CONSTRUCCIONES CON SOLO COMPÁS.

MARCELO VALENTÍN ARIAS[1] ANTONIO SÁNGARI[1,2]

[1]Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias Exactas, Universidad Nacional de Salta

[2]Consejo de Investigación de la Universidad Nacional de Salta

E-mails: chelo_18_86@hotmail.com, asangari2000@gmail.com

1. Fundamentación

En el presente trabajo describimos una propuesta de enseñanza de nivel universitario sobre las construcciones con compás solamente usando la asistencia del soft libre Geogebra. Es nuestra intención aprovechar el encantamiento de las construcciones geométricas para incentivar a nuestros estudiantes al estudio de la Geometría en general. Sumado a esto, contamos con que se interesen en usar el Geogebra como asistente para las construcciones. Hemos notado que muchos estudiantes sienten especial interés por el uso de este tipo de recurso.

Sabemos que todas las construcciones que se pueden hacer con regla y compás se pueden hacer con compás solamente. Recordamos que cuando hablamos de construcciones, nos referimos especialmente al método de los griegos antiguos y al uso de los únicos dos elementos permitidos en ese entonces: la regla y el compás. Con el pasaje del tiempo, el matemático Mohr y posteriormente Mascheroni, mostraron que se podía prescindir de la regla. Claro que en este contexto una recta (que obviamente no se puede trazar) queda perfectamente determinada por dos de sus puntos distintos. Un enfoque posterior del mismo problema se debió a Adler, quien desarrolló una geometría basada en la inversión.

2. Desarrollo

2.1. El problema de las construcciones con solo compás. Como dijimos anteriormente, las rectas quedarán determinadas por dos de sus puntos. Pero surgen otros problemas: (a) ¿Cómo determino la intersección de una recta con una circunferencia?. (b) ¿Cómo determino la intersección de dos rectas?. La respuesta a la pregunta (a) queda incluso condicionada a si conozco, o no, el centro de la circunferencia. Entonces surge otra pregunta: Teniendo una circunferencia, ¿Puedo indicar un procedimiento para encontrar su centro?. La respuesta a la pregunta (b) puede abordarse de más de una manera: o usando los conceptos de la inversión o el concepto de la cuarta proporcional. Si mostramos que todo esto es posible, tendremos directamente el problema resuelto.

2.2. El Geogebra. El GeoGebra (ver geogebra) es un software matemático interactivo libre, principalmente diseñado para la educación en todos los niveles educativos. Principalmente se lo usa para **Geo**metría y Ál**gebra.** Los dibujos que están en este trabajo se hicieron con este soft. Además, debido a que permite crear dibujos interactivos, es ideal para la exploración visual de propiedades geométricas. También aprovechamos las herramientas predefinidas que simplifican la construcción. Por ejemplo, luego de justificar la construcción del inverso de un punto, usamos una herramienta que nos devuelve el transformado de un punto dado. Otro hecho digno de mención es que permite la creación de herramientas nuevas definidas por el usuario.

2.3. Notaciones y convenciones. Para hacer las construcciones de abscisas, elegiremos dos puntos distintos en el plano, O y U, y le asignaremos las abscisas 0 y 1 respectivamente. Las demás abscisas construibles se referirán a estas dos primeras. Para lograr mayor agilidad en la comunicación usaremos un pequeño abuso de notación: a la semirrecta $\overrightarrow{OU}$ le llamaremos positiva o de la derecha y a la semirrecta opuesta, negativa o de la izquierda. Incluso, a veces nos referiremos a un punto por su abscisa.

2.4. Construcciones fundamentales.

2.4.1. Trasporte de medidas con un compás antiguo. Un compás antiguo es un compás que colapsa después de una aplicación. Es decir que no puede trasladarse una medida con un compás antiguo. Nuestro problema se reduce a: Dada una circunferencia $\mathcal{C}$ de centro un punto O y un punto P, encontrar una circunferencia de centro P congruente con la primera. (ver figura 2.1). Con esto todas las construcciones de ahora en más se harán con compás moderno y se usará directamente la herramienta predefinida del Geogebra "compás".

Llamemos $\mathcal{C}_1$ a la circunferencia de centro O y que pasa por P y sea $\mathcal{C}_2$ la circunferencia de centro P y que pasa por O. Sea $\{B, C\} = \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$. Tomemos un punto A cualquiera en $\mathcal{C}$. Llamemos D a la otra intersección de las circunferencias de centros B y C, y que pasan por A. La circunferencia con centro en P y que pasa por D tiene igual radio que $\mathcal{C}$.

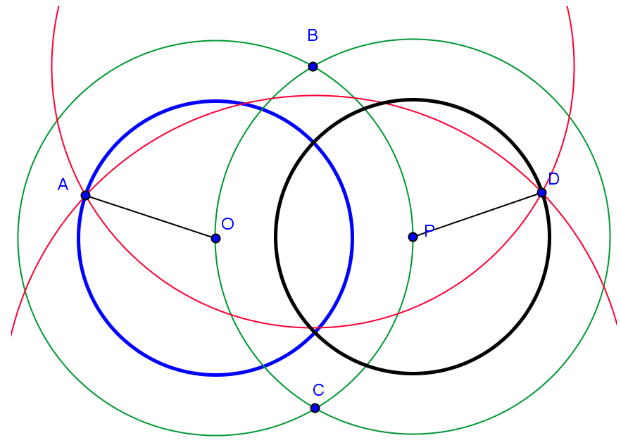

FIGURA 2.1. Construcción de una circunferencia con el mismo radio que una dada.

2.4.2. El inverso de un punto. Sea un punto O arbitrario del plano π, y $\mathcal{C}$ una circunferencia de radio k y de centro O, definimos una función de $\pi - \{O\}$ en $\pi - \{O\}$ a la que llamaremos inversión con respecto a $\mathcal{C}$, de la manera siguiente: a cada punto P de $\pi - \{O\}$ se le asigna otro punto P' tal que P' pertenece a la semirrecta $\overrightarrow{OP}$ y $OP \times OP' = k^2$. Por comodidad al punto O se le asigna la recta impropia. Es inmediato ver que la inversión es involutiva.

Se prueba que la inversión es una transformación geométrica que transforma: (a) rectas que no pasan por O en circunferencias que pasan por O, (b) rectas que pasan por O en si mismas, (c) circunferencias que no pasan por O en circunferencias que tampoco pasan por O y (d) las circunferencias que pasan por O en rectas que no pasan por O. También se sabe que la inversión es conforme.

Primeramente veamos que se puede construir el inverso con respecto a una circunferencia $\mathcal{C}$ de centro O conocido de un punto P. Consideremos los casos siguientes:

Caso 1: La circunferencia $\mathcal{C}_1$ de centro P y que pasa por O corta a $\mathcal{C}$ en dos puntos. Esto solamente puede suceder si la distancia de O a P es mayor que la mitad del radio de $\mathcal{C}$. Sean R y S los puntos de intersección de $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}_1$. Tracemos dos circunferencias que pasen por O pero de centros R y S, respectivamente (Ver figura 2.2) Llamemos P' a la otra intersección de estas últimas circunferencias. Mostremos que P y P' son inversos uno del otro. Note que los triángulos PRA y $P'RA$ son semejantes. Por lo tanto

$$\frac{\overline{PA}}{\overline{RA}} = \frac{\overline{RA}}{\overline{P'A}}$$

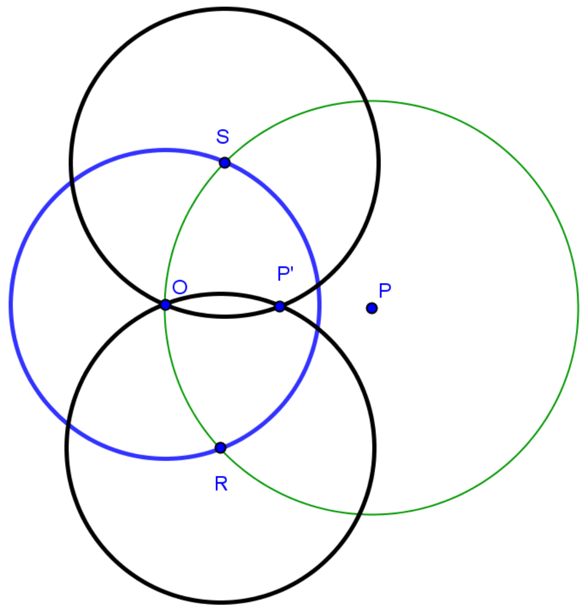

FIGURA 2.2. Construcción del inverso de un punto con respecto a una circunferencia.

y entonces $\overline{PA} \times \overline{P'A} = \left(\overline{RA}\right)^2$.

Caso 2: La circunferencia $\mathcal{C}_1$ de centro P y que pasa por O corta a $\mathcal{C}$ en un punto. Esto solamente puede suceder si la distancia de O a P es igual a la mitad del radio de $\mathcal{C}$. En este caso se puede usar el procedimiento para duplicar segmentos que se vera mas adelante (sección 2.5) .

Caso 3: La circunferencia $\mathcal{C}_1$ de centro P y que pasa por O no corta a $\mathcal{C}$. Esto solamente puede suceder si la distancia de O a P es menor que la mitad del radio de $\mathcal{C}$. En este caso se puede generar una sucesión finita de puntos $\{P_i\}_{i=0}^n$ de tal modo que $P_0 = P$, P_{k-1} es el punto medio del segmento $\overline{OP_k}$, $(1 \leq k \leq n)$ y $\overline{OP_n} \geq r/2$, con r radio de $\mathcal{C}$. En el caso de P_n se puede encontrar inmediatamente el inverso P_n', usando los casos 1 o 2. Como $\overline{OP_n} = 2^n \overline{OP}$, entonces $\overline{OP_n}' = 2^{-n} \overline{OP}$'.

2.4.3. Construcción del centro de una circunferencia. Sea una circunferencia $\mathcal{C}$. Tomemos en $\mathcal{C}$ dos puntos A y B. Sea $\mathcal{C}_1$ la circunferencia de centro A que pasa por B. Llamemos C la otra intersección de $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}_1$. Consideremos dos circunferencias que pasan por A y de centros B y C respectivamente y llamemos P a la otra intersección. Mirando el caso 1 de la sección . Se ve que el inverso de P con respecto a $\mathcal{C}_1$ es el centro O de la circunferencia $\mathcal{C}$. (ver figura 2.3).

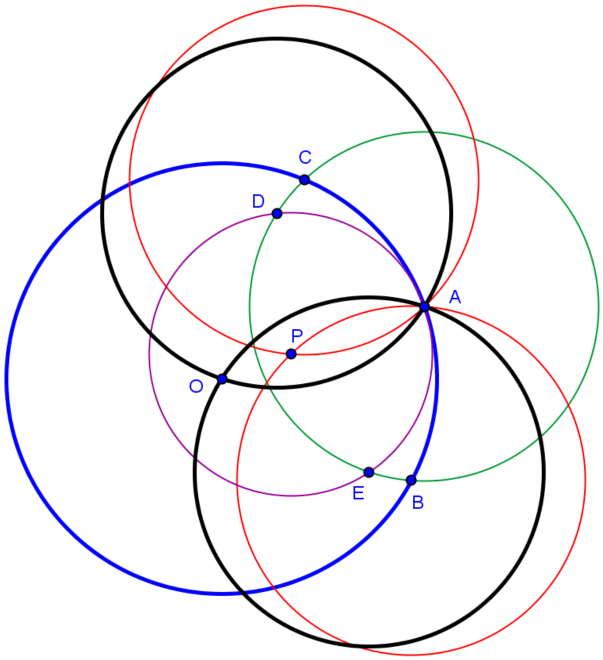

FIGURA 2.3. Construcción del centro de la circunferencia.

2.5. Construcción del segmento doble y del punto medio del mismo.

- Dado un segmento $\overline{AB}$ encontrar un punto C, de tal modo que el punto B sea el punto medio del segmento $\overline{AC}$. Tracemos las circunferencias $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}_1$ de centros A y B respectivamente y que pasan por B y A respectivamente. Tomemos D y E los puntos en la intersección de $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}_1$. Llamemos $\mathcal{C}_2$ a la circunferencia de centro D que pasa por E. Entonces el punto C es la otra intersección de $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ (ver figura 2.4).

- Dado un segmento $\overline{AB}$ encontrar un punto P, de tal modo que el punto P sea el punto medio del segmento $\overline{AB}$. Aprovechando la construcción anterior solo tenemos que encontrar en inverso del punto C, el cual sera nuestro punto buscado P (ver figura 2.5), ya que:

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{AB}} = \frac{\frac{\overline{AB}}{2}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AB}}{2\overline{AB}}$$

y entonces $\overline{AB} \times \overline{AB} = \left(\overline{AB}\right)^2$.

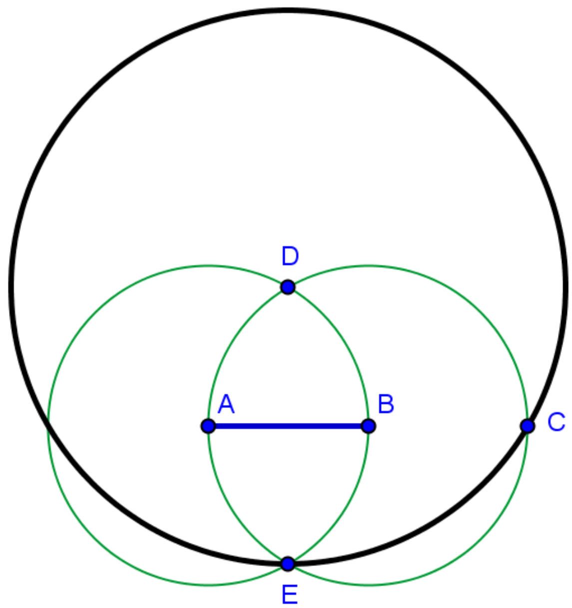

FIGURA 2.4. Construcción del segmento doble.

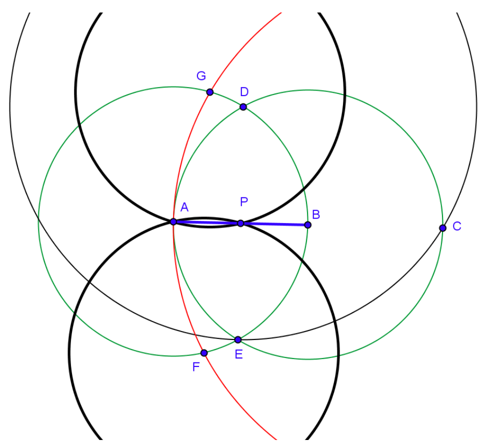

FIGURA 2.5. Construcción del punto medio se un segmento

2.6. Construcción de la intersección de una recta con una circunferencia. Dado una recta r determinada por sus puntos A y B, y una circunferencia $\mathcal{C}$ de centro O determinar su intersección. Trazar las circunferencias $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ de centro A y B respectivamente que pasen por O ambas. Llamamos C a la otra intersección de las circunferencias $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ y eligiendo un punto D de la circunferencia $\mathcal{C}$, trazamos una circunferencia

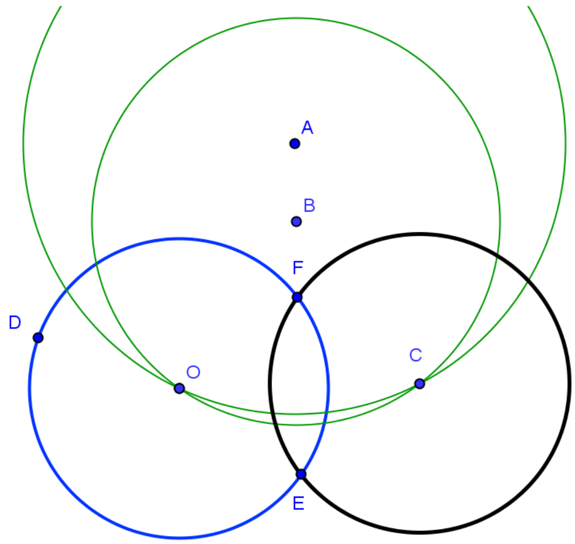

FIGURA 2.6. Construcción de la intersección de una circunferencia y una recta que no pasa por su centro

$\mathcal{C}_3$ de radio $\overline{OD}$ con centro en C. La intersecciones de $\mathcal{C}$ con $\mathcal{C}_3$ nos darán los puntos de intersección de la recta y la circunferencia buscados (ver figura 2.6).

Si es que la recta dada pasa por el centro de la circunferencia $\mathcal{C}$ la construcción anterior no nos servirá. En ese caso "cortamos" con centro A un arco en la circunferencia $\mathcal{C}$ y buscamos el punto medio de dicho arco. Sean C y D los extremos de dicho arco. Trazamos circunferencias $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ con centros en D y C que pasen por O y una circunferencia $\mathcal{C}_3$ con centro O y radio $\overline{CD}$ para determinar arcos ,OE y OF iguales al arco CD. La circunferencia $\mathcal{C}_4$ con centro E que pasa por D y la circunferencia $\mathcal{C}_5$ con centro F que pasa por C se cortan en un punto G. La circunferencia con centro E y radio $\overline{OG}$ corta al arco CD en su punto medio K (ver figura 2.7).

2.7. Construcción de la intersección de dos rectas.

2.7.1. Construcción de la cuarta proposicional. La cuarta proporcional de 3 segmentos a, b, c es un segmento x tal que $a : b = c : x$. Para obtener dicho segmento trazamos con centro en un punto O cualquiera las circunferencias $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ de radios a y b respectivamente. Con centro en un punto G de la circunferencia de radio a trazamos otra circunferencia $\mathcal{C}_3$ de radio c, que cortará a la circunferencia $\mathcal{C}_1$ en el punto J. Las circunferencias

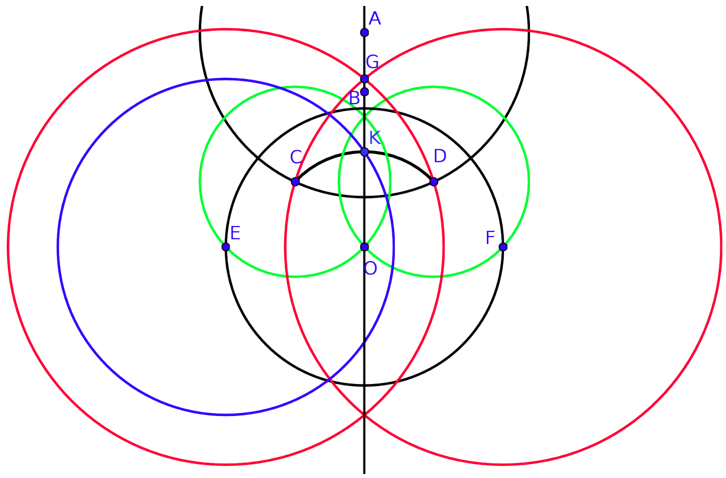

Figura 2.7. construcción de la intersección de una circunferencia y una recta que pasa por su centro

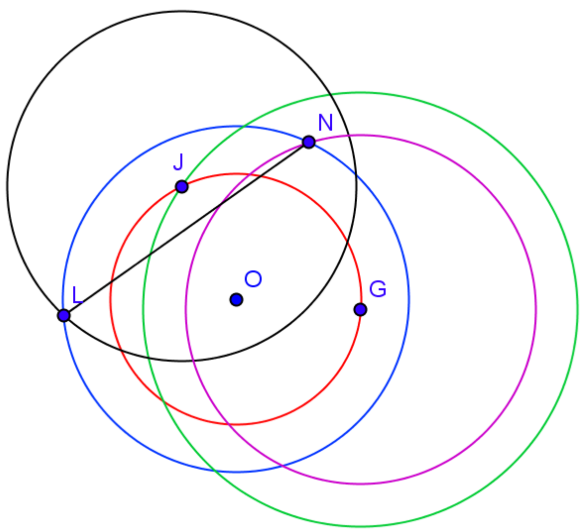

Figura 2.8. construcción de la cuarta proporcional.

$\mathcal{C}_4$ y $\mathcal{C}_5$ con centros G y J respectivamente y mismo radio arbitrario cortan a la circunferencia $\mathcal{C}_2$ en dos puntos N y L. $\overline{NL} = x$ es la cuarta proporcional que buscamos(ver figura 2.8).

Esta construcción podría fallar si es que $a < c/2$, pero en ese caso debemos calculamos la cuarta proporcional de na, nb, c, con $na > c/2$ ya que $\frac{na}{nb} = \frac{a}{b} = \frac{c}{x}$.

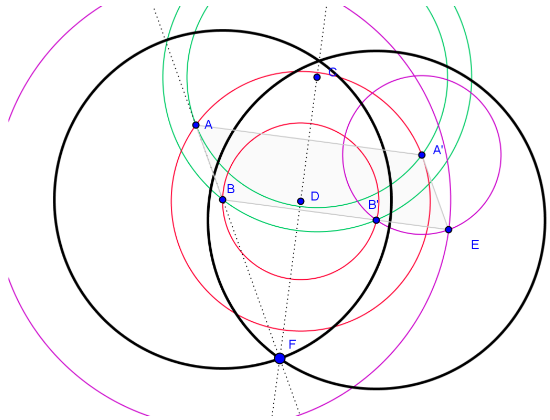

FIGURA 2.9. intersección de dos rectas.

2.7.2. Construcción de la intersección de dos rectas con ayuda de la cuarta proporcional. Dadas la recta r determinada por los puntos A y B, y la recta s determinada por el punto C y D obtener su intersección. Trazo las siguientes circunferencias: $\mathcal{C}_1$ de centro en C que pasa por A, $\mathcal{C}_2$ de centro en C que pasa por B, $\mathcal{C}_3$ de centro en D que pasa por A, $\mathcal{C}_4$ de centro en D que pasa por B. La otra intersección de $\mathcal{C}_1$ con $\mathcal{C}_3$ me dará el punto A' y la otra intersección de $\mathcal{C}_2$ con $\mathcal{C}_4$ me dará el punto B'. A' y B'son los simétricos de A y B con respecto a la recta que pasa por C y D . Trazamos las circunferencias $\mathcal{C}_5$ de centro A' que pasa por B' y la circunferencia $\mathcal{C}_6$ de centro B de radio $\overline{A'A}$. De las intersecciones de estas dos ultimas circunferencias, tomo el punto E de modo que los puntos A, B, E y A' sean vértices de un paralelogramo. Obtenemos la cuarta proporcional d de los segmentos $a = B'E$, $b = B'A'$ y $c = B'B$. Trazamos la circunferencia $\mathcal{C}_7$ de centro B y la circunferencia $\mathcal{C}_8$ de centro B'. La intersección de $\mathcal{C}_7$ con $\mathcal{C}_8$ me dará el punto F buscado (ver figura 2.9).

2.8. Construcción de la raíz de un número. Haciendo uso de lo que ya hemos hecho podemos construir realizar interesantes construcciones con solo compás como ser la raíz de un número cualquiera. Para ello vamos a hacer uso de la siguiente igualdad:

$$\left(\sqrt{C}\right)^2 + \left(C - \tfrac{1}{4}\right)^2 = \left(C + \tfrac{1}{4}\right)^2$$

Para ello dados el segmento $c = \overline{C_1C_2}$ de longitud un número dado C y el segmento unidad $\overline{OU}$ obtenemos el punto medio P de este último segmento. Además obtenemos el punto medio de $\overline{OP}$, llamando a este último Q. Trazamos la circunferencia $\mathcal{C}$ de centro O y radio c y obtenemos la intersección de esta circunferencia con la semirrecta $\overrightarrow{OU}$, llamando C a este punto. y con centro C y radio $\overline{OQ}$ trazo la circunferencia $\mathcal{C}_1$ y obtenemos la

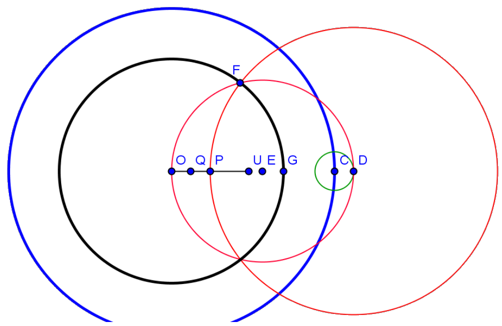

FIGURA 2.10. raíz de un número

intersección de $\mathcal{C}_1$ con la semirrecta $\overrightarrow{OU}$ que no esta entre C y O llamando a este punto D. Determino el punto medio E de $\overline{OD}$ y trazamos la circunferencia $\mathcal{C}_2$ de centro E que pasa por D. Trazamos la circunferencia $\mathcal{C}_3$ de centro D que pasa por P, la intersección de $\mathcal{C}_2$ con $\mathcal{C}_3$ nos dará un punto F. Se verifica que el triángulo $\overset{\triangle}{OFD}$ es rectángulo que según el segmento unidad $\overline{OU}$, $\overline{OD} = C + \frac{1}{4}$ y que $\overline{DP} = C - \frac{1}{4}$. Por lo tanto tenemos que $\overline{OF} = \sqrt{c}$.Lo único que tenemos que hacer es trazar la circunferencia $\mathcal{C}_4$ de centro O que pasa por F tal que la intersección de la misma con la recta que pasa por O y U me da un punto G de modo que $\overline{OG} = \sqrt{c}$ (ver figura 2.10).

2.9. Construcción del resolvente de segundo grado del tipo $\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - (\sqrt{c})^2}$. Sea el punto B de abscisa b, y el punto C de abscisa $\sqrt{c}$. Sea $\mathcal{C}$ la circunferencia de diámetro $\overline{AM}$, donde M es el punto medio del segmento OB (ver figura 2.11). Observe que el triángulo OAM es rectángulo pues tiene como uno de sus lados un diámetro de una circunferencia y está inscripto en una circunferencia. Por esto último podemos deducir que el segmento $\overline{MA}$ tiene longitud $\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - (\sqrt{c})^2}$por el teorema de Pitágoras. Por esto la intersección de la circunferencia de centro M y que pasa por A, cola la abscisa, determina dos puntos de la forma $\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - (\sqrt{c})^2}$.

ANÁLISIS

En la sección 2 fuimos exponiendo desarrollos que posibilitan construcciones cada vez más complejas. Comenzamos mostrando la equivalencia entre un compás moderno y uno antiguo. Luego mostramos que se puede

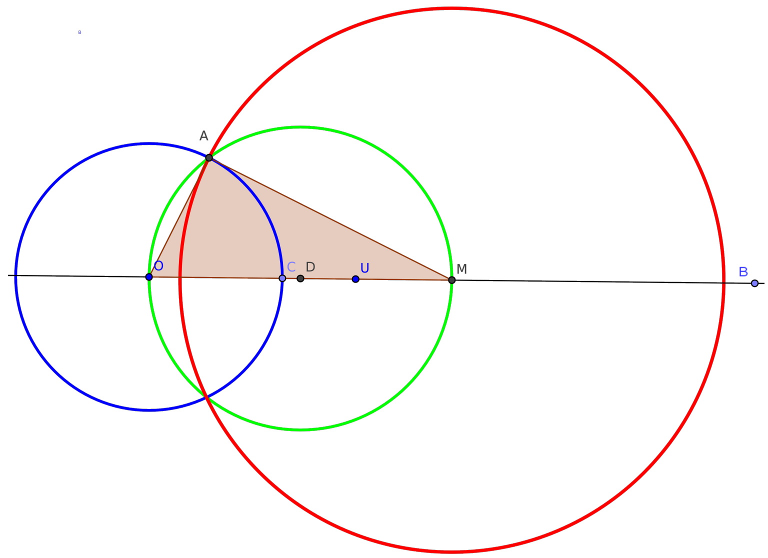

FIGURA 2.11. Construcción del resolvente de segundo grado de la forma $\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - (\sqrt{c})^2}$

encontrar con solo compás el inverso de un punto dado, con respecto a una circunferencia dada de centro conocido. Con esto encaramos construcciones que suplen la regla clásica. Y avanzamos en este sentido hasta que conseguimos construir el resolvente de segundo grado, que es una herramienta importante para la construcción de polígonos regulares.

En todos los casos usamos el Geogebra como recurso para dar una interpretación visual, tan útil en la labor docente.

Conclusión

No es demasiado exagerado decir que la labor de un matemático es la de "bajar", o "debilitar" hipótesis. Las construcciones con compás solamente son un digno ejemplo de esto último. Cuando disminuimos la cantidad de instrumentos para la construcción, aumenta la cantidad de problemas que debemos enfrentar. Esta situación tiene que resultar motivadora para el docente y para el estudiante, especialmente si se hace de una manera poco estructurada y distendida.

Hay un dicho popular que afirma que una imagen vale más que mil palabras. Quizás no sea cierto en sentido lógico, pero es muy probable que sea cierta en sentido pedagógico. Y si una imagen o un dibujo valen tanto, ¿cuanto vale la posibilidad de **ver** muchas imágenes a la vez? . Hoy, con recursos como el Geogebra, es posible.

Cerramos este trabajo expresando nuestro deseo de que este trabajo sirva como una ayuda a los docentes ocupados de la enseñanza de la geometría elemental, y que pueda ser un comienzo para trabajos conjuntos con otras personas que se sientan interesados en esta temática.

Referencias

[1] Kostovski. A. N. Construcciones Geométricas Mediante un Compás. Editorial MIR. Moscú 1984.

[2] Coxeter H.S.M. ; Greitzer S.L. Retorno a la Geometría.