El sentido de las funciones en la enseñanza

Alicia Fernández de Tassara, Patricia Detzel, María Elena Ruiz

Resumen

En este artículo haremos referencia a algunos aspectos de la enseñanza de funciones en el nivel medio. Intentaremos poner de relieve la importancia que tienen las situaciones problemáticas en la enseñanza, donde la función es una herramienta de resolución necesaria para modelizar relaciones entre distintas magnitudes. Finalmente, presentaremos a modo de ejemplo dos situaciones problemáticas, su resolución y análisis.

1 La enseñanza de las funciones en el nivel medio

Si se compara la presentación del tema "Funciones" en libros de texto del nivel medio se puede observar algunos cambios entre los libros que corresponden a años de la década del 80 o inclusive principios de los 90 con los más actuales.

Los primeros tienen una presentación formal que se adapta al modelo teoría-práctica, en donde primero se definen las nociones matemáticas que el alumno deberá retener, seguida de ejercicios elaborados exclusivamente para que pueda reconocerlas y utilizarlas sin ningún tipo de transformación. Para introducir el tema funciones, recurren a los diagramas de Venn dando una definición de función basada en la idea de correspondencia entre conjuntos, cabe aquí considerar la influencia que la teoría de conjuntos tuvo en la enseñanza en esos años. Además, las situaciones de empleo que se promueven se reducen a una ejercitación de rutinas y procedimientos casi algorítmicos que se ponen en funcionamiento sobre objetos parciales en que se ha dividido la noción de función tales como: dominio, fórmulas, elementos de sus representaciones gráficas.

Se observa, también en estos libros, que en general hay una ruptura entre el inicio del tema y el estudio de las funciones polinómicas: lineal, cuadrática, cúbica, etc., pues una vez introducida la noción de función como relación no se la usa más en este sentido. Cuando se retoma el tema, más tarde, con el estudio de las funciones polinómicas, hay un esquema que se repite: se tratan sus expresiones algebraicas, tablas, y representaciones gráficas, haciendo un análisis de los elementos particulares de cada uno de ellos. Los ejercicios y actividades que se dan aquí favorecen más el funcionamiento de esta noción como fórmula algebraica que como una relación entre conjuntos numéricos.

En cuanto al tratamiento del dominio de las funciones, en estos libros de textos, se pueden distinguir dos momentos: uno cuando se trabajan las funciones en el contexto de las relaciones (conjunto de salida o el conjunto formado por las primeras componentes de los pares ordenados de la relación) y el otro cuando se estudian las funciones de la forma:

$$\frac{P(x)}{Q(x)};\ \sqrt{P(x)};\ \frac{P(x)}{\sqrt{Q(x)}}$$

donde los alumnos han de realizar una transferencia de los algoritmos conocidos en la resolución de ecuaciones e inecuaciones.

Si se observa la presentación de las funciones en libros más actuales, en la mayoría de éstos, se comienza trabajando a partir de situaciones familiares a los alumnos, dando una explicación intuitiva primero para luego aproximarse a alguna definición de función. Ésta no siempre es explícita ni coincide en todos estos libros. Algunos siguen destacando la importancia de la unicidad de la imagen de cada elemento, otros destacan la idea de fórmula y otros dan en sus explicaciones la idea de relaciones entre magnitudes donde unas dependen de otras. Algunas actividades presentadas, como por ejemplo, el registro de temperaturas de un enfermo durante ocho días o el de un sorteo semanal que indica el número ganador para cada semana, si bien son ejemplos de funciones, para responder las preguntas planteadas en tales actividades, es suficiente con saber leer e interpretar un gráfico cartesiano. A pesar de ser situaciones enunciadas como un problema, no requieren para su resolución, de un trabajo en el sistema formal que involucre la noción de función, como lo proponemos más adelante al referirnos al esquema de Schoenfeld.

Coincidimos con G. Brousseau en que la apropiación de un concepto matemático por parte de un alumno no puede limitarse al conocimiento formal de definiciones, técnicas y demostraciones. Resulta imprescindible que los conocimientos hayan adquirido un sentido para él. El sentido se define no sólo por la colección de situaciones donde este conocimiento es realizado como teoría matemática o aquellos donde el sujeto lo usa como medio de solución, sino también por el conjunto de concepciones, de elecciones anteriores que rechaza, de errores que evita, ... (p.170)[5]. El alumno construye el sentido de las nociones conociendo sus ocasiones de empleo, a partir de las relaciones que establece con la noción matemática y la situación problemática. Pero para ello esta situación debe ser adecuada de modo que la noción que se quiere enseñar sea la más adaptada para dicha resolución.

2 Modelización de situaciones problemáticas

Por lo dicho anteriormente, creemos que ciertos problemas favorecerían un "aprendizaje con sentido de las funciones". Sería el caso de problemas que permitan a los alumnos explicitar la relación entre las variables, determinar variable dependiente e independiente y el conjunto en el cual tiene sentido la función. Que permitan, además, realizar e interpretar gráficos y/o tablas en forma global[1] [1], y poder resolverlo en distintos marcos: geométrico, gráfico, algebraico, numérico. Douady [3] define: un marco está constituído por los objetos de una rama de las matemáticas, por las relaciones entre los objetos, de sus formulaciones eventualmente diversas y de las imágenes mentales asociadas a estos objetos y estas relaciones (p.11).

[1]La interpretación global consiste en una lectura del gráfico como un todo, que implica el control de sus características generales en el dominio de la función: crecimiento, decrecimiento, extremos, continuidad, etc. Supone un razonamiento en un intervalo del dominio, no alcanza con un uso del gráfico como ábaco (punto a punto).

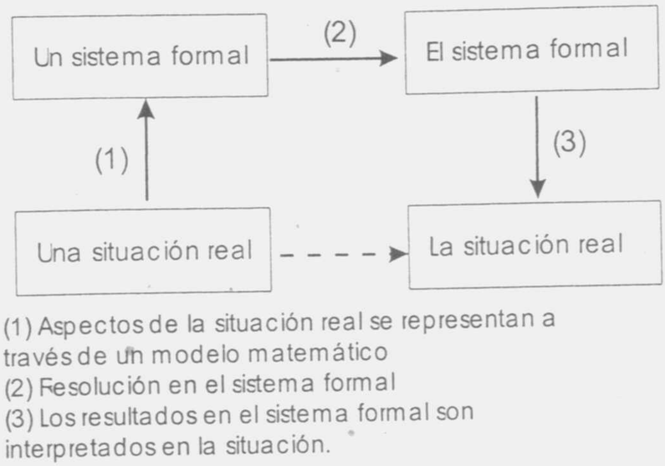


Figure 1: Esquema de Schoenfeld

Por ello, es importante considerar para la enseñanza de funciones problemas donde la función sea necesaria como modelizadora de situaciones.

Un esquema que nos ayuda a ver las relaciones entre la modelización de una situación y el tratamiento matemático del mismo es el que propone Schoenfeld [4] que se muestra en la Figura 1. Uno de los objetivos que plantea en su artículo es "acortar las fronteras entre la matemática formal y la informal" (p.311). El estudio de la situación real dada dependerá de la modelización de la misma, del tratamiento correcto que se haga en el sistema formal, de la interpretación de estos resultados y su transferencia a la situación que se está estudiando.

El sistema formal permitirá hacer un análisis de las características globales de la función, dónde crece, dónde decrece, cuán rápido lo hace, dónde toma valores extremos, cuál es el dominio. La modelización del fenómeno posibilita hacer previsiones y tomar recaudos necesarios cuando la magnitud que se estudia se acerca a valores que se consideran críticos.

Finalmente los resultados obtenidos del sistema formal se analizan atendiendo a la situación real.

A continuación presentaremos, a modo de ejemplo, dos situaciones problemáticas en las cuales interviene la noción de función para su resolución:

2.1 Problema 1

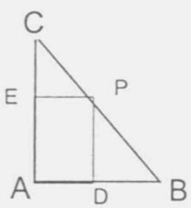
Dado el triángulo rectángulo ABC, cuyos catetos AB y AC miden ambos 11 cm, se marca un punto P cualquiera sobre la hipotenusa y se obtiene el rectángulo PDAE. Se quiere estudiar cómo varía el área del rectángulo cuando varía la posición de P

a) Dibujar una gráfica que represente la variación del área según la posición del punto P.

b) Encontrar una expresión matemática que represente de modo general la variación anterior.

c) Existe un valor para el cual el área es máxima? Justificar.

[Tomado de [2]]



Para pensar en cómo es la variación del área en función de la posición del punto P, se debería percibir que la posición del punto P determina una relación entre los valores x e y de los lados del rectángulo.

Existen distintos procedimientos para encontrar esta relación. En un marco numérico, se podría buscar, empíricamente, ejemplos de rectángulos que cumplan con la condición dada. Para esto se podría dibujar el triángulo rectángulo sobre papel cuadriculado, lo que permite visualizar los distintos rectángulos que determina el punto P. Luego se puede realizar un estudio numérico de la variación y la dependencia, organizando los valores encontrados en una tabla, como la que se presenta a continuación, observando con ello el crecimiento o decrecimiento, la monotonía, etc.

x	y	A
1	10	10
3	8	24
4	7	28
5	6	30
6	5	30
7	4	28

Tabla 1

A partir de esta tabla se podría inferir que la suma de x e y es siempre 11, con lo cual se puede establecer que

$$x + y = 11.$$

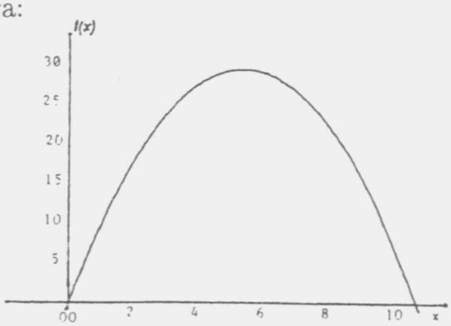
Esta misma relación se puede encontrar mediante otros procedimientos: en el marco geométrico, por comparación de triángulos semejantes o en el marco algebraico, considerando la recta que contiene al punto P y pasa por los puntos (0,11) y (11, 0) cuya ecuación es

$$y = 11 - x.$$

Finalmente, una vez hallada esta relación entre las variables x e y, por cualquier procedimiento, sabiendo que el área de un rectángulo es igual al producto de las longitudes de sus lados, en este caso $x \,.\, y$, se puede obtener

$$A(x) = x.(11 - x) = 11x - x^2,$$

cuyo dominio es un subconjunto de R: $x \in [0, 11]$, siendo su gráfica la que se observa en la figura:



La respuesta al inciso c) se puede pensar desde distintos marcos: en un marco gráfico, la absisa del vértice de la parábola muestra que ese es el valor que hace máxima el área.

2.1.1 Consideraciones del Problema 1

En este primer problema no se aplican los conocimientos en forma rutinaria, sino debe adaptarse a un planteo que no satisface las condiciones habituales en la enseñanza. Aquí se hace necesario identificar las relaciones pertinentes a partir de la búsqueda de regularidades para establecer la función correspondiente.

Se trata de una situación presentada en un marco geométrico, familiar a los alumnos, en la que se incluye conocimientos que éste posee: la fórmula del área de los rectángulos. El hecho de solicitar la expresión matemática que represente de modo general la variación solicitada, da la posibilidad de un cambio de marco, en este caso, el paso del marco geométrico al algebraico [3].

Se observa que trabajar sobre las figuras geométricas (triángulo y rectángulo) permite ver la variación del área del rectángulo en función de la variación de sus lados (figura 2). Se necesitan múltiples dibujos geométricos para intentar dar una aproximación a la simulación, al cambio; sin embargo, un solo gráfico, el de la función cuadrática permite representar dicha variación.

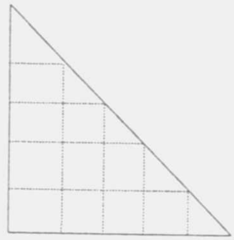


figura 2

El trabajo en el sistema formal comienza con la determinación de las variables en juego, para poder utilizar la función como una herramienta de modelización a través de su representación gráfica y algebraica. Se debe transformar una fórmula geométrica

$$A = b \times h$$

en una función matemática. Según Chevallard (citado en [2]) hay una "filiación" entre fórmula y función, que surge desde el momento en que se investigan los diferentes dominios de validez de una fórmula, bien a través de sus variables, o de sus parámetros.

Este problema además exige la consideración de la situación real para la determinación del dominio. Dado que la función es una cuadrática se podría pensar que el dominio son todos los números reales, pero en esta situación como la variable es una longitud, ésta debe tomar sólo valores positivos, pero además, como depende de la posición del punto P, el dominio es [0,11].

2.2 Problema 2

En este problema también se debe transformar una fórmula geométrica en una función matemática.

> *Se debe construir una pista de atletismo con dos segmentos rectos y dos semicirculares, como lo muestra la figura. El radio de*

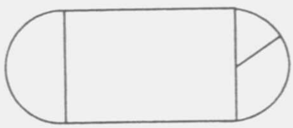
cada segmento circular es r . La longitud de la pista debe ser de 1 km.

a) Encontrar la expresión matemática que represente la variación del área cubierta por la pista según la variación de r.

b) Qué valores puede tomar r?, $r = \frac{3}{4\pi}$ es un valor posible? Justificar.

c) Graficar la función.

d) Existe un valor para el cual el área es máxima? Justificar.



Analicemos su resolución, en el sistema formal, teniendo en cuenta que son funciones. Si llamamos L a la longitud de la pista, tenemos una primer fórmula

$$L = 2a + 2\pi r = 1$$

por lo tanto

$$a = \frac{1 - 2r\pi}{2},$$

luego la variación del lado según el radio está dada por la función:

$$a(r) = \frac{1 - 2r\pi}{2} \quad \text{con} \quad 0 < r < \frac{1}{2\pi},$$

considerando a (medida del lado) positiva. Entonces, la longitud del lado a toma valores entre 0 y 1/2.

Por otra parte sabemos que el área encerrada por la pista circular está dada por la siguiente fórmula:

$$A = 2ar + \pi r^2,$$

luego la variación del área según el radio r es la función:

$$A(r) = 2r\frac{1 - 2\pi r}{2} + \pi r^2 = r - \pi r^2$$

Con respecto a los posibles valores de r vemos que si nos quedáramos con los resultados del sistema formal sin atender a la situación real, la representación gráfica de esta función, sería una parábola que tiene su vértice en $(\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{4\pi})$, es decreciente en $(\frac{1}{2\pi}, +\infty)$, creciente en $(-\infty, \frac{1}{2\pi})$ y su dominio es R.

Como el área debe ser positiva entonces podríamos suponer que el dominio de esta función es $(0, \frac{1}{\pi})$.

Pero, la pregunta es $r = \frac{3}{4\pi}$ un valor posible de r? permite ver que el dominio dado no es correcto. Pues si

$$r = \frac{3}{4\pi}$$

el área encerrada por la pista da

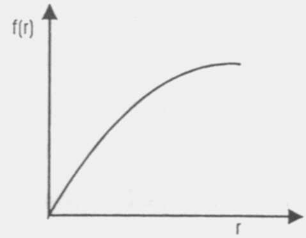
$$\frac{3}{16\pi} km^2$$

sin embargo para este valor de r, la longitud del lado a es -1/4 km.

Esto se debe a que en esta situación la longitud del lado a depende del radio r y como esta longitud debe ser positiva, los posibles valores de r están entre 0 y $\frac{1}{2\pi}$.

Luego, el dominio de la función será $(0, \frac{1}{2\pi})$ y no $(0, \frac{1}{\pi})$ encontrado anteriormente cuando analizábamos el dominio de la función cuadrática sin tener en cuenta la situación real.

En consecuencia, la gráfica de la función que representa la variación del área cubierta por la pista según la variación de r es la siguiente:



En relación a la última pregunta, vemos que hay que considerar si r y a son necesariamente positivos, lo que permitiría mantener la forma de la pista (2 segmentos rectos y 2 segmentos circulares), en ese caso no habría valor de r que haga máxima el área. Si se acepta que $r = 0$ ó el lado $a = 0$, el valor de r que hace máxima el área, es $r = \frac{1}{2\pi}$. En este caso la forma de la pista sería una circunferencia.

2.2.1 Consideraciones del Problema 2

Este problema tiene la riqueza de permitir un análisis del dominio y de poder percibirlo como parte constitutiva de la función. Vemos entonces que en la definición del dominio inciden diversas cuestiones:

- el dominio matemático, o sea las restricciones propias de la fórmula o su expresión algebraica.

- limitaciones debidas a las variables que intervienen, por ejemplo si éstas son magnitudes físicas como una longitud, debe ser no negativa.

- limitaciones propias de la situación que modeliza, en nuestro ejemplo, no alcanzaba la restricción del área positiva, sino que era necesario contemplar también que la longitud del lado a sea positiva y para ello debía ser el radio menor que $\frac{1}{2\pi}$.

3 Conclusión

Pensamos, entonces, que una manera de dar sentido a la función es que en la resolución de problemas, aparezca como el medio mejor adaptado para llegar a la solución. Se podrían considerar, para su enseñanza, aquellas situaciones en las que las funciones sirvan de modelo para el estudio del comportamiento de un fenómeno y aquellas en las cuales las funciones numéricas permitan expresar la dependencia entre las variables. Así, la función toma sentido para analizar infinitos casos, para interpolar o extrapolar, para anticipar resultados, etc.

Sin embargo, luego de trabajar la enseñanza de las funciones de esta manera, es importante también el tratamiento de esta noción como objeto. Es decir, en un contexto puramente matemático donde la función sea un objeto a ser estudiado por sus propiedades y su relación con otras nociones.

References

[1] Duval, R., *Graphiques et Equations: La articulation de deux registres*, Annales de Didactique et de Sciences cognitives, Irem de Strasbourg, pp.235–253, 1988

[2] Ruiz Higueras, L., *Concepciones de los alumnos de secundaria sobre la noción de función: análisis epistemológico y didáctico* , Tesis doctoral, Universidad de Granada, Granada, 1993.

[3] Douady, R., "Jeux des cadres et dialectique outil-objet", R.D.M., Vol. 7–2, pp.5–31, 1986.

[4] Schoenfeld, A., *Informal Reasoning and education.*"On Mathematics as Sense-Making: An Informal Attack on the Unfortunate Divorce of Formal and Informal Mathematics". Lawrence Eerlbaum Associates, Publishers. New Jersey. London, 1991.

[5] Brousseau, Guy, *Les obstacles epistemologiques et les problemes en mathematiques*, R.D.M., Vol. 4-2, La Pensée Sauvage, 1983.

atassara@uncoma.edu.ar

pdetzel@uncoma.edu.ar

meruiz@arnet.com.ar

Universidad Nacional del Comahue. Facultad de Economía y Administración. Departamento de Matemática. Neuquén.