Regla de la cadena para funciones de una variable

Adolfo Aguirre

Usando lenguaje tradicional, la regla de la cadena (o derivada de una función de función) establece que si $y = f(u), u = g(x)$ son derivables, entonces la función compuesta $y = f(g(x))$ también lo es y se cumple que $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = f'(g(x))g'(x)$. En los textos antiguos, la justificación que se daba para este teorema era así: Si damos a x un incremento Δx, u tendrá un incremento Δ_n; el que a su vez producirá un incremento Δ_y; entonces

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u}\frac{\Delta u}{\Delta x} \tag{1}$$

Tomando límite para $\Delta x \to 0$ (en cuyo caso también $\Delta u \to 0$) resulta la regla.

Esta demostración es insostenible, pues puede ocurrir que $\Delta u = 0$ y (1) no tiene sentido. Esta situación no sólo se presenta para el caso en que la función $g(x)$ es constante (caso que no presenta dificultad, pues $y = f(g(c))$ también será constante, y la regla de cadena se cumple, siendo nulos ambos miembros), sino para funciones $u = g(x)$ no constantes tales que $\Delta u = 0$ para $\Delta x \neq 0$ tan pequeños como se quiera. El ejemplo clásico es:

$$u = x^2 sen\frac{\pi}{x}, \text{para } x \neq 0,\ g(0) = 0$$

Esta función es derivable en todo punto, para $x = 0$ se lo comprueba con la definición:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(0 + \Delta x) - g(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\Delta x)^2 sen\frac{\pi}{\Delta x}}{\Delta x} = 0$$

(pues sen $\frac{\pi}{\Delta x}$ permanece acotado). En el punto $x = 0$ Se verifica que para $\Delta x = \frac{1}{n}$, n entero $\neq 0, \Delta u = (\Delta x)^2 sen\frac{\pi}{\Delta x} = \frac{1}{n^2}\, sen\, n\, \pi = 0$.

La insuficiencia de la demostración antigua se supera en los textos actuales de variadas maneras. Del análisis de diversos textos, hemos concluído que pueden decirse que hay dos métodos de prueba.

Método 1: Expresión del incremento como una función lineal más un término de error.

Método 2: Levantamiento de la indeterminación del cociente incremental asignándole el valor de la derivada si $\Delta x = 0$.

Pasamos ahora a usar un lenguaje más preciso.

Definición: Sea I un intervalo real, $x_0 \in I, f : I \to R$; se dice que f es derivable en x_0 si existe $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. El valor de dicho límite se llama derivada de f en x_0.

Notación: $f'(x_0)$.

Las dos pruebas que presentaremos se basan en formulaciones equivalentes de la anterior definición.

Teorema. En las condiciones de la definición anterior se cumple: Son equivalentes:

1) f es derivable en x_0

2) $\exists\, l \in R$ y una función $\varphi : I \to R$ tales que:

$$f(x) - f(x_0) = l(x - x_0) + \varphi(x)(x - x_0),\ \lim_{x \to x_0} \varphi(x) = 0, \varphi(x_0) = 0$$

(o sea φ es continua en x_0, además $l = f'(x_0)$)

3) $\exists\ r : I \to R$ continua en x_0 tal que $f(x) - f(x_0) = r(x)(x - x_0)$ (en tal caso: $r(x_0) = l = f'(x_0)$)

Demostración: $1 \Rightarrow 2$: Se definen $l = f'(x_0)$ y

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0)\, si\, x \neq x_0 \\ 0 \qquad si\, x = x_0 \end{cases}$$

Entonces $\lim_{x \to x_0} \varphi(x) = \lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) = f'(x_0) - f'(x_0) = 0$

La relación $f(x) = f(x_0) = l(x - x_0) + \varphi(x)(x - x_0)$ se cumple por la definición de φ.

$2 \Rightarrow 3$: Definimos $r(x) = l + \varphi(x)$

Como φ es continua en x_0, r también lo es

$$f(x) - f(x_0) = l(x - x_0) + \varphi(x)(x - x_0) = (l + \varphi(x)(x - x_0) = r(x)(x - x_0)$$

$$r(x_0) = l + \varphi(x_0) = l$$

$3 \Rightarrow 1$: Sea $x \neq x_0 : r(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$; como r es continua en x_o,

$$\exists \lim_{x\to x_0} r(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \Rightarrow f \text{ es derivable en } x_0$$

Además $f'(x_0) = r(x_0)$

Regla de la Cadena. Sean I, J intervalos en R, sean $g : I \to J$ derivable en $x_0 \in I, f : J \to R$ derivable en $y_0 = g(x_0)$, entonces $f \circ g : I \to R$ es derivable en x_0 y se cumple: $(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0)$.

Primera demostración. Aplicamos a f la forma 2 del teorema anterior: existe $\varphi : J \to R$ tal que:

$$f(y) - f(y_0) = f'(y_0)(y-y_0) + \varphi(y)(y-y_0),\ \forall\, y \in J$$

$$\lim_{y\to y_0} \varphi(y) = 0,\ \varphi(y_0) = 0$$

Hacemos $y = g(x), x \in I$, entonces:

$$f(g(x)) - f(g(x_0)) = f'(g(x_0))(g(x) - g(x_0)) + \varphi(g(x))(g(x) - g(x_0)) \qquad (1)$$

Como g es continua en x_0 (por ser derivable en x_0), $g(x_0) = y_0$, y φ es continua en y_0, entonces $\varphi \circ g$ es continua en x_0 y $\lim_{x\to x_0} (\varphi \circ g)(x) = (\varphi \circ g)(x_0) = \varphi(g(x_0)) = \varphi(y_0) = 0$

En (1), tomamos $x \neq x_0$, dividimos por $x - x_0$ y tomamos límite para $x \to x_0$:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(g(x) - f(g(x_0))}{x-x_0} = f'(g(x_0)) \lim_{x\to x_0} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} +$$

$$+ \lim_{x\to x_0} \varphi(g(x)) \lim_{x\to x_0} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = f'(g(x_0))g'(x_0)$$

Segunda demostración Aplicamos a f y a g la forma 3 equivalente a la derivabilidad:

Existe $r : I \to R$ continua en x_0 tal que:

$$\forall\, x \in I : g(x) - g(x_0) = r(x)(x - x_0); r(x_0) = g'(x_0) \qquad (1)$$

Existe $s : J \in R$ continua en y_0 tal que:

$$\forall\, y \in J : f(y) - f(y_0) = s(y)(y - y_0); s(y_0) = f'(y_0) \qquad (2)$$

Reemplazamos en (2) y por $g(x), x \in I$ y luego aplicamos (1).

$$f(g(x)) - f(g(x_0)) = s(g(x)) - g(x_0)) = s(g(x))r(x)(x - x_0) \qquad (3)$$

La función $s \circ g$ es continua en x_0 (g cont en x_0, (g derivada en x_0), $g(x_0) = y_0, s$ continua en y_0); $(s \circ g)(x_0) = s(s(g(x_0)) = s(y_0) = f'(y_0) = f'(g(x_0))$

Sea $t : I \to R$ definida por $t(x) = s(g(x))r(x)$, entonces t es continua en x_0 y $t(x_0) = s(g(x_0))r(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0)$.

Entonces, de (3), aplicando la implicación $3 \Rightarrow 1$ se deduce el teorema.

Parece más sencilla la 2da.; se puede prescindir de la condición 2) y la implicación $1 \Rightarrow 3$ se prueba simplemente definiendo

$$r(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} & si\, x \neq x_0 \\ f'(x_0) & si\, x = x_0 \end{cases}$$

Universidad Nacional de Catamarca.