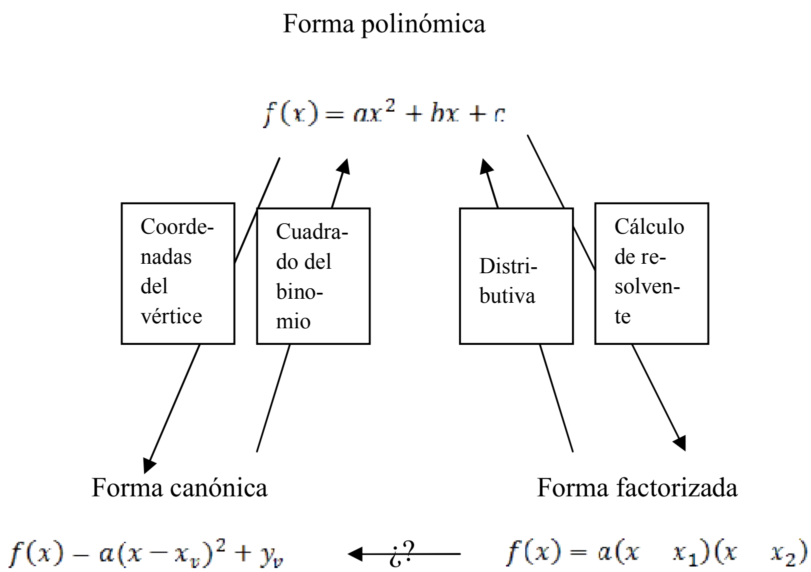
Cálculo de vértice de Parábola

Santiago López

Resumen

La función cuadrática es una herramienta muy importante a la hora de modelar ciertos problemas de aplicación, dependiendo del enunciado, usamos una de sus tres expresiones, las cuales son: forma polinómica, canónica y factorizada. Cualquiera sea su forma, los docentes secundarios sabemos lo engorroso que les resulta a los alumnos pasar de una forma a la otra, más precisamente cuando se trata de ir de la factorizada a la canónica, debiendo pasar por la polinómica previamente.

Por lo anteriormente expuesto, podemos sintetizar el problema:



Comencemos igualando las expresiones

$$a(x-x_1)(x-x_2)=a(x-x_v)^2+y_v \qquad (1)$$

Aplicando propiedad distributiva, se obtiene

$$a(x^2-xx_2-xx_1+x_1x_2)=a(x-x_v)^2+y_v$$

En el lado izquierdo, sumamos y restamos

$$a(\frac{x_1+x_2}{2})^2$$

Obtenemos

$$a\left(x^2-x(x_1+x_2)+\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2\right)+ax_1x_2-a\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2=a(x-x_v)^2+y_v$$

Usando cuadrado de binomio.

$$a\left(x-\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2+ax_1x_2-a\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2=a(x-x_v)^2+y_v$$

Por igualdad de polinomios, tenemos:

$$\boxed{\frac{x_1+x_2}{2}=x_v} \qquad (2)$$

$$ax_1x_2-a(\frac{x_1+x_2}{2})^2=y_v$$

De donde, por (2) se obtiene

$$\boxed{y_v=a(x_1x_2-{x_v}^2)} \qquad (3)$$

Por lo tanto, para pasar de la forma factorizada a la forma canónica, debemos reemplazar en (2) y (3) el valor de cada raíz.

Teorema: *toda función de segundo grado* $ax^2 + bx + c$ *que admite raíces no reales complejas conjugadas,* z, $\bar{z}$ *tiene por vértice el punto*

$$\boxed{(Re(z),\ a\, Im(z)^2)}$$

Demostración:

Sean $x_1 = \alpha + \beta i$ y $x_2 = \alpha - \beta i$ las dos raíces complejas conjugadas

Reemplazando en (1)

$$a(x - \alpha - \beta i)(x - \alpha + \beta i) = a(x - x_v)^2 + y_v$$

$$a(x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2) = a(x - x_v)^2 + y_v$$

$$a(x - \alpha)^2 + a\beta^2 = a(x - x_v)^2 + y_v$$

Por lo tanto:

$$x_v = \alpha \text{ e } y_v = a\beta^2$$

O lo que es igual:

$$\boxed{x_v = Re(z) \quad e \quad y_v = a\,(Im(z))^2}$$

L.C.Q.D.

Otra demostración se deduce de las fórmulas (2) y (3) del modo siguiente,

$$x_v = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{(\alpha + i\beta) + (\alpha - i\beta)}{2} = \alpha = \mathrm{Re}(z)$$

$$y_v = a(x_1 x_2 - x_v{}^2) = a((\alpha + i\beta)(\alpha + i\beta)(\alpha - i\beta) - \alpha^2)$$

$$= a(\alpha^2 + \beta^2 - \alpha^2)$$

$$= a\beta^2 = a(\mathrm{Im}(z))^2$$

Lopezantiago79@gmail.com

Villa Elisa. Entre Ríos.

$y_v = ax_1x_2 - a(\frac{x_1+x_2}{2})^2$