Reflexiones sobre la práctica docente en la enseñanza del Análisis Matemático en carreras de Ingeniería

Braccialarghe, D., Cattaneo, L., Emmanuel, D., González, M.I., Introcaso, B.
Departamento de Matemática (Escuela de Formación Básica), Facultad de Cs. Exactas, Ing. y Agrim. (UNR)

1. Introducción

Trabajos de investigación sobre Matemática Educativa, procesos de evaluación y acreditación de carreras de Ingeniería, ponen en evidencia el fracaso de los estudiantes en los cursos de primer año de la Universidad en estas carreras. Esta problemática, hoy ampliamente documentada, ha sido objeto en los últimos años de diversos estudios que buscan caracterizar sus causas con el propósito de generar alternativas que logren mejorar esta situación. Se conoce que el trabajo en los primeros cursos se torna difícil por múltiples factores: sociales, educativos, políticos; que pueden influir en forma directa en los fracasos de los alumnos, el desaliento de los docentes y directivos, las idas y vueltas en la construcción de los diseños curriculares. Es más, los problemas de articulación entre el nivel medio y el superior: el primero sujeto- hasta ahora- a una Ley de Educación que suprime la enseñanza de la Matemática en el último curso, y el segundo sujeto a la necesidad de lograr ciertos niveles de conocimientos que desconocen el nivel de ingreso de los alumnos; constituyen un escollo que agudiza la situación antes descrita y se tornan en un obstáculo de no fácil superación.

En este marco, un análisis sobre los programas analíticos de las asignaturas correspondientes a la Formación Básica en Matemática en carreras de Ingeniería pone en evidencia que nuestra Facultad pretende un alumno que, en el plano cognitivo logre, entre otras cuestiones:

- ✓ un pensamiento reflexivo,
- ✓ desarrollar la capacidad de razonar, conocer, comprender y aplicar los conocimientos desarrollados,
- ✓ plantear y resolver problemas, interpretar el significado de las soluciones compatibles con la realidad.

Sin embargo, parece que en la práctica docente se desconocen los mismos y se promueven los cálculos y los procesos repetitivos haciendo que la distancia entre lo planificado y lo que realmente se logra sea importante. Más aún, generando separación entre el campo conceptual y el algorítmico, desjerarquizando el primero y ponderando el segundo. En el aula las propuestas surgen atendiendo sólo a los contenidos y desatendiendo las competencias. Los objetivos enunciados en las planificaciones parecen imposibles de llevarse a cabo en el marco de la necesidad de abordar contenidos y más contenidos. La tarea del docente se transformar en una tarea de información ajena a la formación matemática que requiere un alumno de ese nivel. El profesor "informa", el alumno "recibe" y el proceso constructivo se ignora. Paulo Freire (1997) al respecto expresa: "*La educación padece de la enfermedad de la narración que convierte a los alumnos en contenedores que deben ser llenados por el profesor, y cuanto mayor sea la docilidad del receptáculo para ser llenado, mejores alumnos serán*".

Nuestro interés en esta comunicación - realizada en el marco del proyecto trianual, iniciado en este año y radicado en la UNR: *La significación de los contenidos conceptuales en la enseñanza y aprendizaje del Cálculo en las carreras de Ingeniería y Agrimensura* - es reflexionar sobre nuestra actual práctica docente. Estamos convencidas de que un buen manejo de los contenidos conceptuales constituye un medio de superación de las dificultades planteadas en el aprendizaje pero también estamos convencidas de que nada va a cambiar sustancialmente sin cambios de las teorías implícitas de los integrantes de la comunidad universitaria. Sólo a partir de que cada uno de los diferentes actores institucionales reflexione sobre sus propias acciones y teorías para posibilitar el proceso de conversión de sus representaciones en conocimientos, en objetos de análisis y reflexión que abran la posibilidad de cambio de las teorías implícitas, las diferentes concepciones podrán conjugarse para llegar a una perspectiva que las contemple y en la que se resignifiquen los aspectos positivos de cada una de ellas en un entramado único, núcleo de una nueva concepción.

Teniendo en cuenta la complejidad de los contextos en los que los docentes desenvuelven su acción, es natural que se construyan diversos supuestos respecto de la práctica docente. Según Bourdieu (1997), el hecho de que la docencia es una actividad colectiva hace que en el interior de cada unidad académica se configuren habitus o conjuntos de principios generadores de prácticas distintas y distintivas que también son esquemas clasificatorios, principios de clasificación, principios de visión y de división, aficiones diferentes que establecen diferencias entre lo que es bueno y malo, entre lo que está bien y lo que está mal, entre lo que es distinguido y lo que es vulgar, etc".

2. Algunos trabajos sobre Didáctica del Análisis.

Para comenzar el trabajo indagamos sobre el estado actual de conocimientos acerca de la enseñanza y el aprendizaje del Análisis Matemático. Buscamos entonces estudios realizados hasta el momento y encontramos que la bibliografía existente es sumamente variada y muy rica. Los aportes se refieren en general al Análisis de una variable pero abarcan tanto cuestiones del Análisis en general como de los distintos núcleos conceptuales: función, límite, continuidad, derivada, integral. Según Azcárate y Machín (2003) el interés por estos temas surgió en los años noventa por la tendencia en la Didáctica de la Matemática a considerar la problemática del aprendizaje de la Matemática en términos de procesos congnitivos y ya no como simple adquisisción de competencias y de habilidades. En particular, son numerosos los trabajos que abordan el tema de las dificultades que los estudiantes universitarios tienen en esta área; planteándose, en algunos casos, estrategias superadoras.

Citamos algunos como material referencial, indicando aspectos relevantes.

* Rosa María Farfán Marquez (2005), en el Capítulo 7: Lenguaje algebraico y pensamiento funcional, de Cantoral et al. (2005) (en colaboración con Marcela Ferrari y Gustavo Martínez) plantea cómo los objetivos inmersos en el campo conceptual del Análisis son particularmente complejos en el nivel inicial del aprendizaje del Cálculo. La hipótesis central, desde un análisis socioepistemológico a profundidad como el que se desarrolla en Farfán (1997) consiste en asumir que previo al estudio del Cálculo se precisa la adquisición de un lenguaje gráfico que posibilite, esencialmente, la transferencia de campos conceptuales virtualmente ajenos, a causa de las enseñanzas tradicionales, estableciendo un isomorfismo operativo entre el álgebra básica y el estudio de curvas, mejor aún, entre el lenguaje algebraico y el lenguaje gráfico.
* Ismenia Guzmán R. (Universidad Católica de Valparaíso) (1998) considera como referencia el enfoque cognitivo basado en los registros de representación semiótica y su incidencia en el aprendizaje de nociones matemáticas, en particular algunas propiedades de funciones. Este enfoque ha sido desarrollado por Raymond Duval y se apoya en la noción semiótica de registro. Se consideraron registros gráfico, algebraico (o formal) y lengua natural con los estudiantes de primer año de ingeniería, respecto a nociones relativas a funciones reales y el sentido que estas nociones cobran para ellos. Un análisis de las respuestas de los estudiantes revela que están dadas en un solo registro, sin coordinar explícitamente dos o más. Las respuestas se quedan en el registro en el cual está planteada la pregunta, o recurren al registro algebraico, con frecuencia privilegiado en las clases.
* Michèle Artigue (1995) en el Capítulo 6: "La enseñanza de los principios del Cálculo: problemas epistemológicos, congnitivos y didácticos" de Artigue et al. (1998) sintetiza los principales resultados obtenidos por investigaciones didácticas promovidas por los obstáculos que encuentran los estudiantes al iniciarse en el campo conceptual del Análisis y expresa sus conclusiones. Algunas de esas dificultades están ligadas a la noción de límite, a lo geométrico, a los recursos informáticos, a aproximaciones intuitivas, a la transposición didáctica, etc.
* Ricardo Cantoral (2005) hace una revisión parcial del estado actual de la investigación en didáctica del Análisis. Reflexiona sobre la enseñanza del Análisis Matemático, concebida de diferentes maneras según las épocas, los países, los niveles educativos, los sistemas escolares. Ejemplifica sus argumentos a partir de la noción de curva, la de límite, la de derivada y la de función. Diferencia, a pesar de la diversidad escrita existente, elementos comunes que conjugan

diferentes visiones respecto de la enseñanza del Análisis y distingue tres alternativas: la de asumir el análisis escolar como un aparato simbólico que opera sobre variables, que se ocupa de su optimización, de sus derivadas e integrales; la que lo piensa como un aparato formal que actúa sobre funciones reales, que centra su atención en procesos infinitos y en las situaciones límite; y la que entiende el Análisis como un terreno para la experimentación que puede sacar provecho de la tecnología avanzada, trabaja sobre el reconocimiento de patrones, el empleo de estimaciones y aproximaciones y se nutre fuertemente de la visualización.

- María del Mar Moreno Moreno *Departament de Matemàtica (UdL*) (2005) Plantea, a partir del conocimiento de las reformas de la enseñanza del Cálculo en los diferentes países de la renovación de los programas de la utilización sistemática de la tecnología de la formación didáctica y científica de los futuros docentes, de las numerosas y frecuentes experiencias puestas en marcha por grupos de trabajo, profesores universitarios interesados y preocupados por la calidad y eficacia de su docencia, su preocupación por la resistencia al cambio. Se pregunta: ¿Dónde radica la dificultad de la enseñanza de aplicaciones y de modelos de situaciones próximas a la realidad? ¿Qué pueden aportar las investigaciones de didáctica de las matemáticas al proceso de enseñanza y aprendizaje en el ámbito universitario? Reflexiona acerca de la situación actual de la enseñanza del cálculo en la universidad, y hace una justificación de la necesidad e importancia de las investigaciones didácticas en el ámbito del conocimiento del profesor, como motor del proceso de enseñanza y aprendizaje.
- Matías Camacho Machín (2005) *Universidad de La Laguna* muestra las bases fundamentales de dos secuencias para la enseñanza y aprendizaje de dos conceptos importantes del Análisis Matemático haciendo un diferente uso de los CAS *Derive* y *Maple V*. La primera para el concepto de integral definida, basada principalmente en un trabajo amplio de laboratorio y la otra secuencia, más teórica, en la que el papel del CAS es esencialmente diferente a la primera.
- Laura García Quiroga, Rosa Vázquez Cedeño, Moisés Hinojosa Rivera (2004) estudian las dificultades en el aprendizaje del concepto de función en estudiantes de Ingeniería. Encuentran que las mayores dificultades yacen en las tareas de pasaje entre registros semióticos del concepto de función, particularmente en el pasaje del registro gráfico al algebraico. Sugieren - para la superación de estas dificultades - emplear más intensamente el registro gráfico, e incluir actividades de transferencia entre registros.
- Carmen Azcárate Giménez y Matías Camacho Machín (2003) exponen las principales características del pensamiento matemático avanzado en el cual se enmarcan una gran parte de las investigaciones en Didáctica del Análisis. Muestran aportes de la investigación en este campo, analizan el papel de las definiciones en la Matemática Avanzada y exhiben la necesidad de crear situaciones didácticas en las que las definiciones sean imprescincibles para superarlas. Muestran también aportes en la línea de investigación referida a las creencias y concepciones del profesor en la enseñanza y el aprendizaje de conceptos del Cálculo.

En todos los trabajos se percibe que hay razones suficientes para plantear y sugerir un cambio de metodología donde el alumno sea autor de su aprendizaje para obtener un mejor rendimiento académico. Las distintas bibliografías coinciden en adherir a la valorización de los contenidos conceptuales y ponderan el buen manejo de los mismos como herramienta útil a la hora de resolver problemas (sin dejar de reconocer las dificultades que esto supone)

3. El concepto de derivada

3.1 Un análisis de la presentación del concepto de derivada en diferentes textos universitarios.

En esta primera etapa del proyecto centramos nuestra atención en la enseñanza del concepto de derivada. Una realidad conocida por todos es la forma en que el docente universitario aborda, habitualmente, la enseñanza de este concepto: enuncia la definición, propone un ejemplo de

aplicación de la misma y enfrenta al alumno con el cálculo de derivadas utilizando la definición, lo que no deja de ser más que un ejercicio algorítmico de límite con muy poco de motivación y mucho de mecanicismo. La clase magistral sigue siendo el soporte de la enseñanza en nuestras facultades y ni siquiera la utilización de textos en el aula han podido reemplazarla. Más aún, en general, los textos presentan hoy introducciones del concepto de derivada que intentan que el alumno lo comprenda (más adelante hacemos un análisis de textos que corrobora lo dicho). A pesar de ello, más de una vez estas introducciones son salteadas por, al decir de los docentes, cuestiones de tiempo, de masificación, de desmotivación de los estudiantes o bien, son expuestas por el docente sin permitir que el alumno comience a ser partícipe en la construcción del concepto desconociéndose la importancia que estas introducciones poseen como medio motivación, de construcción del conocimiento y de “ahorro" de tiempo a posteriori.
En el caso que nos ocupa, el concepto de derivada, los resultados son indiscutibles: la aplicación del mismo como herramienta para resolver problemas termina siendo mecánica: "si dice marginal derivo"; "si dice velocidad derivo", “si dice aceleración derivo dos veces”,..., recordándonos a las preguntas “¿es de más?”, “¿es de menos?”, “¿es de por?” en el caso del aprendizaje de Matemática en los primeros niveles de la Educación.
En nuestro intento de buscar formas alternativas para que el concepto de derivada sea construido por el alumno de manera tal que el mismo surja como variación de cambio de una magnitud respecto de otra en un instante, observamos que nuestros argumentos no diferían en demasía de los planteados en los libros que hoy se utilizan en la Facultad. Por ello, un primer análisis para este trabajo consiste en indagar el tratamiento del tema en diferentes textos que de manera habitual aparecen en la bibliografía de Análisis Matemático I o de Análisis Matemático II o bien como textos guía o bien como textos de profundización de contenidos. Describimos a continuación en de forma muy breve, lo que observamos en los textos que indicamos.

- ✓ **Bers Lipman (1969) *Calculus* Librery of Congress USA**. Se realiza la introducción histórica de derivada como pendiente de la recta tangente a la gráfica de una función en un punto. Además de esta aplicación geométrica se muestra la aplicación física pero el texto no presenta otro tipo de aplicación.
- ✓ **Courant-John. (1971*) Introducción al Cálculo y al Análisis Matemático*. Ed. Limusa México**. El cociente de incrementos surge como pendiente de rectas secantes y la única interpretación de la derivada es la geométrica.
- ✓ **Karel de Leew (1972) *Calculus* Editorial Universitaria de Buenos Aires**. Se inicia el capitulo de derivada en el problema geométrico de definir la recta tangente a una curva. (Párrafo 2.1). Se continúa con el problema de la física: la velocidad. (párrafo 2.2) A partir de estos problemas se define derivada de una función (párrafo 2.3) e inmediatamente, como un párrafo más (párrafo 2.4) se presenta el concepto de tasa de variación como fundamental en todas las disciplinas científicas en una importante propuesta de problemas al respecto (a pesar de que todavía no se introdujo el álgebra de derivadas
- ✓ **Rabuffetti, Hebe "*Introducción al Análisis Matemático*" (1972) de, Editorial el Ateneo, Buenos Aires**. Se presenta la definición después de una muy corta introducción donde solo se comenta que: " Para introducir dicho concepto se recurre generalmente a dos problemas: uno físico y el otro geométrico. El primero es el cálculo de la velocidad instantánea de un móvil y el segundo la definición de la recta tangente a la curva". Al finalizar el capítulo se exhiben ambas aplicaciones (Geométrica y Física). No se muestra otra posibilidad de aplicación de la derivada.
- ✓ **Larson, R – Hostetler, R – Edwards, B (1995) “*Cálculo y Geometría Analítica*”– Editorial McGraw-Hill**. Enumera inicialmente los problemas históricos relacionados al concepto de derivada y se aboca al problema de hallar la recta tangente (problema que ya había sido presentado en el capítulo anterior correspondiente a *Límites y sus propiedades*), sin presentar ninguna situación motivadora. Queda así expuesto el concepto de derivada en torno al cálculo de pendientes. En la sección segunda se ocupan de las aplicaciones físicas de la misma: velocidad, aceleración y otras razones de cambio. Luego se procede a la enumeración y demostración de reglas de derivación, aspecto solamente procedimental del tema. Por último, en la séptima y

última sección, se expone una adecuada cantidad de situaciones problemáticas diversas en donde la derivada aparece como una razón de cambio instantáneo (razones relacionadas).

- ✓ **Stewart, James "*Cálculo*" (1999) – International Thomson Editores.** El Capítulo 2 del texto se denomina: Límites y derivadas. Se inicia con el problema de la tangente y el de la velocidad instantánea y se muestra la íntima relación existente entre los mismos. La palabra límite es utilizada de manera natural en esta instancia para luego darse una idea intuitiva de dicho concepto. Con esta idea al finalizar el capítulo se retoman las ideas de tangentes, velocidades y otras razones de cambio definiéndolas con precisión a partir de la noción de límite. La noción de derivada no es más que dar nombre a una idea muy trabajada y con significado en distintos contextos.
- ✓ **Thomas, George "*Cálculo*" *Una variable* (2006) Ed. Pearson.** Las razones de cambio se introducen de manera significativa en el capítulo: Límite y Continuidad (capítulo previo al de Derivada). En la primera sección de este capítulo se abordan los conceptos de razones de cambio promedio e instantánea para introducir, a partir de las mismas, la idea intuitiva de límite. Se interpretan dichas razones geométricamente como pendiente de rectas. A partir de un ejemplo de crecimiento poblacional, buscando el crecimiento ya no en un intervalo sino en un día conecta las razones de cambio promedio en intervalos con la interpretación geométrica (pendiente de rectas secantes). De esta manera, muestra de manera intuitiva que las razones instantáneas y las pendientes de las rectas tangentes son conceptos íntimamente relacionados. Recién hecho esto introduce la noción intuitiva de límite. Dentro del mismo capítulo de Límite y Continuidad se define en el párrafo final el concepto de recta tangente. En el capítulo de Derivada ésta se define sin ninguna introducción ya que el límite planteado ha cobrado significado en el capítulo anterior.

Hemos ordenado los textos según el año de edición. Esto nos muestra como fue evolucionando la forma de abordar el tema a través de los años, notándose en las ediciones más actualizadas una preocupación de los autores por lograr la construcción del concepto a partir del análisis de diferentes significados que puede mostrar el mismo según el contexto. Sin embargo, esa modificación de los textos no contribuyó a modificar la situación ya que no ha logrado pasar a los docentes. Efectivamente, este es un camino más lento ya que implica el cambio de supuestos muy arraigadas en el pensamiento de los mismos donde suelen distinguirse los aspectos conscientes de los implícitos, que no constituyen pensamientos articulados que el profesor esté en condiciones de verbalizar. Sin embargo, esta no es una tarea simple, acceder al pensamiento de los profesores en relación con las concepciones sobre la enseñanza de este tema requerirá aproximarnos al conocimiento implícito, a las creencias, valores y teorías de los profesores y esto es una parte de nuestro proyecto de investigación en vía de estudio. Lo que si somos conscientes que si el cambio se encuentra solo en los textos es muy fácil que el docente "saltee" las partes del texto que implique una modificación de su quehacer habitual. Consideramos que la posibilidad de cambiar la enseñanza sin cambiar las creencias que en ésta subyacen es difícil, pues sin conciencia de las razones que alientan la práctica docente es complejo modificar aspectos de la misma con el fin de mejorarla. De esta manera, se hace necesario conocer las concepciones que sobre la enseñanza y el aprendizaje del Cálculo poseen docentes, alumnos y graduados; parte importante de nuestro proyecto que está en los comienzos de su estudio.
La lectura minuciosa de los últimos textos de Cálculo y el conocimiento del uso que más de un docente hace de los mismos, salteando las partes que permitirían comprender el concepto; obviando las partes de trabajo de construcción del concepto por parte del alumno, permite inferir que estamos ante una situación que da lugar a más de una pregunta. ¿Por qué utilizamos un texto buscando en él solo lo que estamos acostumbrados a dar o aquello que nos enseñaron?; ¿por qué cuesta adaptarnos a formas novedosas de enseñanza?; ¿por qué hay interés en entender cómo evoluciona el proceso de construcción del conocimiento pero esto no se traduce en el aula?; ¿por qué no intentamos transformar el conocimiento científico en conocimiento que los alumnos puedan aprehender a partir de su accionar con situaciones o problemas?; ¿ por qué "contamos" los conceptos sin permitir proceso alguno de elaboración por parte del alumno?; ¿ por que..., por qué,...?

La lista de los por qué puede ampliarse, y también conocemos las respuestas que, generalmente los docentes damos a los mismos y que tienen como protagonistas a las palabras masificación, falta de tiempo, falta de conocimientos previos, y un sinnúmero de dificultades relacionadas con lo social o lo escolar pero que pocas veces incluyen al proceso mismo de enseñanza.

3.2. Una experiencia áulica

En el año 2003 presentamos (Cattáneo, González, Introcaso) una propuesta sobre la enseñanza de la derivada y los motivos que nos llevan a buscar y enfoques superadores. En dicho trabajo hicimos un análisis de las dificultades que presentan los alumnos en la comprensión del concepto de derivada, y presentamos algunas estrategias para intentar salvarlas. Dentro de estas estrategias nos detuvimos en la utilización de la herramienta computacional y mostramos que permite visualizar dinámicamente cuestiones que no son fáciles de dibujar en la pizarra ni de imaginar. Nos centramos en una metodología constructivista de incorporación de conocimientos, basada en la idea del aprendizaje helicoidal, y propusimos como cuestiones significativas: la diferenciación entre los aspectos conceptuales y los algoritmos de cálculo, la identificación de la derivada como variación instantánea, y la necesidad de distinguir la función derivada de la pendiente de una recta. Estudiando los diversos problemas que según nuestra experiencia los alumnos evidencian, propusimos algunos ejemplos.
Hicimos también hincapié en la necesidad de trabajar con profundidad el cálculo de razones medias e instantáneas de cambio de una función, abordando temas diversos: marginalidad, elasticidad, caudal, densidad lineal, cargas eléctricas, velocidad de reacción; variación, en general, de cualquier magnitud respecto de otra. Así, el problema anterior podría reemplazarse por uno análogo donde las magnitudes fuesen otras.
Planteos análogos al propuesto en dicho trabajo se encuentran en diferentes textos de Cálculo. Sin embargo, como ya mencionáramos, estos son salteados más de una vez por los docentes. La variable tiempo juega para el docente un papel muy importante. El docente planifica, en general, sus actividades según tiempos predeterminados que tienen que ver con lo que se supone “puede darse en una clase” y sin pensar en el tiempo de construcción del conocimiento. Es claro que la construcción del conocimiento lleva tiempo; el hecho de que los alumnos puedan resolver un problema por sí solo no garantiza que el concepto haya sido aprehendido.
Con el fin de corroborar esta afirmación llevamos a cabo una experiencia áulica en una de las doce comisiones de Análisis Matemático I, asignatura cuatrimestral de primer año de las carreras de Ingeniería de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad Nacional de Rosario que tiene una carga horaria de 7 (siete) horas semanales. Lo hicimos en abril de 2007 cuando los alumnos de esta comisión - como los de todas las restantes- habían estudiado los primeros conceptos de la unidad Funciones Reales: definición, paridad, gráfica de funciones elementales, gráfica de funciones por desplazamientos de gráficas de funciones elementales, funciones biyectivas en el curso de ingreso y los habían profundizado durante las primeras cuatro semanas de clases. En esta situación propusimos, para que los alumnos trabajen por grupo, el siguiente problema cuyo enunciado pretende guiar al alumno en su razonamiento para que descubra con qué concepto geométrico se relaciona la velocidad media y comience a utilizar las primeras ideas que le permitirán construir la noción de límite.

> *Una pelota es lanzada verticalmente hacia arriba, y la ley que rige su movimiento es $r(t)=20t-5t^2$, donde t se mide en segundos y r en metros.*
>
> a) Determine el dominio y el recorrido de esta función. Considere, para ello que partió de una altura 0 en el instante t=0
> b) Esboce la gráfica de la función r
> c) ¿A qué altura se encuentra la pelota luego de transcurridos 2 s?
> d) ¿En qué momento llega a su altura máxima?

e) ¿En qué momento retorna al suelo?
f) ¿Podría determinar la velocidad media de la pelota en el intervalo transcurrido entre 2 y 4s? ; ¿Y en el intervalo que va de 2 a 3 s?; ¿Y en el intervalo que va de 2 a 2.5 s?
i) ¿Con qué concepto geométrico se relaciona la velocidad media?
j) ¿Podría intuir la velocidad instantánea de la pelota en el instante t =2 s?

La resolución del mismo no trajo dificultades, los alumnos trabajaron solos salvo en el ítem i) donde la intervención del docente a cargo del curso fue importante. Una vez que los alumnos resolvieron el problema el docente a cargo del curso dio las primeras nociones sobre la idea intuitiva de límite de una función en un punto.

Una semana después de haberse realizado y discutido este problema propusimos el siguiente:

Dos atletas se disponen a correr los 100 metros planos. Las distancias $s_1(t)$ y $s_2(t)$ que cada uno de ellos recorre a los t segundos está dada por $s_1(t) = \frac{1}{5}t^2 + 8t$ y $s_2(t) = \frac{100t^2}{100+t}$.
Determine quién gana la carrera y cuál es el más rápido al cruzar la meta.

Es habitual que los docentes supongamos que el haber trabajado toda una clase con un problema guiado, en el cual la actividad del estudiante fue importante - planteo poco frecuente en la práctica cotidiana - hace que el objetivo de dicho problema se cumpla. En este caso, podría suponerse que el alumno intentaría utilizar la idea de aproximación trabajada en el problema 1, para "acercarse" a la velocidad en el instante en que se cruza la meta.
Los alumnos trabajaron 1 hora 40 minutos. Lo hicieron de manera anónima y con mucho empeño; ningún alumno se retiró del aula antes de ese tiempo y se los veía trabajar hasta – podríamos decir – con entusiasmo. Más aún, cuando se les solicitó que entreguen la hoja donde habían trabajado algunos pedían unos minutos más para "*terminar de redactar las respuestas*".

3.3. Resultados de la experiencia

De los 55 alumnos que realizaron el trabajo, 53 contestaron la primera pregunta correctamente. El procedimiento de igualar las respectivas distancias a 100 fue utilizado por la mayoría de los alumnos. Sólo 3 respondieron a partir de observar las gráficas de las funciones y 2 vieron en una tabla espacio- tiempo que a los 10 segundos el primer corredor alcanzó la meta y el segundo no.

Confirmamos con esto los resultados del trabajo de Ismenia Guzmán (1998) respecto de que los alumnos tienden a responder en el mismo registro en el que fue planteado el problema.
Sobre la segunda pregunta, no respondieron la misma 13 alumnos de los cuales 10 no intentaron nada para responder. Además, 4 alumnos supusieron que el que gana tiene necesariamente mayor velocidad al cruzar la meta. Clasificamos los restantes casos según los recursos que los alumnos utilizaron en su intento de dar una respuesta

- ✓ **concepto de derivada**

Los que ya conocían el concepto derivada, expresaban que: "*el problema no puede resolverse sin el conocimiento de derivada*". 5 alumnos utilizan las reglas de derivación.

- ✓ **concepto de velocidad media**.

* 10 alumnos buscan la velocidad media en un intervalo "cercano" al tiempo en el cual cada corredor alcanza la meta y considerando el mismo como extremo superior del intervalo. Uno sólo de ellos aclara:*"Si bien no puedo asegurar la velocidad en el instante del cruce de meta, sí puedo estimar que el segundo corredor tenía una mucho mayor velocidad que el que gana"*

* 10 alumnos buscan la velocidad media de cada corredor considerando los 100 metros recorridos y la toman como la velocidad con la que cruzan la meta.
* 2 alumnos utilizan la noción de límite del cociente incremental para s_1 (función polinómica cuya se derivada se calcula en forma sencilla por definición), y en s_2 (función cuya derivada es más difícil de calcular a partir de sus conocimientos) buscan la velocidad media en un intervalo que tiene a 10,51- tiempo en el que el 2º corredor llega a la meta-como extremo superior del intervalo. (Estos alumnos evidentemente poseen ya los conceptos de límite y derivada).

✓ **gráfica de funciones**

De los 8 alumnos que respondieron observando las gráficas encontramos que sólo 4 comparan las pendientes de las rectas tangentes. Los 4 restantes responden con errores conceptuales como, por ejemplo confundir velocidad con posición (3 alumnos) o velocidad instantánea con aceleración (1 alumno)

3.4. Reflexiones sobre los resultados de la experiencia

Respecto de la primera parte del problema: averiguar quién gana la carrera.

El planteo algebraico que los alumnos realizan para ver quién gana la carrera presupone comprender qué representa la función y esto fue bien realizado por casi todos los alumnos.
Sin embargo, muchos alumnos realizaron, además del planteo algebraico, la gráfica de las funciones. Nos preguntamos aquí por qué realizaron estas gráficas: ¿necesitaban corroborar "visualmente" lo obtenido algebraicamente?, ¿pensaron en el problema de la clase anterior en el que en primera instancia se les pidió graficar?, ¿no pudieron “despegarse” de la forma de trabajar en el capítulo de funciones? Estos interrogantes no pueden tener respuesta a partir de esta única experiencia, pero son problemas que no podemos desconocer.
Consideramos importante destacar que:

a) Las gráficas fueron realizadas utilizando tablas de valores. Esto sorprende pues se insiste que éste no es un método válido que permita obtener la "forma" de la gráfica.
b) En general los alumnos realizan las gráficas luego de haber obtenido la respuesta de manera algebraica. Ninguno dio la respuesta mostrando que las utilizaba.
c) Algunos alumnos, al ver la sección de parábola "estirada", suponían que la gráfica de la función s_1 era la de una recta.

Debemos también destacar que las ecuaciones están bien resueltas y que todos los alumnos desestimaron las soluciones negativas.

Respecto de la segunda parte del problema: averiguar quién cruza la meta con mayor velocidad.

Ver como el alumno abordaba esta parte del problema era nuestro objetivo. En particular pretendíamos ver si habían logrado diferenciar, a partir del problema presentado en la clase anterior, los conceptos de velocidad media e instantánea.
Ningún alumno intentó "acercarse" al instante en que el corredor cruza la meta considerando diferentes intervalos de tiempo con amplitudes cada vez menores. Esta cuestión que quizás parezca difícil de realizar sin la intervención del docente tenía, en este caso, un gran aporte previo: la resolución del primer problema guiado propuesto a los alumnos.
Consideramos esta experiencia un aporte para la reflexión sobre nuestro trabajo áulico. De ninguna manera intentamos ser categóricos sobre los resultados obtenidos, cuando sabemos que hemos trabajado en un único curso y con un solo tema que, en especial, conlleva dificultades propias de difícil superación. Corroborar la dificultad que encierra el concepto de límite, la que conllevan los conceptos no estáticos, no era nuestra intención pero no podemos dejarla de lado a la hora de

realizar el trabajo. Sí podemos concluir que este grupo de alumnos no pudo incorporar, con el primer problema, conceptos que tienen que ver con el dinamismo de la idea de límite.

4. Conclusiones

La experiencia llevada a cabo permitió poner una vez más en evidencia supuestos implícitos: el docente supone que un concepto fue aprendido a partir del trabajo realizado en clase; el alumno lo desconoce como un recurso válido para la resolución de un problema.

Evidentemente el nuevo concepto aún no es tal pues no ha podido ser integrado en una red significante que permita que el mismo se articule a otros y se relacione con ellos, alcanzando la movilidad necesaria dentro de su sistema cognitivo. Pero, ¿por qué sucede esto?

Como plantea Vergnaud el tiempo de formación de un concepto y de su anclaje en el aparato psíquico no es el tiempo de exposición de una clase; ni siquiera de varias; se requiere de un extenso período de elaboración de dicho concepto para que el mismo pueda vincularse a otros dentro de la red significante que ha de integrar. Esto nuevo que ha de incorporarse debe entrelazarse en una red conceptual que pueda ser puesta en juego cada vez que el sujeto se enfrenta con una problemática que le es novedosa.

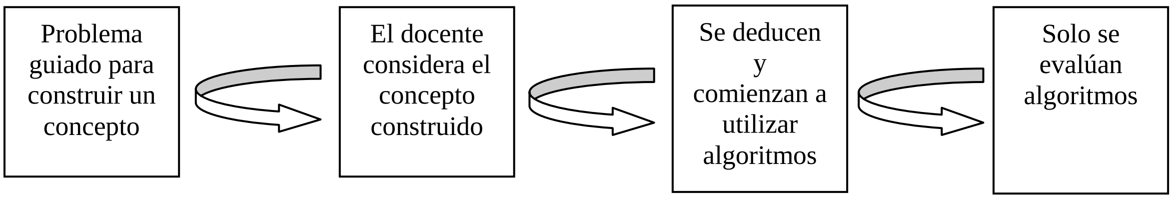
Se requiere entonces la presentación reiterada de situaciones que sirvan de contexto vinculante, contexto que dará pleno sentido y significación al concepto en proceso de construcción, situaciones que deben ser diversas y variadas, y que deben permitir que el concepto "por ser", el concepto en vías de formación pueda articularse de modos diferentes a los otros conceptos preexistentes. Repetir situaciones no implica aquí decir que una propuesta didáctica será una copia exacta de la anterior; todo lo contrario: cada situación didáctica que el docente proponga en *forma reiterada* a sus alumnos con el fin de promover la operativización del concepto a construir debe ser novedosa e innovadora. De acuerdo con Vergnaud, un concepto es operativo cuando permite abordar situaciones nunca encontradas previamente. Es por esto que el concepto que procuramos que el alumno aprenda, debe aparecer en una gran variedad de situaciones y en cada una de estas situaciones deben surgir relaciones (por analogía o por oposición) con todos los otros conceptos constitutivos de su campo conceptual. En cada situación donde se enfrente al alumno con una tarea cuya finalidad es la adquisición del concepto, el alumno adquirirá solamente "parcialidades" conceptuales que serán organizadas por las conexiones entre situaciones, los juegos de similitudes y diferencias, de ruptura, de complejidad y de deslizamiento de sentido, lo que no se puede adjudicar a la lógica del conocimiento construido, sino a la de un conocimiento en vías de apropiación.

La figura del docente es aquí insustituible: es el actor que tiene a cargo la presentación de los distintos escenarios didácticos que sostengan y propicien la articulación del concepto por aprender con todos los otros significantes de la red conceptual que ya han adquirido significado dentro de ella y que gozan del status de teoremas y/o conceptos en acto.

Claro está que esta reiteración de situaciones didácticas no idénticas unas a otras, que favorecerán la construcción de un concepto, insume un tiempo más que razonable y en las condiciones presentes de nuestros planes de estudio el tiempo es una variable de difícil modificación. Tenemos extensos programas a "desarrollar" en un tiempo preestablecido que no tiene en cuenta las características de gestación y surgimiento de los conceptos como tales. "Desarrollo" que por otra parte expulsa -desde su concepción- al alumno como protagonista del proceso de enseñanza-aprendizaje.

En este sentido, creemos que es importante lograr que los docentes reconozcan la necesidad de devolver el protagonismo en el proceso constructivo a quien verdaderamente debe ser el actor principal: el alumno. Debemos respetar sus tiempos de aprendizaje y dar lugar a una relación dialéctica de enriquecimiento mutuo que favorezca el intercambio de ideas. Sólo así se dará lugar al proceso de "acción en situación" que es la base y el criterio del pensamiento conceptual. El docente debe guiar, no liderar. Su presencia es fundamental para responder a los interrogantes que los alumnos plantean en su intento por dar significado a este nuevo concepto e integrarlo en una red de relaciones; y fundamentalmente el docente tiene por función sancionar las respuestas y soluciones halladas por los alumnos como válidas o erróneas y en este último caso debe reconducir al alumno a la búsqueda de nuevas opciones.

¿Qué es lo que hoy generalmente se lleva a cabo en el aula? En el mejor de los casos, la situación es la que describimos en la experiencia áulica:



Sentimos la obligación de aclarar que no estamos proponiendo dejar de lado el aspecto procedimental ni las tareas que induzcan la mecanización en el uso de los algoritmos de resolución. Por el contrario, este aspecto conforma una parte sustancial del proceso de enseñanza-aprendizaje sin el cual los conceptos no pueden volverse operativos. Es sabido que el aspecto procedimental por sí solo no favorece el desarrollo cognitivo óptimo de nuestros alumnos y la independencia intelectual necesaria para el fortalecimiento de la intuición y del pensamiento formal.

Se puede argumentar que la escuela primaria y media debieron haber concluido exitosamente este proceso. A esta objeción respondemos: en primer lugar, la realidad áulica diaria nos muestra con claridad que esto no es así y de alguna manera los docentes universitarios de los primeros años debemos tomar partido en esto e intentar revertirlo; en segundo lugar, aunque el ciclo de formación del pensamiento formal y el desarrollo de la intuición hubieran concluido con éxito, creemos que en el ciclo básico universitario debieran consolidarse las redes significantes de los diversos campos conceptuales que por su complejidad no pudieron hasta este momento transformarse en saberes. Tal es el caso de la *derivada*, que forma parte – de acuerdo a la teoría de Vergnaud – del *campo conceptual de la dinámica*.

Pretendemos compartir las primeras reflexiones de nuestros estudios, con el objetivo de encontrar voces que se sumen a esta inquietud y nuestro proyecto pueda repetirse también en otras Facultades para poder así comparar experiencias y resultados. Pensamos que el profesor no puede ser considerado un mero ejecutor de los cambios, debe ser una persona capaz de inducirlos a partir de sus conocimientos, sus creencias, sus teorías, y, para ello debe permitirse recapacitar sobre su práctica y debe permitirse no ser el centro de las mismas. Por supuesto, muy probablemente para lograr esto deba también tener que comprometerse para pugnar por condiciones de trabajo que le permitan cumplir con sus propuestas.

Bibliografía

- ARTIGUE, M., DOUADY, R., MORENO, L. (1998) *Ingeniería didáctica en educación matemática*, Editorial Iberoamericana.
- BORDIEU, P (1998): *La reproducción Elementos para una teoría del sistema de enseñanza.* Ed. Laia. Barcelona.
- BROUSSEAU G. (1999): "Educación y Didáctica de las matemáticas", en *Educación Matemática*, México.
- BROUSSEAU, G. (1986): *Fundamentos y métodos de la Didáctica de la Matemática* Universidad Nacional de Córdoba, Facultad de Matemática Astronomía y Física, Serie B, Trabajos de Matemática, No. 19 (versión castellana 1993).
- CANTORAL, R.; FARFÁN, R. M. (1998): "Pensamiento y Lenguaje Variacional en la Introducción al Análisis". *Epsilon*
- CANTORAL, R., FARFÁN, R., CORDERO, F., ALANÍS, J., RODRÍGUEZ, R., GARZA, A. (2005). *Desarrollo del Pensamiento Matemático*, Editorial Trillas, México
- CATTANEO, L; GONZÁLEZ, M. I; INTROCASO, B (2003) *La derivada. Una propuesta para su aprendizaje significativo.* Trabajo presentado y aceptado en la XXVI Reunión de Educación Matemática. Río Cuarto
- GARCÍA QUIROGA, L; ROSA VÁZQUEZ CEDEÑO, MOISÉS HINOJOSA RIVERA (2004) Revista Ingenierías: Julio-Septiembre 2004 Vol. 7 Nº 24 pp. 27-34.
- GUZMÁN R., I. (1998) *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática EducativaVol. 1,* Nº 1, pp. 5-21.
- MORENO MORENO, M. (2005) *Departament de Matemàtica (UdL)* Investigación en Educación Matemática. Noveno Simposio de la Sociedad Española de Educación Matemática (SEIEM)- Universidad de Córdoba.