El teorema de Bayes

Gabriel Soto

Resumen

Las probabilidades condicionales y el Teorema de Bayes conviven con nosotros en las formas más insólitas. El uso de la fórmula de Bayes no es simple (para mi siempre fue dificultoso utilizarla correctamente), sin embargo existen alternativas que permiten aplicar el resultado sin hacer uso de la fórmula. Este artículo surgió de un taller encuadrado dentro de la Primeras Olimpíadas del Golfo San Jorge, desarrollado en agosto del 2010. Sin entrar en los detalles matemáticos técnicos, mostraremos algunos ejemplos sobre el uso del Teorema de Bayes en contexto, y que pueden servir como actividades motivadoras para introducir estas ideas importantes en el aula.

1. Introducción

We all use math every day;
to predict weather, to tell time, to handle money.
Math is more than formulas or equations;
it's logic, it's rationality,
it's using your mind to solve the biggest mysteries we know. [1]

En un artículo de Steven Strogatz que publicó en el diario New York Times [6], se presenta el siguiente problema:

Ejemplo 1. *Se sabe el que 0,8 % de las mujeres adultas pueden tener cancer de mamas. Si una mujer tiene cáncer de mamas, hay un 90 % de chances que tenga un mamograma*[2] *positivo. Si una mujer no tiene cáncer de mamas, todavía existe un 7 % de probabilidades que tenga un mamograma positivo. Si una mujer va al control anual y tiene su mamograma positivo, ¿cuáles son las chances de que tenga cancer de mamas?*

[1] Esta leyenda es la introducción de la serie *Numb3rs* El sitio oficial de la serie es `http://www.cbs.com/primetime/numb3rs/` en donde un policía se asocia con un matemático para combatir el crimen.

[2] Ver `http://en.wikipedia.org/wiki/Mammography`

El problema nos brinda información suficiente para contestar la pregunta, sin embargo la misma no puede ser utilizada directamente, pues sabemos cuál es la probabilidad que una mujer con cáncer de mamas tenga un mamograma positivo, y se nos pregunta, en cambio, cuál es la probabilidad que una mujer tenga cáncer de mamas con un mamograma positivo. De alguna manera *tenemos que dar vuelta los datos*: si conocemos información sobre la ocurrencia de un evento A siempre que haya ocurrido un evento B, necesitamos saber si es posible inferir la ocurrencia del evento B siempre que haya ocurrido A. Este es el contenido del Teorema de Bayes.

Strogatz presenta una solución muy interesante, interpretando los porcentajes del problema en términos de casos favorables sobre casos posibles (noción básica de probabilidades):

sabemos que 8 de cada 1000 mujeres tienen cáncer de mamas y 992 de cada 1000 no. De las ocho mujeres que tienen cáncer, aproximadamente 7 tienen mamograma positivo (el 90 % de ellas tienen mamograma positivo). De las mujeres sanas, aproximadamente 70 tienen un mamograma positivo (el 7 % de ellas tienen mamograma positivo). Así, 77 mujeres tienen mamograma positivo, de donde se sigue que 7 de éstas tienen cáncer ce mamas, o en términos de casos favorables sobre casos posibles $\frac{7}{77} \sim 0,09$.

Si bien este razonamiento puede resultar natural, más del 50 % de las personas que se enfrentan con este problema lo razonan mal [6].

$\square$

Ejemplo 2 (El problema de Monty Hall[3]). *En un programa de entretenimientos, el premio mayor es un auto 0 km que se encuentra detrás de alguna de las tres puertas existentes en el estudio de televisión; ¡en las dos restantes hay cabras![4]. El conductor del programa le pide al finalista que elija la puerta que él cree que se encuentra el auto. Una vez elegida, el conductor abre una de las puertas restantes que tienen una cabra y le propone al participante si quiere cambiar de puerta. La pregunta es: esta información adicional, ¿aumenta las chances de ganar si el jugador cambia de elección?*

Mostramos aquí la solución de Marilyn vos Savant, presentada en su columna *Ask Marilyn* de la revista **Parade Magazine** [5], ver Tabla 1, donde se asume

[3]Este problema aparece en la película Black Jack. Ver `http://www.sonypictures.com/homevideo/21/`

[4]Ver `http://en.wikipedia.org/wiki/Monty_Hall_problem`.

[5]Ver `http://www.parade.com/askmarilyn/`

que el participante elige siempre la misma puerta.

Puerta 1	Puerta 2	Puerta 3	Cambia elección	No cambia elección
Cabra	Cabra	Auto	Auto	Cabra
Cabra	Auto	Cabra	Auto	Cabra
Auto	Cabra	Cabra	Cabra	Auto

Cuadro 1: Solución propuesta por Marilyn vos Sant, asumiendo que el participante siempre elije siempre la misma puerta.

Utilizando la noción de casos favorables sobre casos posibles, en la configuración Cabra-Cabra-Auto, la probabilidad de ganar el auto 0 km en la primera elección es $\frac{1}{3}$. Cuando el conductor del programa abre la segunda puerta, entonces esta información *cambia* las probabilidades de ganar, pues ahora elegir la puerta restante tiene una probabilidad de $\frac{2}{3}$ de ganar el auto. Si en cambio se elije la puerta que esconde el auto, luego de que el conductor abra alguna de las puertas restantes, la probabilidad de elegir la puerta restante sigue siendo $\frac{1}{3}$.

$\square$

Ejemplo 3 (Expectativa de vida). *Observemos la siguiente tabla de vida en una población de 100000 mujeres, ver Tabla 2, la cual se utilizan para poder estimar la expectativa de vida de la población femenina.*

De la tabla, se deduce que 89.835 mujeres de las 100.000 (89,835 %) viven 60 años mientras que 57.062 de las 100.000 mujeres (57,062 %) viven hasta los 80 años. Ahora bien, si una mujer vive hasta los 60 años, cuál es la probabilidad que viva hasta los 80? De la Tabla 2, de las 89.385 mujeres que viven hasta los 60 años, 57.062 de ellas viven hasta los 80. Por lo tanto, la probabilidad que una mujer que haya cumplido 60 años viva hasta los 80 es $\frac{57062}{89{,}835} \sim 0,6384$*, esto es un 63,84 % llega a los 80 años luego de haber llegado a los 60.*

$\square$

Ejemplo 4 (Lanzar un dado una vez). *Supongamos que estamos interesados en saber cuál es la probabilidad de obtener un 6 al lanzar un dado. Si asumimos que el dado no está cargado dicha probabilidad es* $\frac{1}{6}$.

Edad	Masculinos	Femeninos	Edad	Masculinos	Femeninos
0	100000	100000	45	92147	96266
5	98735	99023	50	89912	94987
10	98638	98931	55	86576	92955
15	98485	98833	60	81485	89835
20	97863	98604	65	74051	85141
25	97052	98351	70	64164	78562
30	96159	98038	75	51519	69376
35	95089	97624	80	36848	57062
40	93753	97061	85	21962	41230

Cuadro 2: Tabla de vida de expectativa de vida de mujeres en EE.UU.

Si ahora queremos contestar la misma pregunta pero sabiendo que al lanzar el dado el número obtenido es mayor o igual que 4, entonces la probabilidad de obtener un 6 es $\frac{1}{3}$*. Esto sucede pues la información de haber obtenido un número mayor o igual que 4 determina el conjunto de valores posibles como* $\{4, 5, 6\}$*, y por ende la probabilidades de haber obtenido un 6 es* $\frac{1}{3}$*.*

□

Los problemas presentados tienen en común que la asignación de probabilidades de un evento A es modificada cuando se tiene en cuenta información sobre la ocurrencia de un evento B. Así, *la información a priori* que tenemos de la ocurrencia de un evento B *condiciona* la probabilidad de la ocurrencia del evento A.. Esta nos lleva a la noción de **probabilidades condicionales**, e inmediatamente a la pregunta *¿cómo se calculan?*

2. Probabilidad condicional

En el contexto de este artículo, utilizamos la noción de probabilidad de un evento como la

$$\frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}}.$$

Todos los eventos que consideraremos serán discretos. y en particular daremos la definición de probabilidad condicional para el caso de *eventos discretos*[6].

Definición 1. *Sea* Ω *el conjunto* $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n\}$. *Una asignación o distribución de probabilidades sobre* Ω *es una función*

$$P : \Omega \longrightarrow [0, 1]$$

que satisface

$$\sum\nolimits_{k=1}^{r} P(\omega_k) = 1$$

Definición 2. *El conjunto* E *es un evento sobre* Ω *si* E *es un subconjunto de* Ω. *Si* P *es una distribución de probabilidades sobre* Ω, *la probabilidad del evento* E, *denotada por* $P(E)$ *es*

$$P(E) = \sum_{\omega_k \in E} P(\omega_k)$$

Ejemplo 5 (Lanzar un dado). *En el caso del lanzamiento de un dado,*

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

y al no estar cargado, la distribución de probabilidades resulta

$$P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = P(6) = 1/6$$

Para el evento salió un número mayor o igual que cuatro, $E = \{4, 5, 6\}$*y* $P(E) = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$.

□

Estamos ahora, en condiciones de discutir cómo formalizar la idea de probabilidad condicional. Denotemos por E el evento en Ω que sabemos que ha ocurrido a priori. Queremos recalcular la distribución de probabilidades sobre Ω teniendo en cuenta la ocurrencia de E. Para ello necesitamos definir

$$P(\omega_k | E),$$

[6] Para el caso de eventos continuos, ver [4]

la probabilidad de ω_k *condicionada al evento* E, para $k = 1, 2, \cdots, n$. En vista de los ejemplos anteriores, dicha probabilidad condicional debería ser tal que

- si $\omega_k \notin E$ entonces $P(\omega_k|E) = 0$;
- si $\omega_k \in E$ entonces $P(\omega_k|E) = cP(\omega_k)$: esto es, sabiendo que ocurrió E, *pertenecer a* E *tiene sus ventajas.*

Por lo tanto, para obtener la probabilidad condicional, necesitamos calcular el valor de c. Como

$$1 = \sum_{\omega_k \in \Omega} P(\omega_k|E) = \sum_{\omega_k \in E} P(\omega_k|E) = c \sum_{\omega_k \in E} P(\omega_k) = cP(E).$$

Entonces,

$$c = \frac{1}{P(E)}.$$

Ejemplo 6 (Lanzar un dado-continuación). *En el ejemplo de los dados, (Ejemplo 5), si* $E = \{4, 5, 6\}$ *entonces*

$$P(E) = \frac{1}{2} \qquad y \qquad c = 2;$$

$$P(1|E) = P(2|E) = P(3|E) = 0 \qquad y$$

$$P(4|E) = \frac{P(4)}{P(E)} = \frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{3} = P(5|E) = P(6|E).$$

□

Más aún, para cada evento F de Ω, *la probabilidad condicional de* F *dado* E, $P(F|E)$ se define como

$$P(F|E) = \sum_{\omega_k \in E \cap F} P(\omega_k|E) = \frac{1}{P(E)} \sum_{\omega_k \in E \cap F} P(\omega_k) = \frac{P(E \cap F)}{P(E)}. \qquad (1)$$

Ejemplo 7. *Supongamos que tenemos dos urnas, I y II. La urna I tiene 2 bolas negras y tres bolas blancas. La urna II tiene una bola blanca y una bola negra. Se elige una urna al azar, y de ella se extrae una bola al azar también. Si consideramos el evento se extrae una bola negra (N) y el evento se elije la urna I (I), nos preguntamos cuál es la probabilidad $P(N|I)$.*

De acuerdo a la ecuación (1), se sigue que

$$P(N|I) = \frac{P(N \cap I)}{P(I)} = \frac{1/5}{1/2} = \frac{2}{5}.$$

¿Por qué $P(N \cap I) = \dfrac{1}{5}$?.

$\square$

3. Árboles directos y probabilidades condicionales.

Todos los ejemplos presentados anteriormente se pueden representar gráficamente mediante *árboles con raíz* **r**, ver Figura 1. Como los árboles crecen desde la raíz, y en esta parte de la Patagonia Argentina el viento casi siempre corre desde el Oeste, es natural pensar que los árboles crecen hacia la derecha o izquierda, dependiendo si miramos al norte o al sur.

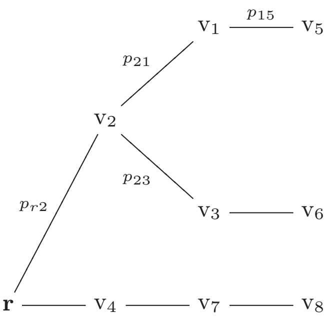

Figura 1: Árbol con raíz con vértices v_1 a v_8. Se muestras algunos pesos de las ramas de dicho árbol.

Los *vértices del árbol*, $\{\mathbf{r}, v_1, v_2, \cdots, v_8\}$ son los extremos de *las ramas del árbol*. En vista del crecimiento natural del árbol, decimos que la raíz **r** *precede (o es el padre)* de v_2 y v_4; v_2 *precede (o es el padre)* de v_1 y v_3; v_7 *precede (o* *es el padre)* de v_8, etc. Por lo tanto, todo vértice entonces, en un árbol con raíz tiene varios hijos pero un solo padre (salvo la raíz que sólo tiene hijos).

Como en la naturaleza, cada rama del árbol tiene peso propio: p_{21} en el árbol de la Figura 1 es la probabilidad que el vértice v_2 tenga como hijo a v_1, y p_{22} en el árbol de la Figura 1 es la probabilidad que el vértice v_2 tenga como hijo a v_3. La asignación de pesos a las ramas de un árbol depende de los eventos que se quieren representar.

Por último, la relación *... es padre de ...* definida en el árbol con raíz permite hablar de generaciones en el mismo: en la Figura 1 los vértices v_2 y v_4 representan la primera generación en el árbol; v_1, v_3 y v_7 es la segunda generación; v_5, v_6 y v_8 es la tercera generación. Cada generación representa uno de los eventos que queremos representar, y viceversa.

Si tenemos un árbol y una distribución de pesos asociada a él, es posible determinar el esfuerzo de recorrer *los diferentes caminos* que se pueden transitar en dicho árbol: dicho esfuerzo está determinado por la multiplicación de los pesos de todas las ramas del camino que queremos recorrer. En la Figura 1 el peso del camino que va desde la raíz hasta el vértice v_5 es $p_{r2}p_{21}p_{25}$.

En los siguientes ejemplos, construímos los árboles correspondientes a algunos de los experimentos presentados anteriormente.

Ejemplo 8 (Bolas y Urnas). *En el experimento de las bolas y urnas, el experimento es elegir una urna y luego extraer una bola. Para este experimento, la primera generación (o primer nivel) corresponde a los diferentes valores del experimento elegir una urna. El peso de cada rama de la primera generación corresponde a la distribución de probabilidades del experimento elegir una urna. La segunda generación corresponde al experimento extraer una bola de la urna, y los pesos de las ramas de la segunda generación corresponden a la distribución de probabilidades del evento extraer una bola de la urna, como lo muestra la Figura 2.*

Así, la distribución de probabilidades para el espacio muestral del experimento elegir una urna y extraer una bola $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ *se obtiene mediante la multiplicación de los pesos de las ramas que determinan los diferentes elementos de dicho espacio, y sus valores corresponden a la columna* $P(\omega)$ *en la Figura 2. De esta manera podemos calcular, haciendo uso de la ecuación (1)*

$$P(N|I) = \frac{P(N \cap I)}{P(I)} = \frac{P(\omega_2)}{1/2} = \frac{1/5}{1/2} = \frac{2}{5}.$$

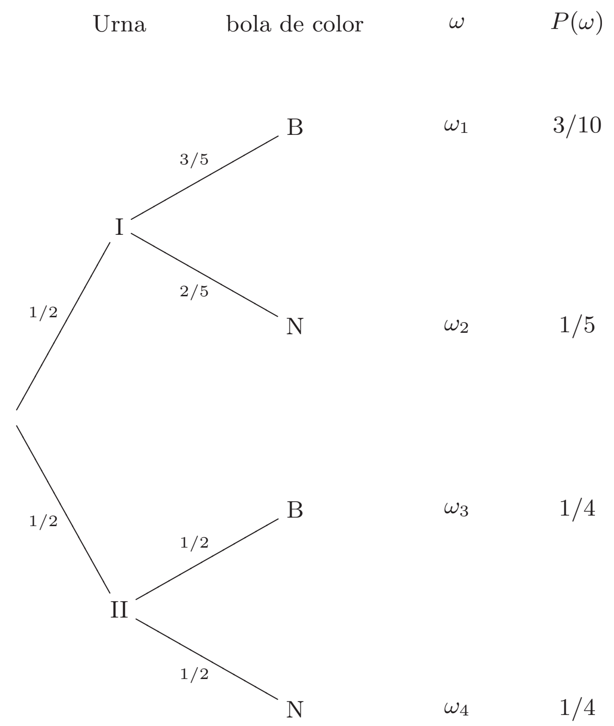

Figura 2: Árbol directo del problema de la urna. Los ω representan los elementos del espacio muestral del evento *elegir una urna y extraer una bola.*

□

Ejemplo 9. *Para el problema del mamograma, construímos el correspondiente árbol directo, como lo indica la Figura 3. Como en el caso anterior, la primera generación del árbol corresponde al evento tiene cáncer, y la segunda generación corresponde al evento resultado del mamograma. Así podemos calcular la probabilidad de que una mujer tenga un mamograma negativo sabiendo que tiene cáncer. Esto es, por la ecuación (1)*

$$P(negativo|tiene\ cáncer) = \frac{P(negativo \cap tiene\ cáncer)}{tiene\ cáncer} = \frac{P(\omega_2)}{0,008} = \frac{0,0008}{0,008} = 0,1.$$

Los pesos de las ramas entre la primera y segunda generación corresponden a

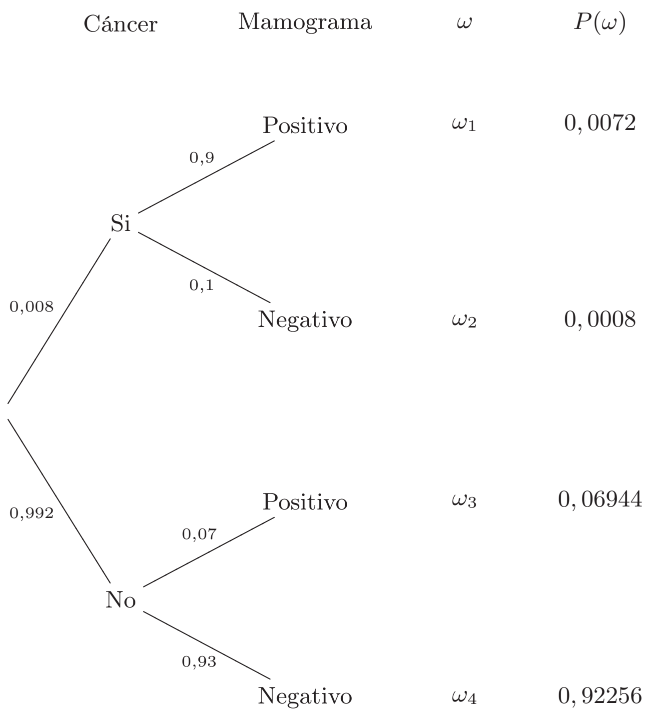

Figura 3: Árbol directo del problema del mamograma

$P(positivo|tiene\ cáncer)$, $P(negativo|tiene\ cáncer)$, $P(positivo|no\ tiene\ cáncer)$ *y* $P(negativo|no\ tiene\ cáncer)$.

□

Ejemplo 10 (El problema de los hijos). *Consideremos el siguiente problema: Asumiendo que en una familia la probabilidad que nazca un varón es 1/2, cuál es la probabilidad que una familia con dos hijos tenga dos varones, dado que tiene al menos uno?. ¿Cuál es la probabilidad que una familia tenga dos varones, dado que el primero es varón?.*

Para responder a estas preguntas construímos el árbol directo asociado al problema (ver Figura 4). La probabilidad que en la familia haya al menos un varón es 3/4 ($P(V \geq 1)$), por lo tanto la probabilidad que la familia tenga dos varones dado que al menos tiene una es, por la ecuación (1)

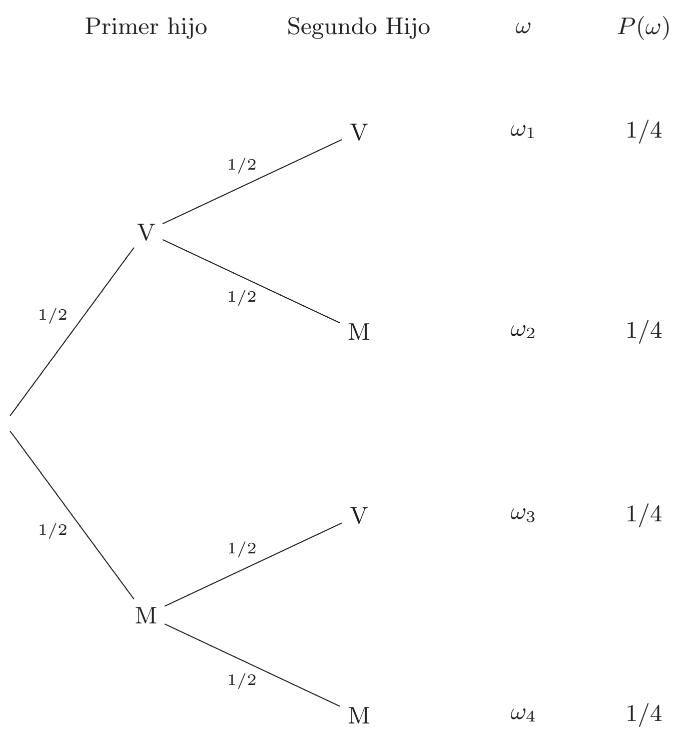

Figura 4: Árbol directo del problema familiar de los hijos.

$$P(V = 2|V \geq 1) = \frac{P(\omega_1)}{P(V \geq 1)} = \frac{1/4}{3/4} = \frac{1}{3}$$

Por otra parte, si el primer hijo es un varón, entonces la probabilidad que la familia tenga dos varones es 1/2!

$\square$

Ejemplo 11 (El problema de Monty Hall). *La Figura 5 muestra el árbol directo asociado al problema de Monty Hall. Para este caso, suponemos que el participante eligió la primera puerta. Entonces la primera generación corresponde al evento ubicación del auto (PC) y la segunda generación corresponde al evento al evento puerta elegida por el conductor (PM).*

Entonces, la probabilidad de ganar el auto manteniendo la elección resulta

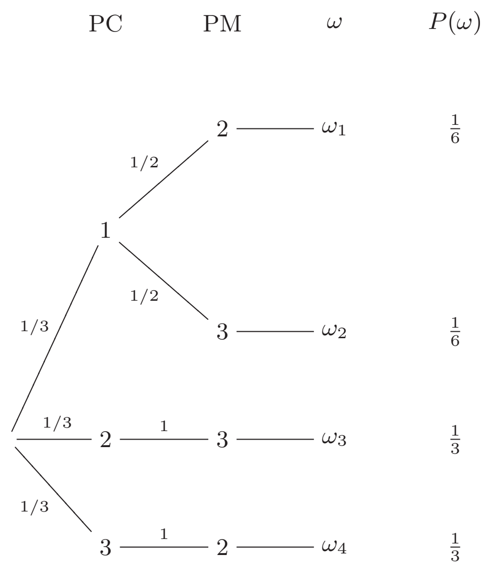

Figura 5: Árbol directo del problema de Monty Hall

$$P(\omega_1) + P(\omega_2) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

mientras que la probabilidad de ganar el auto cambiando la elección de la puerta es

$$P(\omega_3) + P(\omega_4) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

□

Problema: Obtener un árbol directo del problema de Monty Hall, teniendo en cuenta la elección del participante.

Ejemplo 12 (Problema de los puntos de Pascal). *Marcelo y Esteban están jugando en una casa de apuestas "no reconocida". El juego consiste en conseguir 5 puntos para ganar lo recaudado en las apuestas. Cada jugador tiene las mismas posibilidades de ganar, y además no hay empates. Cuando Marcelo le iba ganando 4 a 3 a Esteban irrumpe, la policía y todos tienen que dejar de jugar.*

¿Cómo debería repartirse el dinero de las apuestas recaudadas?.

Notemos que a lo sumo restaban dos partidas: una más si la ganaba Marcelo (el puntaje hubiera quedado 5 a 3), o dos partidas si Esteban ganaba la primera con lo cual quedaban 4 a 4 y la última partida determinaba el ganador de la partida. Por tanto podemos asumir que restaban dos partidas para construir el árbol correspondiente (ver Figura 6).

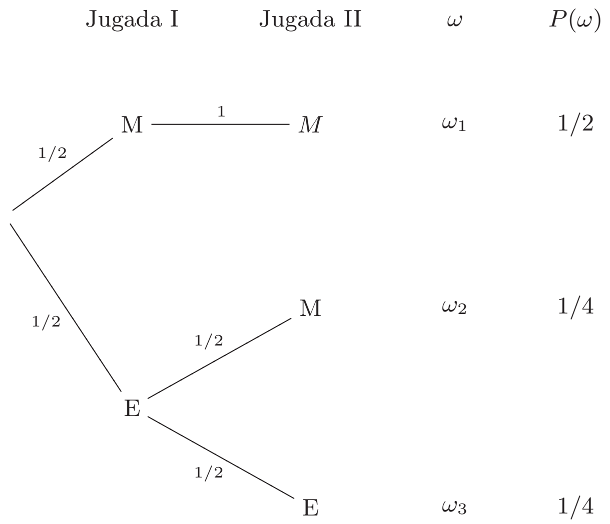

Figura 6: Árbol directo del problema del reparto justo de las apuestas

Por lo tanto, se deduce que la probabilidad que Marcelo hubiera ganado es $\dfrac{3}{4}$ *y entonces la recaudación debe hacerse de la siguiente manera: ¡tres partes para Marcelo y una parte para Esteban!.*

$\square$

4. Árboles inversos y Teorema de Bayes

Para empezar, consideraremos algunos ejemplos antes de presentar el Teorema de Bayes[7].

[7] Ver `http://en.wikipedia.org/wiki/Bayes'_theorem#Monty_Hall_problem`.

Ejemplo 13 (Mamogramas, una vez más). *En el ejemplo de los mamogramas y el cáncer de mamas, los datos nos permiten calcular las probabilidades de los resultados del mamograma sabiendo si la mujer tiene cáncer de mamas o no. Sin embargo, la pregunta del problema nos obliga a pensar en las probabilidades de tener cáncer sabiendo el resultado de los mamogramas. Esto es, a partir de* $P(\textit{positivo}|\textit{tiene cáncer})$ *calcular* $P(\textit{tiene cáncer}|\textit{positivo})$. *De acuerdo a la ecuación (1)*

$$P(\textit{tiene cáncer}|\textit{positivo}) = \frac{P(\textit{tiene cáncer } \cap \textit{positivo})}{P(\textit{positivo})}.$$

Lo que tenemos que calcular entonces, es la $P(\textit{positivo})$, *pues* $P(\textit{tiene cáncer} \cap \textit{positivo}) = P(\omega_2)$ *según la Figura 3. Ahora bien,*

$$\begin{aligned} P(\textit{positivo}) &= P(\omega_2) + P(\omega_4) \qquad (2) \\ &= P(\textit{tiene cáncer} \cap \textit{positivo}) + P(\textit{no tiene cáncer} \cap \textit{positivo}) \\ &= P(\omega_1) + P(\omega_3) \end{aligned}$$

Utilizando el árbol directo en Figura 3, tenemos que $P(\textit{positivo}) = 0,07664$. *Similarmente,* $P(\textit{negativo}) = P(\omega_2) + P(\omega_4) = 0,92336$. *Por lo tanto,*

$$P(\textit{tiene cáncer}|\textit{positivo}) = \frac{P(\omega_1)}{P(\omega_1) + P(\omega_3)} = \frac{0,0072}{0,0072 + 0,06944} \sim 0,09$$

y

$$P(\textit{tiene cáncer}|\textit{negativo}) = \frac{P(\omega_2)}{P(\omega_2) + P(\omega_4)} = \frac{0,0008}{0,0008 + 0,92256} \sim 8 \times 10^{-4}.$$

Estas probabilidades a posteriori, que al ser probabilidades condicionales, se pueden calcular mediante <u>*árboles inversos*</u>, *como lo muestra la Figura 7. Habiendo calculado los pesos de las ramas de la primera generación, y notando que el espacio muestral final es el mismo, por ende la distribución de probabilidades debe ser la misma, basta calcular los pesos de las ramas de la segunda generación, que de acuerdo al principio de la multiplicación se sigue que*

$$P(\textit{tiene cáncer}|\textit{positivo}) = \frac{0,0072}{0,07664} = 0,09$$

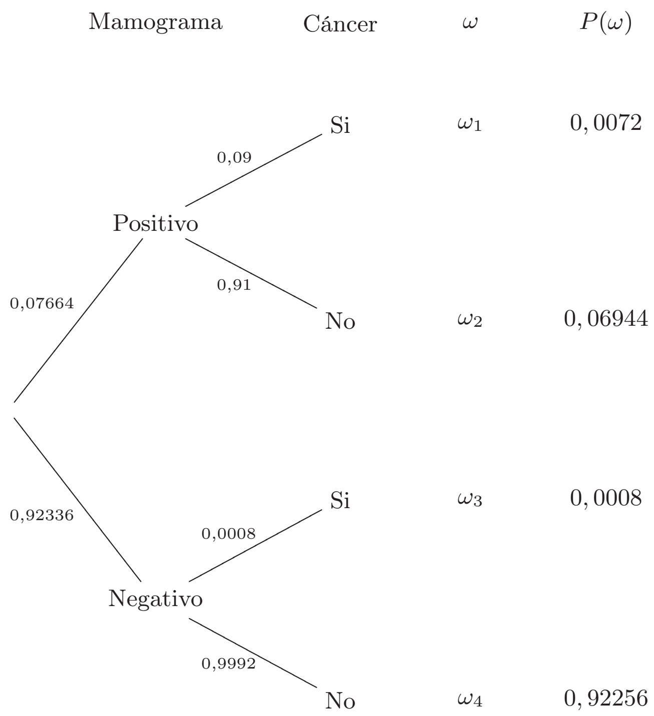

Figura 7: Árbol inverso del problema del mamograma

$$P(no\ tiene\ cáncer|positivo) = \frac{0,06944}{0,07664} = 0,91$$

y

$$P(tiene\ cáncer|negativo) = \frac{0,0008}{0,07664} = 0,0008$$

$$P(no\ tiene\ cáncer|negativo) = \frac{0,06944}{0,07664} = 0,9992.$$

□

Sugerencia de actividad en el aula: Una pregunta interesante relacionada con el problema de los mamogramas es la siguiente:

cómo debería cambiar la probabilidad de que una mujer tenga cáncer de mamas para que el mamograma deje de ser útil, esto es que la probabilidad de tener cáncer teniendo un mamograma positivo sea 1/2?.

Dado que la respuesta requiere probar con distintos valores numéricos, este problema genera en los alumnos la necesidad real de utilizar planillas de cálculo para poder hacer las cuentas rápidamente. Más aún, una vez que hayan determinado este valor se les puede pedir graficar la relación que existe entre la probabilidad que una mujer obtenga cáncer de mamas y la probabilidad condicional de tener cáncer de mamas dado que el mamograma dio positivo. Y a partir de este gráfico se puede preguntar si es posible encontrar alguna expresión funcional entre estos dos parámetros. De esta manera inducimos a nuestros alumnos a utilizar herramientas informáticas, gráficas y de análisis de datos (regresión y correlación).

Ejemplo 14 (Urnas y bolas nuevamente). *Si ahora queremos calcular $P(I|N)$, esto es la probabilidad de haber elegido la urna I dado que extrajimos una bola negra, usamos la ecuación (1)*

$$P(I|N) = \frac{P(I \cap N)}{P(N)}.$$

Como antes, utilizamos el árbol directo correspondiente (ver Figura 2) para calcular

$$P(N) = P(I \cap N) + P(II \cap N) = \frac{1}{2}\frac{2}{5} + \frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{9}{20}$$

Como $P(I \cap N) = 1/5$, entonces

$$P(I|N) = \frac{1/5}{9/20} = 4/9.$$

□

Estos ejemplos tienen una particularidad que la podemos representar de manera abstracta de la siguiente manera: si E y F dos eventos tal que evento tal que $P(F) > 0$, entonces

$$P(F|E) = \frac{P(F \cap E)}{P(E \cap F) + P(E \cap F^c)}$$

donde F^c denota el evento *que no ocurra* F. Aplicando nuevamente la ecuación (1) obtenemos

$$P(F|E) = \frac{P(F \cap E)}{P(E|F)P(F) + P(E|F^c)P(F^c)}. \tag{3}$$

Problema: Traducir todas la probabilidades a posteriori de los ejemplos anteriores, en términos de la ecuación (3.)

La ecuación (3) es la forma más simple del Teorema de Bayes, cuya generalización se puede encontrar en [4]. Este resultado se puede representar a través de *árboles inversos de probabilidades*, donde se pueden calcular las probabilidades a posteriori como se muestran en las Figuras 8 y 7.

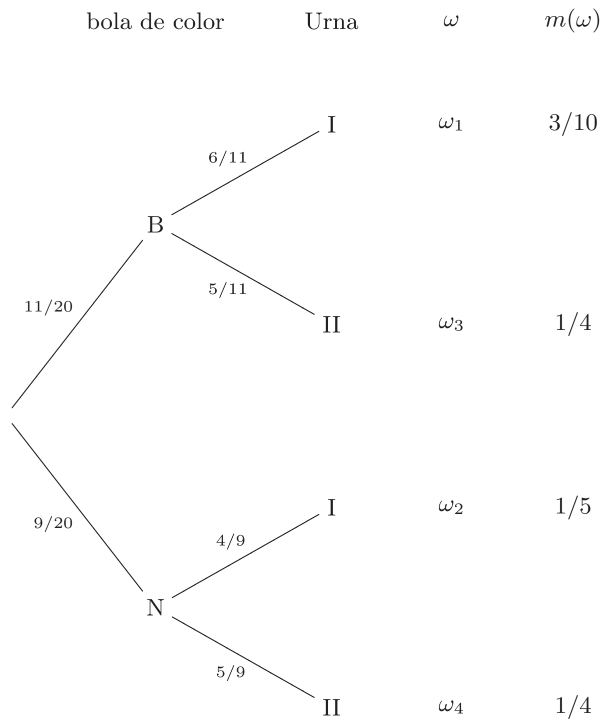

Figura 8: Árbol inverso del problema de la urna

El último ejemplo de uno de los capítulos de la serie Numb3rs, donde Charly, el matemático, utiliza el Teorema de Bayes para resolver el crimen.

Ejemplo 15 (Mutantes diabólicos). *Una nueva generación de mutantes diabólicos está acechando la tierra. Un grupo de científicos ha estimado que la mutación genética que lleva a tener conductas diabólicas a los seres humanos afecta al 0,05 % de la población. Un médico ofrece al gobierno un test revolucionario que tiene un 99 % de efectividad. Se puede asumir entonces que para el 1 % de la población, el test es incorrecto cualquiera sea su resultado. Sin embargo Charly tiene sus dudas sobre el test. ¿Debería el gobierno comprar el invento?*

El árbol directo del problema de los mutantes diabólicos[8] *se presenta en la Figura 9.*

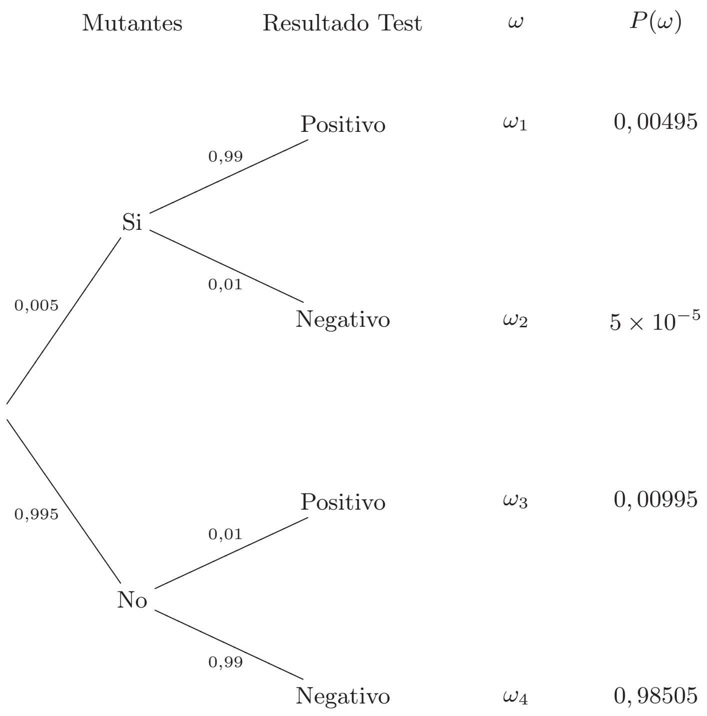

Figura 9: Árbol directo del problema de los mutantes diabólicos.

Veamos ahora por qué Charly tuvo reparos en la precisión del test. Como no sabemos a priori si una persona tiene el gen diabólico, nos interesa calcular la

[8] Un buen complemento para las ideas matemáticas que subyacen a la serie Numb3rs se puede encontrar en `http://www.math.cornell.edu/ñumb3rs/`.

probabilidad que una persona tenga el gen mutante dado que el test dio positivo, o sea necesitamos las probabilidades a posteriori. Así, de acuerdo a la Figura 9

$$P(Mutante|+) = \frac{P(\omega_1)}{P(\omega_1) + P(\omega_3)} \sim 0,33$$

mientras que

$$P(Mutante|-) = \frac{P(\omega_4)}{P(\omega_2) + P(\omega_4)} \sim 0,9999$$

O sea, ***¡999 de cada 1000 personas tienen el gen mutante de acuerdo a este test!****.*

□

5. Problemas

La selección de estos problemas tiene como propósito utilizar las ecuaciones (1) y (3) en diferentes contextos. Es importante resaltar que la mayoría de ellos pueden ser representados a través de árboles con raíz que tienen un valor didáctico fundamental al momento de ordenar las ideas relacionadas con las probabilidades condicionales.

1. Una moneda es lanzada tres veces. Cuál es la probabilidad que exactamente *salgan dos caras* dado que

   a) haya salido una cara en el primer tiro?
   b) haya salido una seca en el primer tiro?
   c) hayan salido dos caras en los dos primeros tiros?
   d) hayan salido dos secas en los dos primeros tiros?

2. Consideremos que existen tres candidatos A, B y C para intendente. Asumamos que A y B tienen las mismas chances de ganar y que C tiene la mitad de chances de ganar que B. Entonces, la probabilidad que A gane $P(\mathrm{A}) = 2/5$, la probabilidad que B gane es $P(\mathrm{B}) = 2/5$ y la probabilidad de que C gane es $P(\mathrm{C}) = 1/5$. Supongamos que antes de las elecciones el candidato A se baja de su candidatura. ¿Cuáles son las chances de ganar de los candidatos restantes?

3. Un dado es lanzado dos veces. Cuál es la probabilidad de que *la suma de las caras sea mayor que siete*, dado que

    a) el primer lanzamiento haya sido un cuatro?

    b) el primer lanzamiento haya sido mayor que tres?

    c) el primer lanzamiento haya sido un 1?

    d) el primer lanzamiento haya sido menor que cinco?

4. Un doctor asume que un paciente puede tener one de las tres enfermedades e_1, e_2 y e_3. Antes de cualquier test él asume que las tres enfermedades tienen la misma chance de ocurrencia. El médico lleva a cabo un test que será positivo con una probabilidad 0,8 si el paciente tiene la enfermedad e_1, 0,6 si el paciente tiene la enfermedad e_2 y 0,4 si el paciente tiene la enfermedad e_3. Dado que el resultado del test es positivo, qué probabilidades debe asignar el doctor a cada enfermedad?

5. Determinar cuál es la probabilidad de que al lanzar 4 dados, 2 o más de ellos muestren el mismo número de puntos.

6. Una moneda en una colección de 65 tiene dos caras mientras que las restantes no están cargadas. Si una moneda es elegida al azar y es lanzada aparecen hasta 6 caras seguidas, cuál es la probabilidad que haya sido la moneda cargada.

7. En Londres llueva la mitad de los días. El pronóstico oficial es correcto los 2/3 de las veces, i.e, la probabilidad que llueve dado que se pronosticó lluvia, y la probabilidad que no llueva dado que no se pronosticó lluvia es 2/3. Cuando se pronostica lluvia, el señor Pickwick sale con su paraguas. Cuando no se pronostica lluvia, sale con el paraguas con una probabilidad de 1/3. Encontrar

    a) la probabilidad que Pickwick haya salido sin paraguas dado que ha llovido.

    b) la probabilidad que Pickwick haya salido con paraguas, dado que no ha llovido.

8. Supongamos que se tienen 25 bolas negras, 25 bolas blancas y dos urnas. Asumiendo que la elección de urnas y de bolas es aleatoria, cómo se deben

distribuir las bolas entre las dos urnas para maximizar la probabilidad de extraer una bola negra. No existe restricción alguna sobre la cantidad de bolas que pueden ir en cada urna.

9. Luxco, una empresa que fabrica lámparas tiene dos distribuidoras. La distribuidora A vende las lámparas en lotes de 1000 lámparas comunes y 2000 de bajo consumo. Muestreos aleatorios han demostrado que *en promedio* puede haber 2 lámparas comunes defectuosas y 11 lámparas de bajo consumo defectuosas por lote. La distribuidora B vende lotes de 2000 lámparas comunes y 1000 lámparas de bajo consumo. Muestreos aleatorios han mostrado que hay en promedio 5 lámparas comunes defectuosas y 6 lámparas de bajo consumo defectuosas.

   El gerente de la distribuidora A dice "Somos los mejores pues nuestros porcentajes de lámparas defectuosas son 0,2 y 0,55 comparados con 0,25 y 0,6 de la otra distribuidora. Los superamos en 0,05 % en calidad en ambas clases de lámparas."

   El gerente de la otra distribuidora dice "Todo lo contrario, cada uno de nuestros lotes contienen 11 lámparas defectuosas mientras que los lotes de la distribuidora A tienen 13. Por lo tanto nuestro porcentaje de lámparas defectuosas es 0,37 % contra el 0,43 % de la otra distribuidora".

   ¿Quién tiene razón?

6. Conclusiones

La enseñanza de probabilidades en la escuela se hace cada vez más necesaria, especialmente hoy en donde la cantidad de información disponible es muy grande y es absolutamente necesario desarrollar habilidades para poder *procesar tantos datos*. Más aún, muchos de los procesos o fenómenos cotidianos se pueden idealizar a través de procesos estocásticos (cadenas de Markov, movimiento browniano, etc.). Es así que se hace necesario introducir estos conceptos en la enseñanza de la matemática preuniversitaria. Ahora bien, ¿cómo se hace?. La noción de probabilidad condicional es una idea fundamental en la teoría de probabilidades y puede ser explotada en la escuela pues se relaciona con *la capacidad de contar sin contar*. Si se observa con detenimiento cómo se construyen los árboles directos asociados al cálculo de probabilidades condicionales, se puede concluir que dichos diagramas son una imagen especular de la representación de problemas tales como

¿De cuántas maneras me puedo vestir hoy, si tengo tres pantalones, cinco camisas y cuatro chalecos para elegir?

En otras palabras, esta forma de representar problemas combinatorios que se utiliza o se puede introducir desde el segundo ciclo de la escuela primaria, sirve como un nexo importante al momento de relacionar verticalmente los distintos niveles de la escuela. Este artículo no es una presentación formal del Teorema de Bayes, como se pueden encontrar en [4, 3] ni tampoco una sucesión exhaustiva de actividades de transferencia directa en el aula como [2, 5]. Es sólo un conjunto de ideas y problemas que sirven como motivadores para poder acercar ideas fundamentales en la teoría de probabilidades de manera natural y que pueden ser usadas en la escuela secundaria, y que se inspiró en artículos de divulgación [1, 6], y en la experiencia en el oficio de ensenãr.

7. Agradecimientos

Quiero expresar mi profundo agradecimiento a Pablo Rodriguez por sus valiosos comentarios. Este trabajo fue subsidiado en parte por el Proyecto Picto-Educación 2005 N° 36467 de la ANPCyT.

Referencias

[1] Alvarez, H. *Una aplicación del teorema de Bayes* Revista de Educación Matemática (REM), Vol. 14 N° 3 pags:19-25, ISSN: 0326-8780

[2] Bressan,A.P., Bressan, O. *Probabilidad y estadística: cómo trabajar con niños y jóvenes* Ed. Novedades Educativas, 2008

[3] Durret, R. *Probability: theory and examples*, Cambridge U. Press. 2010.

[4] Grinstead, C., Snell, J.L. *Introduction to Probability* Acceso libre

http://www.dartmouth.edu/chance/teaching_aids/books_articles/ /probability_book/pdf.html

[5] Packel, E. *Las matemáticas de los juegos de apuestas* Ed. La tortuga de Aquiles 1995

[6] Strogatz, S. *Chances are* Acceso libre http://opinionator.blogs.nytimes.com/ /2010/04/25/chances-are/

[7] Santaló, L. *Matemática para no matemáticos* en Didáctica de las matemáticas: aportes y reflexiones, Parra, C. y Saiz, I. (comp.) Ed. Paidós, 2008

Departamento de Matemática, Facultad de Ingeniería. Universidad Nacional de la Patagonia San Juan Bosco.
Ciudad Universitaria, Km 4 - Comodoro Rivadavia (9000) Chubut-Argentina.
TE=+54-297-4550836
gsoto@ing.unp.edu.ar