_{1C} (ángulos de paso cíclico longitudinal y lateral, respectivamente).

Las secciones subsiguientes detallan la relación entre las variables de estado y de control definidas a partir de las ecuaciones de Newton-Euler, la relación de ligadura cinemática entre ellas y las ecuaciones de trayectoria del centro de masas del pararrotor.

Fuerzas sobre el cilindro

Para analizar las fuerzas y momentos aplicados sobre el cilindro se explicitan las fuerzas y momentos que las palas transmiten al cuerpo cilíndrico. A tal fin, se utiliza la Figura 2, donde se manifiestan las acciones (fuerzas y momentos) que realizan las palas sobre el cuerpo del pararrotor.

Sobre los puntos E_1 y E_2 se aplican las fuerzas que generan las palas (identificadas como \mathbf{F}_1^t y \mathbf{F}_2^t) y los momentos que las mencionadas fuerzas generan sobre estos puntos (identificados como \mathbf{M}_1^{t,E_1} y \mathbf{M}_2^{t,E_1}).

Estas acciones están aplicadas sobre el punto E_b , que, en principio, no coincide con el punto A .

Estas magnitudes pueden expresarse como:

$$\mathbf{F}^t = \mathbf{F}_1^t + \mathbf{F}_2^t, \quad (1)$$

$$\mathbf{M}^{t,A} = \mathbf{M}_1^{t,E_1} + \mathbf{M}_2^{t,E_1} + \mathbf{A}E_1 \wedge \mathbf{F}_1^t + \mathbf{A}E_2 \wedge \mathbf{F}_2^t, \quad (2)$$

donde los superíndices t indican acciones transmitidas al cuerpo del pararrotor.

Si consideramos el cilindro como un cuerpo rígido con masa M_H se pueden introducir sobre el cuerpo, además de las fuerzas que transmiten las palas, las fuerzas y momentos aerodinámicos y gravitatorios propios del cilindro, tal como se observa en la Figura 2.

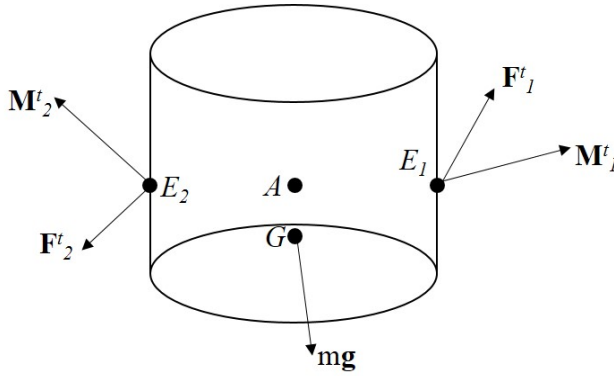


Fig. 2: Diagrama de fuerzas y momentos sobre el cilindro.

En la Figura 2 se identifican las fuerzas y momentos que se aplican al cilindro del pararrotor. La fuerza gravitatoria, indicada como mg en la Figura 2, está aplicada en el centro de masas G del cilindro. Con la ayuda de este diagrama de fuerzas es posible formular las ecuaciones de Newton-Euler correspondientes a la dinámica en vuelo libre referidas al centro de masas del cuerpo del pararrotor como sigue.

$$\mathbf{F}_H^g + \mathbf{F}^t + M_H \mathbf{g} = M_H \frac{d\mathbf{V}^G}{dt}, \quad (3)$$

$$\mathbf{M}_H^{a,A} + \mathbf{M}^{t,A} + \mathbf{GA} \wedge \mathbf{F}^t + \mathbf{GF} \wedge \mathbf{F}_H^g = \frac{d\mathbf{h}_H}{dt}. \quad (4)$$

El miembro derecho de la ecuación (4) representa la variación temporal del momento cinético del cilindro del pararrotor. Esta magnitud se calcula como:

$$\mathbf{h}_H|_{A11} = \mathbf{I}_H \boldsymbol{\omega}|_{A11}, \quad (5)$$

siendo $\boldsymbol{\omega}|_{A11}$ la velocidad angular del pararrotor expresada en el sistema de referencia del cuerpo e \mathbf{I}_H el tensor de inercia del cuerpo, que es diagonal si los ejes de referencia son principales. La validez de la ecuación (5) se circunscribe al caso en el que, tanto el tensor \mathbf{I}_H y $\boldsymbol{\omega}$ se encuentran definidos en el sistema $A11$.

Redefiniendo:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_H^g &= M_H \mathbf{g}, \\ \mathbf{F}_H^i &= -M_H \frac{d\mathbf{V}^G}{dt}, \\ \mathbf{M}^{t,G} &= \mathbf{M}^{t,A} + \mathbf{GA} \wedge \mathbf{F}^t, \\ \mathbf{M}_H^{a,G} &= \mathbf{M}_H^{a,F} + \mathbf{GF} \wedge \mathbf{F}_H^g, \\ \mathbf{M}_H^{i,G} &= -\frac{d\mathbf{h}_H}{dt}, \end{aligned} \quad (6)$$

se pueden reescribir las ecuaciones (3) y (4) como sigue:

$$\mathbf{F}_H^g + \mathbf{F}_H^i + \mathbf{F}_H^a + \mathbf{F}^t = 0, \quad (7)$$

$$\mathbf{M}^{t,G} + \mathbf{M}_H^{a,G} + \mathbf{M}_H^{i,G} = 0. \quad (8)$$

Las expresiones (7) y (8) describen la dinámica de vuelo libre de un pararrotor. En ellas se identifica el aporte que hace cada uno de los elementos constitutivos del pararrotor a la dinámica de vuelo.

Ligadura cinemática

Los grupos de variables de estado definidas como velocidades angulares (ω_x , ω_y y ω_z) y ángulos de Euler (Θ , Φ y ψ) no son independientes entre sí. Considerando la definición de los ángulos de Euler se puede relacionar la

velocidad angular $\boldsymbol{\omega}(t)$ con la tasa de cambio temporal de los ángulos de Euler como:

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{d\Theta}{dt} \mathbf{j}_{T1} + \frac{d\Phi}{dt} \mathbf{i}_A + \frac{d\psi}{dt} \mathbf{k}_A, \quad (9)$$

$$\begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = [\mathbf{T}_{AT1}] \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{d\Theta}{dt} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{d\Phi}{dt} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{d\psi}{dt} \end{bmatrix}, \quad (10)$$

resultando:

$$\begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \cos \Phi & 0 & 0 \\ -\sin \Phi & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{d\Phi}{dt} \\ \frac{d\Theta}{dt} \\ \frac{d\psi}{dt} \end{bmatrix}, \quad (11)$$

En la ecuación (11) se identifica la matriz $[\mathbf{LC}]$ como:

$$\mathbf{LC} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \cos \Phi & 0 & 0 \\ -\sin \Phi & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (12)$$

que se invierte como:

$$\mathbf{LC}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \cos \Phi^{-1} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sin \Phi}{\cos \Phi} & 1 \end{bmatrix}, \quad (13)$$

dando lugar a:

$$\begin{aligned} \frac{d\Theta}{dt} &= \frac{1}{\cos \Phi} \omega_y, \\ \frac{d\Phi}{dt} &= \omega_x, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\frac{d\psi}{dt} = -\frac{\sin \Phi}{\cos \Phi} \omega_y + \omega_z.$$

De la ecuación (14) se desprende que la tasa de cambio temporal del ángulo ψ no es exactamente ω_z , sino que también está compuesta por una fracción de ω_y .

Ecuaciones de la trayectoria del centro de masas del pararrotor

La trayectoria del centro de masas del pararrotor puede describirse mediante el sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\frac{d\mathbf{r}^G(t)}{dt} = \mathbf{V}^G(t), \quad (15)$$

La integración temporal de esta ecuación diferencial permite obtener la trayectoria del centro de masas del pararrotor. Este sistema expresado en el sistema de referencia T toma la forma de:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} r_{G1} \\ r_{G2} \\ r_{G3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_T \\ v_T \\ w_T \end{bmatrix} = [\mathbf{T}_{TT1}][\mathbf{T}_{T1A}] \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}. \quad (16)$$

Desarrollando según sus componentes resulta:

$$\begin{aligned} \frac{dr_{G1}}{dt} &= u \cos \Phi + v \sin \theta \sin \Phi \\ &\quad + w \sin \theta \cos \Phi, \\ \frac{dr_{G2}}{dt} &= v \cos \Phi - w \sin \theta, \\ \frac{dr_{G3}}{dt} &= -u \sin \Phi + v \cos \theta \sin \Phi \\ &\quad + w \cos \theta \cos \Phi. \end{aligned} \quad (17)$$

Fuerza sobre las palas

En el apartado correspondiente a las fuerzas que tienen lugar sobre el cuerpo cilíndrico del pararrotor se manifiestan las que introducen las palas aplicadas sobre el punto A . En este apartado se detalla cómo están compuestas estas fuerzas, y se desarrollan las hipótesis necesarias que permiten elaborar un modelo matemático para representarlas.

El desarrollo que sigue se realiza tomando como objeto de estudio a una pala genérica, que se indica mediante el subíndice b , siempre que sea necesario determinar algún tipo de referencia a la pala. La masa de las palas es M_b , y el tensor de inercia de las mismas, representado en el sistema B_b respecto al punto E_b , se indica como \mathbf{I}_b , siendo la expresión correspondiente para el tensor de inercia la siguiente:

$$\mathbf{I}_b = \begin{bmatrix} I_{xB} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yB} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zB} \end{bmatrix}. \quad (18)$$

La Figura 3 muestra el diagrama de fuerzas y momentos sobre la pala. Las fuerzas aerodinámicas sobre las palas se originan durante la traslación y la rotación de las mismas dentro de la corriente de aire en la que se mueve el pararrotor. Estas fuerzas se suponen concentradas en el punto P_b y se indican como \mathbf{F}_b^a .

También se aplica, sobre el centro de masas de la pala (punto GB_b), el peso de la misma, indicado como $M_b \mathbf{g}$. Sobre el punto de acoplamiento E_b aparecen fuerzas y momentos reactivos, transmitidos por el cuerpo del pararrotor, e indicados como \mathbf{F}_b^r y \mathbf{M}_b^{r,E_b} .

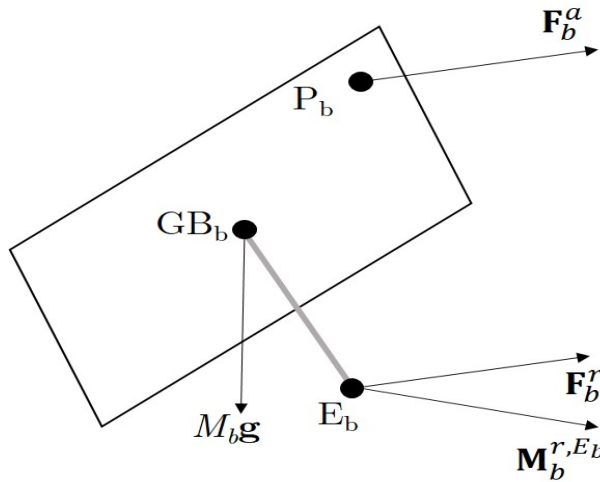


Fig. 3: Diagrama de fuerzas y momentos sobre la pala.

Para el planteo de las ecuaciones que describen la dinámica de la pala es conveniente definir diferentes magnitudes cinemáticas para una pala genérica identificada con el subíndice b . El acoplamiento presenta una velocidad absoluta \mathbf{V}^{E_b} . El centro de masas, indicado como GB_b , tiene una velocidad absoluta \mathbf{V}^{GB_b} . La velocidad angular de la pala en el sistema B_b se indica como $\boldsymbol{\omega}_b|_{B_b}$ siendo:

$$\boldsymbol{\omega}_b|_{B_b} = \boldsymbol{\omega} + \frac{d\theta_b}{dt} \mathbf{i}_{B_b}. \quad (19)$$

La velocidad del acoplamiento E_b se expresa como sigue:

$$\mathbf{V}^{E_b} = \mathbf{V}^G + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{G}E_b, \quad (20)$$

donde \mathbf{V}^G es la velocidad del centro de masas del pararrotor. La velocidad del centro de masas de la pala se calcula como:

$$\mathbf{V}^{GB_b} = \mathbf{V}^{E_b} + \boldsymbol{\omega}_b \wedge \mathbf{E}_b \mathbf{G}B_b. \quad (21)$$

Con la ayuda de la Figura 3, se plantean las ecuaciones de Newton-Euler de manera vectorial:

$$\mathbf{F}_b^a + \mathbf{F}_b^r + M_b \mathbf{g} = M_b \frac{d\mathbf{V}^{GB_b}}{dt}, \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_b^{a,E_b} + \mathbf{M}_b^{r,E_b} + \mathbf{E}_b \mathbf{G}B_b \wedge M_b \mathbf{g} = \\ \frac{d\mathbf{h}_b}{dt} + \mathbf{E}_b \mathbf{G}B_b \wedge M_b \frac{d\mathbf{V}^{E_b}}{dt}, \end{aligned} \quad (23)$$

donde $\mathbf{M}_b^{a,E_b} = \mathbf{E}_b \mathbf{P}_b \wedge \mathbf{F}_b^a$ es el momento que realiza la fuerza aerodinámica aplicada en el centro de presiones de la pala, e \mathbf{I}_b es el tensor de inercia de la pala respecto al punto E_b en el sistema de referencia B_b .

La pala transmite al punto de acoplamiento una fuerza igual en dirección y módulo pero contraria en sentido a aquella que el acoplamiento le transmite, por lo tanto se puede decir que:

$$\mathbf{F}_b^t = -\mathbf{F}_b^r = \mathbf{F}_b^a + M_b \mathbf{g} - M_b \frac{d\mathbf{V}^{GB_b}}{dt}. \quad (24)$$

El mismo razonamiento vale para los momentos, por lo que:

$$\begin{aligned} +\mathbf{M}_b^{t,E_b} = -\mathbf{M}_b^{r,E_b} = \mathbf{M}_b^{a,E_b} + \mathbf{M}_b^{r,E_b} \\ + \mathbf{E}_b \mathbf{G}B_b \wedge M_b \mathbf{g} - \frac{d\mathbf{h}_b}{dt} \\ - \mathbf{E}_b \mathbf{G}B_b \wedge M_b \frac{d\mathbf{V}^{E_b}}{dt}. \end{aligned} \quad (25)$$

Se puede redefinir a la fuerza gravitatoria de la pala como:

$$\mathbf{F}_b^g = M_b \mathbf{g},$$

Y el término inercial como:

$$\mathbf{F}_b^i = -M_b \frac{d\mathbf{V}^{GB_b}}{dt},$$

En los momentos involucrados en la expresión (25) se puede identificar el que genera la fuerza gravitatoria y redefinirlo como:

$$\mathbf{M}_b^{g,E_b} = \mathbf{E}_b \mathbf{G}B_b \wedge \mathbf{F}_b^g,$$

y el momento inercial como:

$$\mathbf{M}_b^{i,E_b} = -\frac{d\mathbf{h}_b}{dt} - \mathbf{E}_b \mathbf{G}B_b \wedge M_b \frac{d\mathbf{V}^{E_b}}{dt}.$$

En base a estas redefiniciones, las expresiones (24) y (25) pueden reformularse de forma compacta como:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_b^r + \mathbf{F}_b^a + \mathbf{F}_b^g + \mathbf{F}_b^i = 0, \\ \mathbf{M}_b^{r,E_b} + \mathbf{M}_b^{a,E_b} + \mathbf{M}_b^{g,E_b} + \mathbf{M}_b^{i,E_b} = 0, \end{aligned} \quad (26)$$

El sistema (26) da cuenta de la magnitud de los efectos que las palas transmiten al cuerpo cilíndrico a través del punto E_b .

Leyes de variación de paso

El ángulo de paso que se le asigna a cada pala se constituye a partir de la definición de una función armónica de primer orden, del tipo:

$$\begin{aligned} \theta_b(\psi) = \theta_0(t) + \theta_{1c}(t) \cos[\psi(t) + (b-1)\pi] \\ + \theta_{1s}(t) \sin[\psi(t) + (b-1)\pi], \end{aligned} \quad (27)$$

donde $\psi_b(t) = \psi(t) + (b-1)\pi$. En la ecuación (27) la función $\theta_0(t)$ se denomina paso colectivo, que es el asignado

a todas las palas de manera simultánea. Las funciones $\theta_{1C}(t)$ y $\theta_{1S}(t)$ son los ángulos de paso cíclico lateral y longitudinal respectivamente, y son quienes dominan la actitud en los planos correspondientes. Estos tres parámetros son los elementos del vector de control $\mathbf{u}_C(t)$.

Forma canónica de la ecuación de estado del pararrotor

En virtud del desarrollo previo, se formula la representación del sistema matemático en su forma canónica. Esto permite describir el problema matemático de manera directa para su resolución mediante la implementación de un código numérico. Las ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales (7), (8), (12) y (15) se expresan en función del vector de estado y el vector de control.

En base a las definiciones previas, el vector de estado se constituye como sigue:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ \omega_x \\ \omega_y \\ \theta \\ \Phi \\ \psi \\ r_{G1} \\ r_{G2} \\ r_{G3} \end{bmatrix}, \tag{28}$$

y el vector de control como:

$$\mathbf{u}_C(t) = \begin{bmatrix} \theta_0 \\ \theta_{1S} \\ \theta_{1C} \end{bmatrix}. \tag{29}$$

La relación entre el vector de estado y el vector de control viene dada por:

$$\mathbf{M} \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{f}, \tag{30}$$

donde \mathbf{M} es una matriz cuadrada de 12 x 12 y \mathbf{f} un vector fila de 12 elementos. A su vez, son funciones no lineales dependientes de $\mathbf{x}(t)$ y de $\mathbf{u}_C(t)$ y de sus derivadas.

Cada uno de los elementos que constituyen la matriz \mathbf{M} y el vector \mathbf{f} de la ecuación de estado (30) se obtienen analítica y numéricamente.

Sustituyendo en el sistema (30) con condiciones iniciales $\mathbf{x}_{12 \times 1} = \mathbf{x}(0)$ y con una ley de control $\mathbf{u}_C(t)$ conocida se puede describir la evolución de cada una de las variables que conforman el vector de estado y la determinación de la trayectoria del pararrotor. Desde ya que, para su utilización con fines prácticos, las condiciones iniciales y el vector de control seleccionados deben ser tales que garanticen que el sistema (30) tenga una solución convergente.

COEFICIENTES AERODINÁMICOS

El modelo teórico elaborado involucra la representación matemática de las fuerzas aerodinámicas que introducen las palas. Según el modelo, estas representaciones toman magnitudes distintas, sobre todo cuando el régimen de operación no puede modelarse linealmente. En esta sección, se estudia la determinación de los coeficientes aerodinámicos necesarios para la evaluación del modelo

teórico, indagando en una variedad de modelos desarrollados.

Para el comportamiento de la posición del centro de presiones según la cuerda del ala desde el borde de ataque se destaca la distribución propuesta en Kuchemann (1952), que modela la distribución de la diferencia de presiones para cualquier tipo de ala mediante una expresión armónica.

Este modelo representa una familia de funciones de distribución de carga a lo largo de la cuerda que incluye los casos extremos, cuyos resultados son conocidos: la posición del centro de presiones se encuentra al 25% de la cuerda cuando el alargamiento tiende a infinito, y es 0 cuando tiende a 0.

Existen distintos modelos para la representación de los coeficientes aerodinámicos C_D y C_L (Torres y Mueller, 2004; Pelletier y Mueller, 2000).

Si bien las palas de pequeño alargamiento presentan un comportamiento no lineal para sus coeficientes aerodinámicos, se puede calcular la pendiente inicial de la curva $C_{L\alpha}$ vs α a partir del ajuste realizado en la curva de sustentación. Esta pendiente es comparada con otros modelos lineales. Para la pendiente del coeficiente de sustentación, el primer modelo se deriva de la teoría de línea sustentadora de Prandtl:

$$C_{L\alpha} = \frac{C_{l\alpha}}{1 + \frac{C_{l\alpha}}{\pi AR} (1 + \tau)} \left[\frac{1}{\text{rad}} \right], \tag{31}$$

donde τ es el coeficiente de eficiencia de Glauert, que varía entre 0,05 y 0,25. El valor de $C_{l\alpha}$ es $C_{l\alpha} = 5,374$ [1/rad] que corresponde al valor promedio de los experimentos realizados en Torres y Mueller (2004) para placas planas infinitas.

Otro modelo es el de Lowry y Polhamus, que es más preciso para $AR < 2$:

$$C_{L\alpha} = \frac{2\pi AR}{2 + \sqrt{\frac{AR^2}{\eta^2} (1 + \tan^2 \Lambda) + 4}} \left[\frac{1}{\text{rad}} \right]. \tag{32}$$

Por último, se presenta el modelo de Hoerner y Borst, que para alas rectangulares delgadas de bajo alargamiento es:

$$C_{L\alpha} = \left[\frac{36,5}{AR} + 2AR \right]^{-1} \left[\frac{1}{\text{rad}} \right]. \tag{33}$$

El subíndice L se distingue del subíndice l en que el primero se refiere a la pala, mientras que el segundo hace referencia a la sección. La utilización de estos modelos implica asumir un comportamiento lineal para la sustentación. Torres y Mueller (2004) proponen distintos modelos no lineales para los coeficientes de sustentación y resistencia. El ajuste más adecuado para el C_D es el que se encuentra utilizando la ecuación clásica de resistencia inducida:

$$C_D = C_{D0} + KC_L^2, \tag{34}$$

siendo K el factor de resistencia inducida, parámetro que depende del alargamiento, la forma de la pala y de la forma del borde de ataque.

Pelletier y Mueller (2000) elaboraron un trabajo experimental en el que demuestran la disminución en la pendiente del coeficiente de sustentación con el alargamiento. A su vez, concluyeron que el ángulo de

entrada en pérdida de los perfiles se incrementa para menores alargamientos, incluso observando que no entran en pérdida abruptamente, sino que alcanzan un régimen constante una vez superado el ángulo de ataque crítico.

Ortiz *et al.* (2015) presentan una distribución para los coeficientes considerando un amplio espectro de ángulos de ataque. Considerando un alargamiento de 0.6, el coeficiente de resistencia alcanza valores máximos a ángulos de ataque de 45°, a partir de los que se produce una disminución en el mismo. Respecto al coeficiente de sustentación, los valores máximos también se observan a los 45°.

Los modelos experimentales presentados en Pelletier y Mueller (2000) y Ortiz *et al.* (2015) son los interpolados numéricamente para ser implementados en el modelo teórico. La selección obedece a que cuentan con respaldo experimental y consideran un amplio rango de ángulos de ataque, especialmente el modelo de Ortiz *et al.* (2015).

También se utiliza el modelo de Faut *et al.* (2014), que forma parte de la línea de investigación en la que se enmarca el presente trabajo.

En principio se implementa un modelo aerodinámico simple, en el que los coeficientes de sustentación y resistencia sean los siguientes:

$$\begin{aligned} C_L(\alpha, \beta) &= C_{L\alpha}\alpha, \\ C_D(\alpha, \beta) &= C_D. \end{aligned} \quad (35)$$

Posteriormente, se estudia el comportamiento teórico del pararrotor ante la implementación de tres modelos aerodinámicos no lineales. Las Figuras 4 y 5 muestran los comportamientos en función del ángulo de ataque para los coeficientes de sustentación y resistencia.

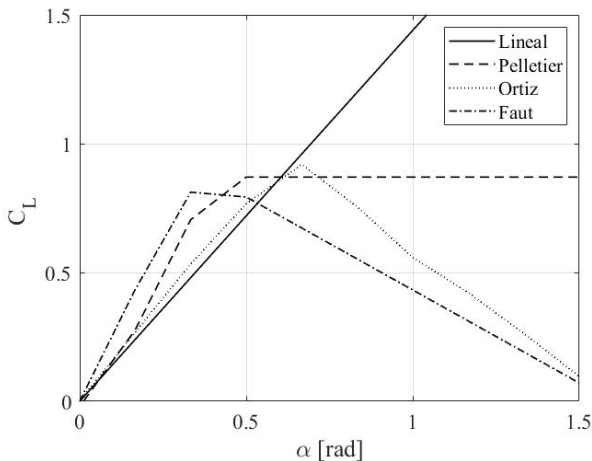


Fig. 4: Coeficientes de sustentación.

La variedad de métodos que se han desarrollado para la caracterización aerodinámica de las palas de bajo alargamiento muestra que es un aspecto sensible a tener en cuenta para el modelo aerodinámico del pararrotor. Sobre todo teniendo en consideración que el régimen de autorrotación en el que operan estos dispositivos establece una configuración aerodinámica que no es estudiada profundamente en la bibliografía de referencia, por lo que estos parámetros deben ser ajustados atentos a los resultados experimentales.

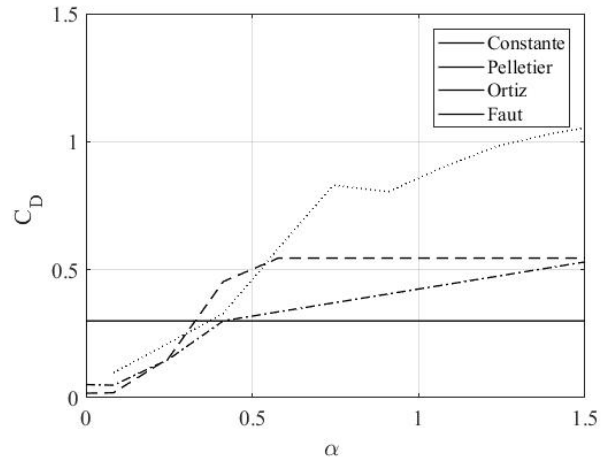


Fig. 5: Coeficientes de resistencia.

RESULTADOS

Como se menciona en la sección anterior, se utilizan cuatro modelos para representar los coeficientes aerodinámicos, que se presentan caracterizados en la Tabla 1 según el perfil que presentan en función del ángulo de ataque. Esta descripción es de carácter cualitativo, a fin de dar una idea del tipo de modelo que se utiliza para cada uno.

TABLA 1: MODELOS AERODINÁMICOS.

Denominación	C_D	C_L
Simplificado	Constante	Lineal
Pelletier	Lineal/Amesetado en los extremos	Parabólico
Ortiz	Parabólico	Lineal/parabólico /lineal
Faut	Lineal	Parabólico

Estos modelos son evaluados en el solver desarrollado para resolver el sistema de ecuaciones (30), para una condición de vuelo predeterminada. Las variables de estado seleccionadas para analizar el comportamiento son la posición del centro de masas en función del tiempo \mathbf{r} , la velocidad de descenso en ejes $T \mathbf{V}G_T$, la velocidad angular respecto al eje principal de giro ω_{zA} y el ángulo de cabeceo Θ .

La condición de vuelo se determina mediante tres parámetros: el ángulo de deslizamiento en el plano β , la velocidad de desplazamiento horizontal V_H y la velocidad de descenso w_Z . Los valores asignados a estos parámetros son los siguientes:

- $\beta = 45^\circ$,
- $V_H = 3 \text{ m/s}$,
- $w_Z = 8 \text{ m/s}$.

Es decir, se busca que el pararrotor describa una trayectoria recta a 45° del eje coordenado x , con una velocidad de desplazamiento en el plano de 3 m/s y descendiendo a 8 m/s . Las Figuras 6 a 11 siguientes muestran la evolución de las variables de estado para la condición de vuelo seleccionada.

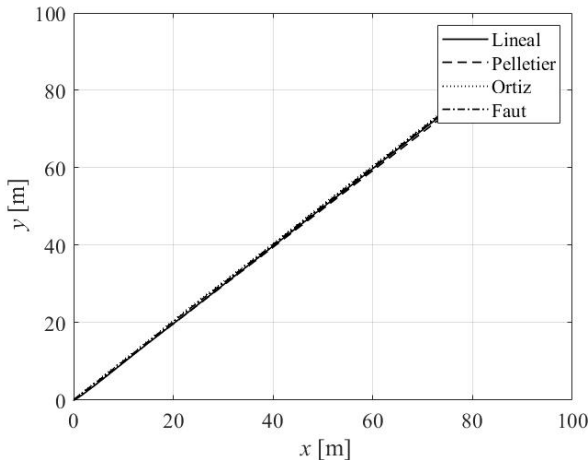


Fig. 6: Desplazamiento en el plano x-y.

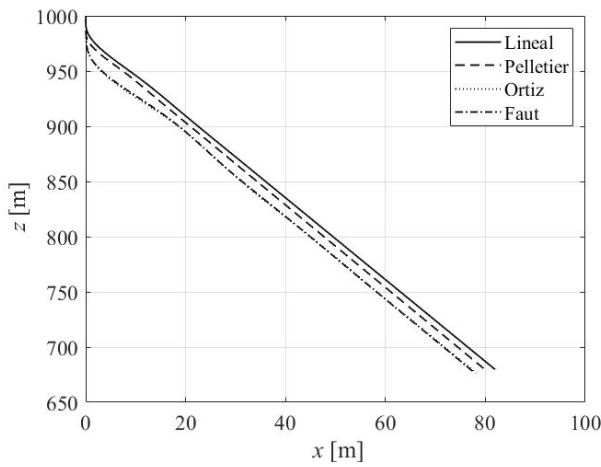


Fig. 7: Desplazamiento en el plano x-z.

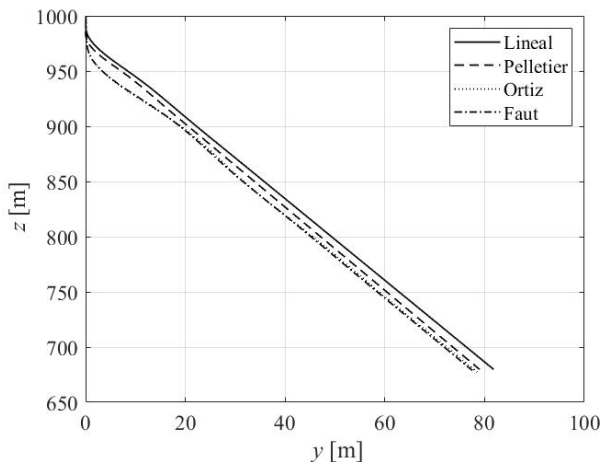


Fig. 8: Desplazamiento en el plano y-z.

El conjunto de Figuras 6 a 11 muestra el comportamiento teórico del pararrotor según la utilización de diferentes modelos para los coeficientes aerodinámicos. Se observa que la dirección de desplazamiento respecto al eje horizontal se mantiene a 45°, variando según el modelo el alcance que tiene el pararrotor. La explicación a este comportamiento puede hallarse observando cualitativamente las representaciones C_L vs. α y C_D vs. α de cada modelo. Los modelos de Pelletier y Faut son variables hasta

aproximadamente 0,3 rad (20°). A partir de este ángulo, se supuso constante el valor de C_L para el modelo de Pelletier, por lo que a la sustentación y a la resistencia se le asignan valores que difieren respecto a los otros tres modelos.

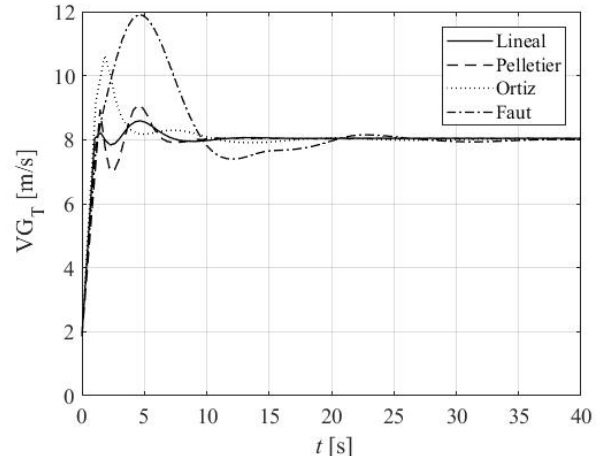


Fig. 9: Velocidad de descenso V_{G_T} .

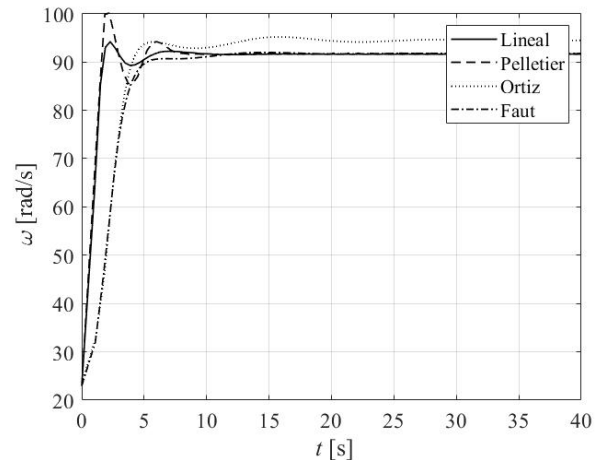


Fig. 10: Velocidad angular del pararrotor.

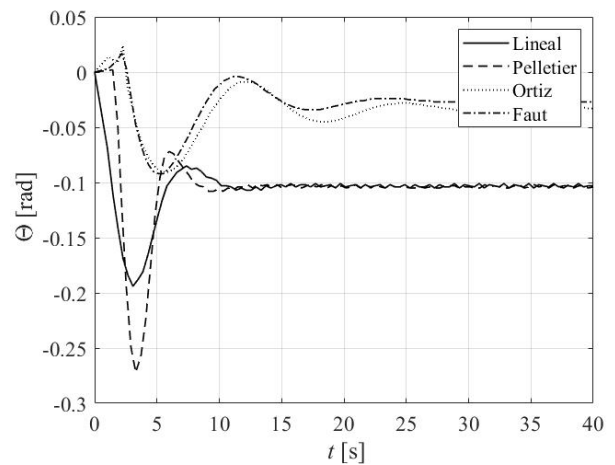


Fig. 11: Ángulo de cabeceo θ .

Cabe señalar que la representación adoptada para los coeficientes de resistencia y sustentación para grandes ángulos de ataque influye sensiblemente en la determinación de las características del movimiento en el plano horizontal. La asignación de mayores fuerzas aerodinámicas a mayores

ángulos de ataque se traduce en una fuerza aerodinámica neta mayor, con lo que el tiempo de descenso se disminuye y se obtienen desplazamientos laterales mayores.

Para explicar este comportamiento es conveniente analizar que sucede con el ángulo de ataque de la pala, presentado en la Figura 12 para el estado de equilibrio.

Se observa que, según el modelo, el valor medio del ángulo de ataque se modifica. En primer lugar, el modelo Lineal presenta valores máximos del ángulo de ataque superiores a los que se determinan mediante los otros tres modelos. Para el rango de ángulos de ataque que se dan utilizando este modelo ($0 \text{ rad} < \alpha < 0,7 \text{ rad}$), el coeficiente de sustentación varía linealmente, mientras que el de resistencia se asume constante.

Los modelos Pelletier y Ortiz presentan valores máximos de $\alpha = 35^\circ$ y $\alpha = 42^\circ$, en donde el comportamiento de los coeficientes es variable. El modelo de Faut entrega valores de ángulo de ataque menores.

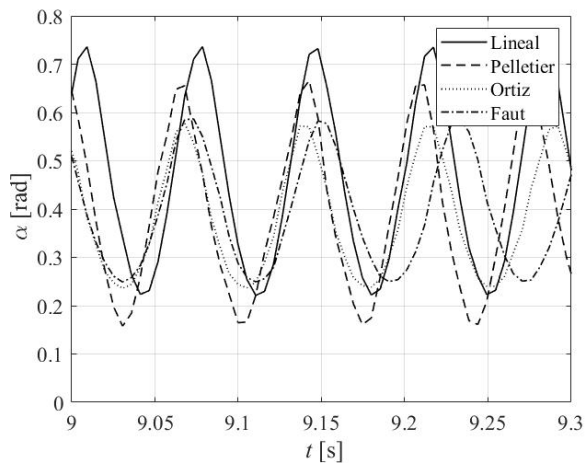


Fig. 12: Ángulo de ataque de una pala.

A la vista de la Figura 6, no hay evidencia de que los distintos modelos generen divergencias sustanciales en cuanto a la dirección de desplazamiento. No obstante, algunas observaciones pueden realizarse en cuanto a la Figura 7. Allí se observa que el alcance varía según el modelo. Si bien las diferencias no resultan significativas, existe una diferencia del 5 % en el alcance entre el modelo de Faut y el lineal. El alcance según los otros dos modelos se encuentra dentro del rango delimitado por estos dos límites. Puede establecerse una relación entre el ángulo de ataque promedio según el modelo y el alcance lateral, a partir de donde puede observarse que en el modelo lineal el coeficiente de sustentación (para el ángulo de ataque promedio) es mayor que en el modelo de Faut. El coeficiente de resistencia para el modelo lineal también es menor que en los otros tres modelos para el ángulo de ataque promedio. Esta observación da una pista de que el mayor alcance tiene relación con mayores coeficientes de sustentación y menores coeficientes de resistencia.

Otro elemento de análisis seleccionado es aquel relacionado con la velocidad angular ω_{zA} . En la Figura 10, se observa que la velocidad angular del pararrotor para el modelo de Ortiz es levemente mayor a las determinadas por los otros tres modelos. El rango de ángulos de ataque para el que operan las palas implementando el modelo de Ortiz está en el intervalo $0,2 \text{ rad} < \alpha < 0,6 \text{ rad}$ (Figura 11), para el que

el coeficiente de sustentación tiene un comportamiento prácticamente lineal (la pala sustenta en todo el rango operativo) y el coeficiente de resistencia muestra un comportamiento creciente. Debido a que las palas no entran en pérdida para este modelo, las fuerzas aerodinámicas son mayores y provocan que el pararrotor alcance velocidades de rotación mayores que con el resto de los modelos, en los que la resistencia se supone constante (modelo lineal) o la sustentación máxima se da para $\alpha = 0,5 \text{ rad}$ (Pelletier y Faut).

El ángulo de cabeceo muestra un comportamiento transitorio distinto según el modelo, y el valor de equilibrio alcanzado también es distinto. El tiempo de establecimiento de equilibrio es de aproximadamente 15 segundos para todos los casos, comportamiento que se observa en las Figuras 9, 10 y 11. Este factor da cuenta de que la utilización de un modelo lineal permite caracterizar la estabilidad del dispositivo (entendida esta como la respuesta acotada de una variable $-\mathbf{VG}$, ω_{zA} o Θ - a una señal de entrada $-\mathbf{u}_C(t)$) sin considerar efectos no lineales en la configuración aerodinámica. El análisis de las magnitudes que alcanza el ángulo de cabeceo se realiza a partir de los ángulos de ataque y de las curvas de los coeficientes de sustentación y resistencia. El valor que toma según los modelos de Ortiz y Faut es, en valor absoluto, menor que el que toma según los modelos lineales y de Pelletier (Figura 11). La característica distintiva entre ambos grupos es que para los primeros (Ortiz y Faut), el coeficiente de sustentación decrece para ángulos mayores a $0,5 \text{ rad}$, mientras que para los otros se mantiene constante o sigue creciendo con α . Esto indica que para el primer grupo de modelos, cuando el ángulo de ataque aumenta el coeficiente de sustentación disminuye (entrada en pérdida) mientras que para el segundo grupo no se manifiesta este comportamiento, sino que las palas siguen sustentando a altos ángulos de ataque que generan mayores torques sobre el cuerpo del pararrotor.

CONCLUSIONES

El presente trabajo da continuidad a desarrollos anteriores, buscando incorporar el análisis de nuevos modelos aerodinámicos para las palas y su efecto sobre los parámetros que caracterizan el vuelo de un pararrotor ante determinadas condiciones de borde. Sobre la base de un modelo dinámico desarrollado genéricamente, se implementaron una variedad de modelos y se analizó su efecto en el comportamiento de las variables de estado.

Tal como se señala en los resultados, el rango operativo para el ángulo de ataque y, consecuentemente, el modelo aerodinámico utilizado modifica el movimiento en el plano vertical.

Se establece también que, debido al amplio rango de ángulos de ataque bajo el cual operan las palas del pararrotor, los efectos no lineales en la sustentación y la resistencia influyen en el alcance del dispositivo y, en menor medida, en la velocidad de rotación que alcanzan.

En cambio, el ángulo de cabeceo presenta distintos valores según el tipo de modelo utilizado para los coeficientes. Cualitativamente no se observan diferencias (para todos los modelos el signo es negativo), con lo que puede asumirse que en este problema no son relevantes los efectos aerodinámicos de alto orden.

A efectos de obtener modelos para los coeficientes mejor adaptados a la utilización del pararrotor, es necesaria la realización de ensayos en los que se determinen los coeficientes para un amplio rango de ángulos de ataque. La comparación de estas predicciones con los resultados de ensayos de vuelo de los pararrotos brindará herramientas que permitan validarlas.

REFERENCIAS

- [1] Bollay W. (1939), "A non linear wing theory and its application to rectangular wings of small aspect ratio", *Journal of applied Mathematics and mechanics*, vol 19, no. 1, pp 21-35.
- [2] Kuchemann D. (1952), "A simple method for calculating the span and chordwise loading on straight and swept wings of any given aspect ratio at subsonic speeds", *Tech. Rep., DTIC Document*.
- [3] Carmichael B. (1981), "Low Reynolds number airfoil survey", Volume 1.
- [4] Mueller T. (2000) "Aerodynamic measurements at low Reynolds number for fixed wing micro air vehicles"
- [5] Pelletier A. y Mueller T. (2000), "Low Reynolds number aerodynamics of low aspect ratio, thin/flat/cambered-plate wings". *Journal of aircraft*, Vol. 37, no. 5, pp 825-832.
- [6] Torres G. y Muller T. (2004), "Low aspect ratio aerodynamics at low Reynolds number", *AIAA Journal*, vol. 42, pp. 865-873.
- [7] Ortiz X., Rival D. y Wood D. (2015), "Forces and moments on flat plates of small wind turbine blades", *Energies*, vol. 8, no. 4, pp. 2438-2453.
- [8] Martiarena J. (2018), "Estudio del desplazamiento lateral de un decelerador de alas rotatorias de pequeño alargamiento a través de las variaciones cíclicas del paso de las palas", Tesis Doctoral, Facultad de Ingeniería UNLP.
- [9] Faut R., Nadal Mora V. y Piechocki J. (2014), "Determinación experimental de parámetros aerodinámicos de alas de pequeño alargamiento para uso en pararrotos", AATE.

NOMENCLATURA

F	Vector de fuerzas.
h_H	Momento cinético del cuerpo del pararrotor.
M	Vector de momentos.
T_i	Matriz de transformación entre sistemas de referencia.
u_c	Vector de control.
Θ, Φ, ψ	Ángulos de Euler.
V	Vector de velocidad.
θ₀	Ángulo de paso colectivo.
θ_{IS} y θ_{IC}	Ángulo de paso cíclico lateral y longitudinal.
C_D	Coefficiente de resistencia.
C_L	Coefficiente de sustentación.
E_b	Punto de acoplamiento entre la pala y el cilindro del pararrotor.
I_b	Tensor de inercia de las palas.
I_H	Tensor de inercia del pararrotor.
P_b	Centro de presiones de la pala <i>b</i> .
r_{Gi}	Coordenada <i>i</i> de la posición del centro de masas del pararrotor.