Sobregeneralización de Modelos Lineales: estrategias de resolución en contextos universitarios [*]

Mónica Villarreal – Cristina Esteley - Humberto Alagia

Introducción

Este trabajo es una extensión de estudios, que venimos realizando desde el año 2000, centrados en la descripción y el análisis de un fenómeno que se produce entre estudiantes universitarios, al cual denominamos *extensión de modelos lineales a contextos no lineales o sobregeneralización de modelos lineales*. Tal fenómeno da cuenta de la resolución de ciertas cuestiones matemáticas que vinculan dos variables, empleando modelos lineales, aunque la situación planteada, desde la perspectiva del docente o investigador, sea no lineal. Al hablar de modelo lineal nos referimos a representaciones particulares de proporcionalidad directa, al esquema de la regla de tres simple o a la relación funcional $y = a.x+b$.

La presencia de este fenómeno ha sido extensamente documentada y estudiada en alumnos de la escuela primaria y media (Kontoyianni, Modestou, Erodotou, Ioannou, Constantinides, Parisinos & Gagatsis, 2006; Van Dooren, De Bock, Janssens, & Verschaffel, 2005; Van Dooren, De Bock, Hessels, Janssens & Verschaffel, 2004; De Bock, Van Dooren, Janssens, & Verschaffel, 2002; De Bock, Van Dooren, Verschaffel & Janssens, 2001) y ha sido designado de diferentes maneras: *"linear misconception"*, *ilusión de proporcionalidad* o *de linealidad* e inclusive *trampa de la proporcionalidad*. Tales estudios revelan entre los estudiantes una tendencia fuerte y resistente al cambio, al aplicar modelos lineales para resolver situaciones problemáticas que involucran longitud y área de figuras planas semejantes, volúmenes y probabilidades.

En el nivel universitario la sobregeneralización de modelos lineales ha sido observada de manera informal y no sistemática en una diversidad de problemas y contextos en cuanto al contenido involucrado. Por este motivo iniciamos una serie de estudios exploratorios a fin de documentar sistemáticamente su presencia en este nivel (Villarreal, Esteley & Alagia, 2005; Esteley, Villarreal & Alagia, 2001). Para ello se trabajó primeramente con producciones escritas de estudiantes de Agronomía de la Universidad Nacional de Córdoba (Argentina) y de la Universidad de la Frontera (Chile). Tales producciones provenían de las soluciones de exámenes

[*] Este trabajo fue presentado en la 19 Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa (RELME 19). Montevideo, 11 al 15 de julio de 2005.

completados por 300 estudiantes argentinos y 53 chilenos o de resoluciones a problemas especialmente diseñados por los investigadores y trabajados con grupos más reducidos. A partir de los resultados obtenidos decidimos realizar un estudio más profundo y un seguimiento más cercano de los procesos llevados adelante por los estudiantes, a través de entrevistas semi-estructuradas (Esteley, Villarreal & Alagia, 2004). Tales entrevistas se realizaron con estudiantes que habían aplicado modelos lineales para resolver problemas no lineales. El análisis de las entrevistas nos mostró que 1) Los estudiantes hacían uso de conocimientos agronómicos correspondientes a diferentes áreas de la carrera (Química, Biología, etc.) para dar sustento a sus conjeturas, introduciendo así condiciones ajenas a los problemas presentados. 2) Las estrategias utilizadas para la creación de modelos matemáticos que describían las situaciones planteadas mostraban creatividad y coherencia interna. 3) Prevalecía el uso de razones de cambio aditivos como recurso de resolución. Esto se constituía en un obstáculo para llegar al modelo no lineal que resolvía el problema.

En todos nuestros estudios, los errores cometidos por los estudiantes fueron asumidos como síntomas de las concepciones que subyacen en sus actividades matemáticas, de acuerdo a los principios de Ginsburg (1977) o la acepción de error de Brousseau (en Balacheff, 1984).

> *"Un error es no sólo consecuencia de ignorancia o de incertidumbre o de un accidente. Un error podría ser la consecuencia de un conocimiento previo que tiene su propio interés, su propio éxito, pero que aparece como falso bajo nuevas circunstancias, o más simplemente no adaptado. Así en el análisis didáctico los errores no son entendidos como meras fallas de los alumnos, sino más bien como síntomas de la naturaleza de las concepciones que subyacen en sus actividades matemáticas"* (p. 36).

A partir de las perspectivas y resultados señalados anteriormente decidimos profundizar el estudio extendiéndolo a otros contextos educativos del ámbito universitario. En esta oportunidad examinamos la ocurrencia del fenómeno de sobregeneralización de modelos lineales entre estudiantes de carreras matemáticas.

Metodología

El estudio es de carácter cualitativo y está basado en el análisis de resoluciones escritas de problemas. Se realizó un análisis inductivo/constructivo (Lincoln & Guba, 1985), ya que no se establecieron hipótesis *a priori*. El análisis de las estrategias y soluciones de los estudiantes a los problemas propuestos no fue realizado en términos de correcto - incorrecto. Si bien podemos indicar concepciones que matemáticamente son erróneas, el énfasis estuvo puesto en los procesos de pensamiento de los estudiantes, sin realizar comparaciones sino tratando de "escuchar sus voces" (Confrey, 1994). En este sentido, Confrey (1991) argumenta que comprender las acciones de los estudiantes implica introducirse en su problemática y no presuponer que ella coincida con la del docente/investigador. Las respuestas de los estudiantes que se desvían de la expectativa del docente/investigador, pueden ser legítimas como perspectivas alternativas o válidas y efectivas en otros contextos. Alentar al estudiante a mostrar sus puntos de vista implica una oportunidad para que el docente/investigador vislumbre las perspectivas de los mismos y pueda cuestionar las propias, examinándolas a la luz de las ideas de los alumnos.

A partir de estas opciones metodológicas y epistemológicas, se desarrollaron los siguientes procedimientos:

1) Selección y preparación de los problemas presentados en la Figura 1. Para la selección y preparación de problemas se tuvieron en cuenta, tanto resultados obtenidos en nuestros trabajos anteriores como problemas propuestos en otras investigaciones relacionadas con el fenómeno de la sobregeneralización de modelos lineales (De Bock, Van Dooren, Janssens, & Verschaffel, 2002; De Bock, Van Dooren, Verschaffel & Janssens, 2001).

2) Resolución escrita de estos problemas por parte de 18 alumnos que cursaban Álgebra Lineal en el año lectivo 2004. Los problemas fueron resueltos en horario de clase, con la presencia del profesor responsable del curso de Álgebra y otro investigador, ambos integrantes del equipo de investigación.

3) Análisis de las resoluciones escritas registrando la presencia del fenómeno y las estrategias seguidas cuando se aplicaban modelos tanto lineales como no lineales.

<u>Problema del perfume</u>: En una perfumería se venden botellas de un perfume A. Las botellas tienen una altura de 8 cm y contienen 10 cl de perfume. En la vidriera del negocio se publicita una botella de la misma forma pero agrandada y conteniendo el mismo perfume. Esta botella tiene una altura de 24 cm, ¿cuánto perfume tendrá esta botella mayor?

<u>Problema del silo</u>: Un productor agrícola dispone de granos para llenar un silo de tal modo que la cantidad de granos que ingresa cada día se duplica con respecto a lo que ingresó el día anterior. Si después de 10 días el silo está lleno, ¿en qué día el productor logró reunir la cantidad de granos necesaria para llenar la mitad del silo?

Figura 1: los problemas

Presentación y análisis de resultados

A continuación reportamos resultados y análisis, para cada problema del Cuadro 1. Presentamos la distribución de las respuestas según el modelo matemático (Lineal o no lineal) escogido para la resolución. Describimos y analizamos algunas estrategias, tanto lineales como no lineales, seleccionadas por los estudiantes para abordar los problemas.

<u>Problema del perfume</u>

La Tabla 1 muestra la distribución de las respuestas dadas en este problema

Resolución	**Cantidad de alumnos**	**%**
No lineal	2	11,1
Lineal	15	83,3
No resuelve/ no concluye	1	5,6
Total	**18**	**100**

Tabla 1: distribución de respuestas según modelos

Para el problema del perfume la solución esperada y matematizada es la siguiente: Sean, respectivamente, $V_1 = 10\,cl$ y $h_1 = 8\,cm$, el volumen y la altura de la botella dada y V_2 y $h_2 = 24\,cm$ el volumen y altura de la botella agrandada. Se asume que la botella agrandada es semejante a la dada, ya que en el problema se indica que la nueva botella es *"de la misma forma pero agrandada"*. De este modo, si $k = h_2 / h_1$ es la constante de semejanza entre h_1 y h_2, al reemplazar h_1 y h_2 por 8 *cm* y 24 *cm*, respectivamente, obtenemos $k = 3$. Bajo la hipótesis de semejanza $V_2 / V_1 = k^3$ y así, $V_2 = 3^3 \cdot 10\,cl$. De este modo la respuesta esperada es que la botella mayor contiene 270 *cl*.

Entre los estudiantes que presentaron una resolución lineal el 73,3% optó por una regla de tres como procedimiento de resolución, asumiendo una variación lineal del volumen de la botella agrandada respecto de la altura. La resolución más frecuente hace uso del esquema clásico de regla de tres simple que se muestra a continuación:

8 *cm* -------- 10 *cl*

24 *cm* --------- $x = \dfrac{24\,cm.10\,cl}{8\,cm} = 30\ cl$

El resto de quienes presentaron una resolución lineal optaron por el planteo de una proporcionalidad directa como la siguiente:

$$\frac{10\,cl}{8\,cm} = \frac{x\,cl}{24\,cm}$$

En ambos casos, *x* representa el volumen buscado de la botella agrandada.

A continuación analizamos en detalle dos resoluciones no lineales. En una de ellas el estudiante escribió la resolución que se muestra en la Figura 2:

8 *cm* ________ 10 *cl* de perfume

10 *cl* son 0,1 *l* = 100 cm^3

$$8.x = 100$$

$$x = \frac{100}{8} = 12{,}5$$

la base de la botella es de 12,5 cm^2

[*] $\dfrac{8}{24} = \dfrac{12{,}5}{\tilde{x}} \Rightarrow \dfrac{12{,}5.24}{8} = \tilde{x} \Rightarrow 37{,}5\ cm^2 = \tilde{x} \Rightarrow$ *la base de la botella grande es de 37,5* cm^2

$24\ cm \times 37{,}5\ cm^2 = 900\ cm^3$

Rta: la botella mayor tendrá 900 cm^3.

Figura 2: resolución no lineal para el problema del perfume

En este caso cabe señalar que el alumno, aunque no lo indicó explícitamente, estaba asumiendo un envase para el cual es válido el cálculo del volumen como: "área de la base por altura". Así, calculó el valor del área de la base de la botella que tiene 10 *cl* de perfume (x). Por otro lado, asumió que la constante de proporcionalidad entre las alturas de las botellas es la misma que entre las áreas de las bases correspondientes y calculó el área de la base de la botella agrandada ($\tilde{x}$) utilizando la igualdad que en la Figura 2 se indica con [*].

En la otra resolución no lineal, un alumno indicó inicialmente: *"Si la botella es de la misma forma entonces todas sus dimensiones crecen proporcionalmente"* y continuó escribiendo:

$\Rightarrow$ *altura* —— *triplica* *ancho* —— *triplica*	$\Rightarrow$ *si yo tengo una botella* □ *y la agrando al doble tendré* □… *entonces lo que tenía antes entra 4 veces en la nueva botella* $\Rightarrow$ *si tripliqué el largo tripliqué el ancho Por ende lo que tenía antes entra 9 veces* $\Rightarrow$ *la botella mayor contiene 10.9= 90cl*

Figura 3: resolución no lineal bajo hipótesis de semejanza

En este caso cabe señalar que este alumno manifiesta una correcta interpretación geométrica del problema. Procede con claridad en sus explicaciones, aunque visualiza la botella a través de una figura plana, este hecho se transforma en un obstáculo para obtener la resolución esperada.

Si bien ambos estudiantes arriban a la misma solución numérica, difieren en la interpretación geométrica del problema. En el segundo caso, cuando el alumno indica *"Si la botella es de la misma forma entonces todas sus dimensiones crecen proporcionalmente"*, pone de manifiesto el hecho de que se propone trabajar bajo una hipótesis de semejanza aunque la representación visual a la que apela no sea adecuada. Por otro lado, en el primer caso no se puede afirmar que el estudiante esté trabajando bajo hipótesis de semejanza ya que asume que la constante de proporcionalidad entre las alturas de las botellas es la misma que la constante de proporcionalidad entre las áreas de sus bases.

Problema del silo

La Tabla 2 muestra la distribución de las respuestas dadas al problema.

Resolución	Cantidad de alumnos	%
No lineal	11	61,2
Lineal	4	22,2
No resuelve	3	16,6
Total	**18**	**100**

Tabla 2: distribución de respuestas según modelos

La solución esperada para este problema se ilustrará más adelante utilizando la resolución dada por uno de los estudiantes.

Analicemos algunas de las soluciones que clasificamos como lineales. Una respuesta frecuente a este problema es que el silo alcanza la mitad de su capacidad en el quinto día. Por ejemplo, un alumno escribió:

Ecuación para llenar el silo donde n = cdad de días
x = cdad de granos

$2^{n-1}x$ *para n = 1,...,10*

si n = 10 está lleno
para que sea la mitad, n debe ser igual a 5.

Figura 4: respuesta compatible con un abordaje lineal

Este estudiante apeló a una expresión algebraica que describe la cantidad de granos que entran en cada etapa del llenado del silo, sin embargo su respuesta final está desconectada de la expresión presentada y resulta compatible con un abordaje lineal.

Otro alumno presentó la siguiente resolución:

• º *x cantidad de granos*
‚ º *2x* “ “
ƒ º *4x*
…º *8x*
† º *16x*
‡ º *32x*
ˆ º *64x*
‰º *128x*
Š º *356x= silo lleno*

o *10 días ------ 1 silo*

5 días = $\frac{10}{2}$ = *x días ------* $\frac{1}{2}$ *silo*

10 días ------ 356 x
c días ------- $\frac{1}{2}356x$

10 ------ 356 x
c ------- 128 x

$$c = \frac{10 \cdot 128\,\cancel{x}}{356\,\cancel{x}}$$

$$c = 10 \cdot \frac{128}{356}$$

$$c = 10 \cdot \frac{1}{2} = 5 \text{ días}$$

Figura 5: resolución usando regla de tres simple directa

El alumno construyó una lista de valores que, de acuerdo al enunciado del problema, estaría representando la cantidad de granos que ingresan cada día al silo (observar que en esa lista el estudiante omitió el valor correspondiente al 4to día). Luego planteó y resolvió una regla de tres (ver margen derecho de la Figura 5), usando el 10º valor de su lista, al que identificó como “silo lleno”. A partir de ello, concluyó que en el día 5 el productor llena la mitad del silo. Finalmente, abajo a la izquierda, planteó una regla de tres alternativa a la ya realizada, obteniendo el mismo resultado. Observemos que si la lista construida por el estudiante fuera considerada como una tabla de valores que relaciona cada día con la cantidad de granos en el silo, se podría concluir que en el día noveno el silo llegó a la mitad de su capacidad (*356x*).

Finalmente, otro alumno explicó: “*El productor logró reunir la cantidad de granos necesaria para llenar la mitad del silo a los 5 días porque como dice el problema la cantidad de c/día es el doble del día anterior Þ si tardo 10 para llenarlo va a tardar la mitad de días para cubrir la mitad del silo*”.

Las respuestas numéricas obtenidas en los tres casos anteriores son compatibles con un abordaje lineal en el que se asume que la cantidad de granos que ingresa diariamente en el silo es constante Así, la respuesta esperada en esta situación sería la dada por estos estudiantes. Sin embargo, no contamos con suficientes evidencias para afirmar que los alumnos eran concientes de la presencia implícita de un modelo lineal en las respuestas o resoluciones presentadas por ellos.

De los 11 alumnos que resolvieron el problema con un abordaje no lineal, tres, ofrecieron una solución descripta verbalmente. El resto optó por abordajes que exhiben diversos niveles de sofisticación y muestran un grado de matematización que se manifiesta a través del uso de tablas, la manipulación de variables o el planteo de relaciones funcionales.

Las descripciones verbales pusieron de manifiesto, en general, razonamientos como el siguiente: *"Si tardó 10 días en llenarlo y la cantidad de granos se duplica por día. Tardó 9 días en llenar la mitad del silo"*.

Un alumno, que exhibió la resolución esperada para este problema, concluyó correctamente que el silo alcanzó la mitad de su capacidad en el día 10 y presentó la resolución que se muestra en la Figura 6.

Días	*ingreso*	*total*	
1	*x*	*x*	*1023 | 2*
2	*2x*	*3x*	*02 511*
3	*4x*	*7x*	*03*
4	*8x*	*15x*	*1*
5	*16x*	*31x*	
6	*32x*	*63x*	
7	*64x*	*127x*	
8	*128x*	*255x*	
9	*256x*	*511x*	
10	*512x*	*1023x*	

Rta: el productor llena la mitad del silo el mismo día que logró llenarlo (10 días)

Figura 6: resolución esperada para el problema.

En este caso el alumno propuso una lista en la que se registran *días, ingreso* y *total*. De acuerdo al enunciado del problema, estas etiquetas identifican "número de días", "cantidad de granos que ingresa cada día" y "total de granos en el silo para cada día". A partir de la lista denotó que en el día 1 ingresa x, que también representa el total para ese día. Para el día *2* ingresa el doble de lo que ingresó el día *1*, esto es, $2x$, lo que hace un total de $3x$ ($x+2x$). Así continúa hasta el día *10*, de tal modo que ese día ingresarán $512x$, llegando a un total de $1023x$

(*x+3x+7x+…+511x*), que es la cantidad que llena el silo. A partir de eso determina la cantidad que correspondería a la mitad del silo dividiendo *1023* por *2*. Como esa cantidad es superior a *511x*, que corresponde al día *9*, concluyó que en el día *10* logra reunir la cantidad de granos necesaria para completar la mitad del silo.

Otro alumno presentó la siguiente resolución:

1º día g_o

2do día $g_2 = 2g_o$

3 día $g_3 = 2.(2g_o)$

$g_{n+1} = 2^n g_o \longrightarrow g_{10} = 2^9 g_o$ *cant de granos que caben en el silo*

La mitad es $g_9 = 2^8 g_o$ Þ *El productor logró reunir la mitad del silo en el día 9.*

Figura 7: resolución siguiendo un modelo no acumulativo

Este estudiante abordó algebraicamente el problema, encontró una fórmula y, guardando coherencia con el modelo ofrecido, concluyó que *el productor logró reunir la mitad del silo en el día 9*. Sin embargo, de acuerdo al enunciado del problema, podemos señalar que el modelo ofrecido representa la cantidad de granos que ingresa cada día al silo y no la cantidad de granos que hay cada día en el silo. La conclusión a la que el alumno arriba, nos permite inferir que identifica la cantidad de granos que ingresa cada día con la cantidad de granos que hay en el silo en ese mismo día.

Algunas conclusiones

A partir del análisis realizado podemos destacar que: 1) Las resoluciones escritas de los alumnos manifiestan la presencia del fenómeno de sobregeneralización de modelos lineales en todos los problemas presentados. 2) Las estrategias empleadas muestran un adecuado nivel de simbolización para este grupo de alumnos. 3) La decisión de los estudiantes de emplear modelos lineales en contextos no lineales podría estar relacionada con inadecuadas formulaciones en los enunciados de los problemas y con la naturaleza de los contenidos matemáticos que es necesario poner en juego para su resolución.

En relación a los contenidos matemáticos puestos en juego en la resolución de un problema podemos conjeturar que una situación fácilmente resoluble con recursos aritméticos o algebraicos, como es el problema del silo, resulta familiar para estos alumnos, mientras que un problema, como el de la botella de perfume, cuya comprensión y resolución están mediadas por un contenido geométrico (cálculo de volúmenes de cuerpos semejantes) no lo es tanto. En este último caso, apelan a la regla de tres como una herramienta aritmética que les resulta conocida. Ninguno de los estudiantes pudo determinar el volumen del nuevo cuerpo bajo la hipótesis de semejanza y conociendo la constante de proporcionalidad entre las alturas de las botellas. Sin embargo, también podemos preguntarnos si es posible y claro reconocer la hipótesis de semejanza entre las botellas de perfume a partir del enunciado del problema cuando expresa que la nueva botella de perfume de la cual se desea conocer su capacidad tiene *"la misma forma pero agrandada"* que la botella original. ¿Basta ello para que, quienes lo leen "interpreten", que, según la intencionalidad del docente/investigador lo que se quiere expresar es que las dos botellas representan cuerpos semejantes? ¿O, de lo contrario, debería expresarse explícitamente que "las dos botellas son semejantes"? ¿Esto garantizaría que los alumnos asuman la semejanza desde una perspectiva geométrica con todo lo que ello implica para su resolución?

Entre las resoluciones no lineales del problema del silo se presentaron varias respuestas indicando que el productor lograría reunir la cantidad de granos necesaria para llenar la mitad del silo en el noveno día (La respuesta esperada era: en el décimo día). En este caso se identifica la cantidad de granos que ingresa cada día con la cantidad acumulada de granos para ese día. De ese modo, el abordaje y la resolución corresponderían al siguiente problema: *Un productor agrícola dispone de granos para llenar un silo de tal modo que <u>la cantidad de granos que hay cada día se duplica con respecto a lo que había el día anterior</u>. Si después de 10 días el silo está lleno, ¿en qué día el productor logró reunir la cantidad de granos necesaria para llenar la mitad del silo?*

Los estudiantes que participaron en este estudio presentan una compleja red de conocimientos matemáticos y una buena manipulación simbólica, sin embargo ante determinadas situaciones problemáticas recurren al esquema de regla de tres simple. De este modo se pone de manifiesto el fenómeno de sobregeneralización de modelos lineales. Tal fenómeno podría provenir de la presencia de modelos tácitos en el sentido de Fishbein (1989). Según este autor *"Muchas de las dificultades que los estudiantes enfrentan en educación en ciencias y en matemática se deben a la influencia de modelos intuitivos tácitos que actúan descontroladamente en el proceso de razonamiento"* (p. 9). En este sentido observamos que un problema que relaciona dos variables y presenta la estructura de "tres datos conocidos y un cuarto por conocer" parece inducir el empleo de la regla de tres simple directa, tácitamente asumiendo la existencia de una relación de proporcionalita directa entre las variables. De este modo, el uso de la regla de tres en problemas con la estructura previamente descripta actúa como un modelo tácito en el sentido que los estudiantes no son concientes de su influencia y dominio de aplicabilidad. Como modelo tácito presenta características que lo hacen robusto, debido a su naturaleza práctica, simplicidad y economía de acción en términos de la posibilidad de resolver tal tipo de problemas. Este hecho ha sido también documentado en Villarreal, Esteley & Alagia (2005) al trabajar con estudiantes de Agronomía.

Cabe preguntarse en el caso particular de este estudio: ¿por qué estos estudiantes no apelaron a otras estrategias de resolución como pueden ser el análisis de casos particulares, por ejemplo considerar una botella de forma cúbica o esférica para el problema del perfume?, ¿existe conciencia de que el modelo que subyace al emplear una regla de tres simple directa es lineal?, ¿existe conciencia de que la regla de tres simple directa puede emplearse bajo la hipótesis de existencia de una relación de proporcionalidad directa entre las variables involucradas? Respuestas a estas preguntas ameritan estudios bajo otras condiciones metodológicas en resonancia con las mismas.

Bibliografía

Balacheff, N. (1984). French research activities in Didactics of Mathematics - some key words and related references-. *Theory of Mathematics Education* ICME 5 – Topic area and miniconferences: Adelaide, Australia. Bielefeld: Institut für Didaktik der Mathematik der Universität Bielefeld, 33-38.

Confrey, J. (1994). Voice and perspective: hearing epistemological innovation in students' words. In Bednarz, N., Larochelle, M. , Desautels, J. (Eds.). *Revue des sciences de l'education*. Special issue: Constructivism in Education, 20 (1), 115-133.

Confrey, J. (1991) Learning to listen: a student's understanding of powers of ten. In: Von Glasersfeld, E. *Radical Constructivism in Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. p.111-138.

De Bock, D.; Van Dooren, W.; Janssens, D. & Verschaffel, L. (2002). Improper use of linear reasoning: an in-depth study of the nature and irresistibility of secondary school students' errors. *Educational Studies in Mathematics*, 50, 311-334.

De Bock, D.; Van Dooren, W.; Verschaffel, L. & Janssens, D. (2001). Secondary school pupils' improper proportional reasoning: an in-depth study of the nature and persistence of pupils' errors. *Proceedings of PME 25*, 2, 313-320.

Esteley, C.; Villarreal, M. & Alagia, H. (2001). Las producciones de estudiantes universitarios en extensiones inadecuadas de modelos lineales a contextos no lineales. *Actas XI Jornadas Nacionales de Educación Matemática*. Valdivia - Chile, 54-56.

Esteley, C.; Villarreal, M. & Alagia, H. (2004) *Extending linear models to non-linear contexts: an in-depth study about two university students' mathematical productions*. *Proceedingns of PME 28*. 2, 343-350.

Fischbein, E. (1989) Tacit models and mathematical reasoning. *For the learning of Mathematics*, 9, 2, 9-14.

Ginsburg, H. (1977). *Children's Arithmetic. How they learn it and how you teach it.* Pro-Ed.

Kontoyianni, K.; Modestou, M.; Erodotou, M.; Ioannou, P.; Constantinides, A.; Parisinos, M. & Gagatsis, A. (2006) Improper proportional reasoning: A comparative study in high school *Proceedings of PME 30*, 3, 465-472.

Lincoln, Y. & Guba, E. (1985). *Naturalistic Inquiry*. SAGE Publication.

Van Dooren, W; De Bock, D.; Janssens, D. & Verschaffel, L. (2005) Students' overreliance on linearity: an effect of school-like word problems? *Proceedings of PME 29*, 4, 265-272.

Van Dooren, W.; De Bock, D.; Hessels, A.; Janssens, D. & Verschaffel, L. (2004) Students' overreliance on proportionality: evidence from primary school pupils solving arithmetic word problems. *Proceedings of PME 28*, 4, 385-392.

Villarreal, M.; Esteley, C. & Alagia, H. (2005) As produções matemáticas de estudantes universitários ao estender modelos lineares a contextos não lineares. *Boletim de Educação Matemática* (*BOLEMA*), Año 18, N. 23, p.1 a 22

Mónica Villarreal. CONICET. Facultad de Matemática, Astronomía y Física.
Universidad Nacional de Córdoba.
mvilla@famaf.unc.edu.ar

Cristina Esteley. Instituto Académico Pedagógico de Ciencias Humanas.
Universidad Nacional de Villa María.
rguillet@arnet.com.ar

Humberto Alagia. Facultad de Matemática, Astronomía y Física.
Universidad Nacional de Córdoba.
alagia@mate.uncor.edu