Enfoques geométricos a ecuaciones de segundo grado en otros tiempos y lugares

Carlos Alberto Mansilla(*) - Norma Emilia Vega(**)

La matemática evoluciona, pero las técnicas que sobreviven son las más poderosas y generales. Las razones por las cuales enseñamos la manipulación simbólica del álgebra es debido a su eficiencias y no tiene nada que ver con el desarrollo histórico de los problemas a resolver.

Consideremos el siguiente problema:
Un terreno rectangular tiene un perímetro de 40 metros y un área de 96 metros cuadrados. ¿Cuáles son las dimensiones del terreno?

La solución moderna incluye dos variables, una de las cuales se elimina para conseguir una ecuación cuadrática.

$$x^2 - 20x + 96 = 0$$

Esta ecuación se puede resolver factoreando o aplicando la resolvente de la ecuación de segundo grado.
Históricamente, este procedimiento podría ser incomprensible para alguien que desconociera las modernas técnicas algebraicas.
Las habilidades para representar cantidades con letras y trabajar en álgebra con esos símbolos tienen en realidad muy poca relación con el problema de hallar las dimensiones de un objeto físico. Las técnicas algebraicas se enseñan por su utilidad de cálculo, no solamente a problemas con la ecuación de segundo grado sino también con las lineales y las cúbicas, también en las relacionadas con funciones, raíces cuadradas y otras forma más complicadas.
En este trabajo, nos concentraremos en problemas relacionados con la ecuación de segundo grado.
Antes que la manipulación simbólica ampliamente difundida en matemática, los matemáticos podían resolver problemas con ecuaciones de segundo grado. Las técnicas generalmente estaban relacionadas con encarar el problema desde el punto de vista geométrico.
Si bien no podemos dejar de reconocer la gran eficiencia de los métodos simbólicos, existen muchas razones para estudiar las soluciones de una ecuación de segundo grado desde el punto de vista geométrico. Una de ellas que la visualización le puede brindar más significado al problema. Además, una exploración histórica de las técnicas geométricas pueden servir para explicar el método de completar el

cuadrado y la obtención de la resolvente. Finalmente, podemos decir que nuestra experiencia en el salón de clases muestra que un enfoque histórico despierta el interés de los alumnos.

Se describirán a continuación algunas técnicas geométricas de la antiguas Babilonia, Grecia clásica, Arabia medieval, y la moderna Europa en sus primeros años, que podrían realzar la parte de ecuaciones de segundo grado en l dictado del álgebra. No es propósito del presente trabajo reemplazar en enfoque simbólico sino ofrecer alternativas.

Álgebra Geométrica

El álgebra geométrica es la rama de la matemática que utiliza conceptos geométricos y pruebas como apoyo a las técnicas algebraicas. Si bien las ideas de álgebra geométrica estaban claramente presentes en Asia, Mesopotamia y Egipto mucho tiempo antes, la Grecia clásica es quien tiene el mérito de su desarrollo. Cuando resolvemos geométricamente una ecuación de segundo grado estamos haciendo Álgebra geométrica.

En el mundo del álgebra geométrica, las cantidades, sean números fijos o incógnitas, se representan por objetos físicos, generalmente segmentos, cuya longitud, relacionada con una unidad fija, es el número en cuestión. Así, el producto de dos números se representa por el área de un rectángulo, y el producto de tres cantidades se interpreta como el volumen de un prisma rectangular. Esta interpretación es el origen del nuestro uso de las palabras cuadrado y cubo para las potencias de exponente dos y tres. Como las longitudes, área y volúmenes son números positivos, el álgebra geométrica trata exclusivamente con números positivos y valores positivos de las incógnitas.

La Figura 1 es un ejemplo del álgebra geométrica, que ilustra la identidad

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

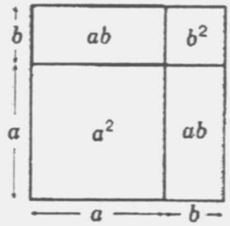

Figura 1

Un ejemplo de álgebra geométrica:

la identidad $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Una generalización de esta figura se puede utilizar para ilustrar el procedimiento de multiplicar dos binomios. El ejemplo se puede ver en la Figura 2.

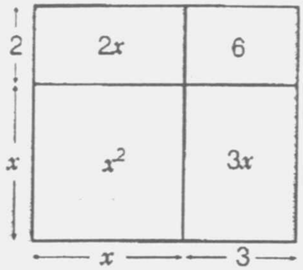

Figura 2

$$(x+3)(x+2)=x^2+2x+3x+6=x^2+5x+6$$

El hecho que el álgebra geométrica trata solo con números positivos, tiene ciertas implicaciones sobre la forma en que son enunciado los problemas. Por ejemplo, si deseamos resolver la ecuación $x^2+5x-36=0$ geométricamente, será mejor enunciarla en la forma $x^2+5x=36$, como se muestra en la Figura 3.

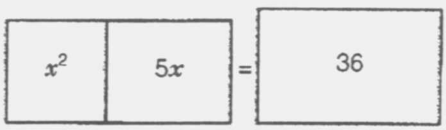

Figura 3

$$x^2+5x=36$$

Clasificación de las ecuaciones de segundo grado

Si dividimos una ecuación de segundo grado por el coeficiente de x^2, la ecuación asume la forma $x^2+bx+c=0$. Sin embargo, como el álgebra geométrica requiere por naturaleza que los coeficientes y las raíces sean positivas, debemos dividirlas en casos para poder resolverlas geométricamente. Existen cinco casos en los cuales b y c son siempre positivos, son los siguientes:

(1) $x^2 = bx$

(2) $x^2 = c$

(3) $x^2 = bx + c$

(4) $x^2 + c = bx$

(5) $x^2 + bx = c$

Como cero no es una solución aceptable en álgebra geométrica, $x = b$, es la única solución en el caso (1). En el caso (2) la raíz positiva de c es la única solución: debe ser construida geométricamente desde que estamos trabajando de esa manera. Centraremos aquí nuestra atención antes de considerar los casos (3), (4) y (5).

Construcción de la $\sqrt{c}$

En *Los Elementos,* escritos alrededor de 300 AC., Euclides expresó casi todo el razonamiento matemático de manera geométrica. En esta parte se realizará una compilación de la matemática de los griegos comenzando con Thales (625-547 AC.). La construcción de la Figura 4 se puede encontrar en *Los Elementos.*

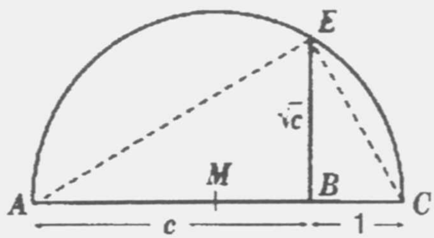

Figura 4
Construcción de un segmento, cuya longitud es la raíz cuadrada de uno arbitrariamente dado

Se puede construir un segmento, la longitud del cual es la raíz cuadrada de otro, dados el segmento y el segmento unidad, de la siguiente manera:

- Construya $\overline{AB}$ con la longitud igual a c.
- Prolongue $\overline{AB}$ desde B hasta C de tal manera que longitud $(BC) = 1$.
- Marque el punto M en el medio de $\overline{AC}$.
- Con centro en M y radio $\overline{AM}$, construya un semicírculo.

- Trace una perpendicular a $\overline{AC}$ en el punto B. Llame E el punto donde la perpendicular interseca al semicírculo. Entonces longitud $(BE) = \sqrt{c}$.

Demostramos que esta construcción de la longitud deseada, mostrando que los triángulos BCE y BEA con semejantes, aunque Euclides no utilizó este método de prueba:

- $\angle EBC$ y $\angle EBA$ son ángulos rectos por construcción, en consecuencia son congruentes.
- $\angle CEA$ es un ángulo recto porque está inscripto en un semicírculo.
- $\angle C$ y $\angle BEA$ son ambos complementarios a $\angle CEB$, entonces son congruentes.
- Por lo tanto, los triángulos son semejantes.

Como (BE = longitud (BE))

$$\frac{|BC|}{|BE|} = \frac{|BE|}{|BA|}$$

$$\frac{1}{|\mathrm{BE}|} = \frac{|BE|}{c} \Rightarrow |BE|^2 = \mathrm{c} \Rightarrow |BE| = \sqrt{c}\,.$$

Aplicaciones de áreas

El método clásico griego para resolver ecuaciones de segundo grado del tipo (3), (4) y (5) se llama aplicación de áreas, y se le atribuye a Pitágoras o por lo menos a su escuela matemática. Desarrollaremos la técnica aplicada en el caso (3), $x^2 = bx + c$, como se ilustra en la Figura 5.

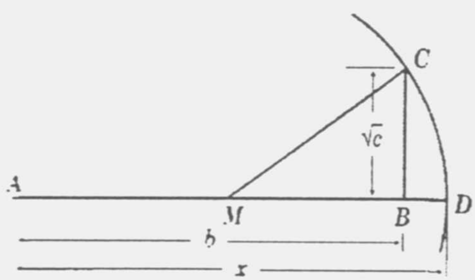

Figura 5
Aplicación de áreas:
$x^2 = bx + c$

- Construya $\overline{AB}$ con $|AB| = b$.
- Trace un segmento perpendicular $\overline{CB}$ a $\overline{AB}$, con longitud $(CB) = \sqrt{c}$.
- Marque el punto M medio de $\overline{AB}$.
- Con centro M y radio $\overline{MC}$, construya una circunferencia.
- Indique como D el punto donde la circunferencia corta la extensión de $\overline{AB}$. Luego $x = |AD|$.

Una justificación geométrica para aplicación de áreas.

¿Por qué en la antigua Grecia se referían a la construcción de la Figura 5 como "aplicación de áreas"?
El término bx en la ecuación (3) representa el área de un rectángulo. El segmento b es dado, cuando construimos el de longitud x perpendicular al dado, completamos el rectángulo. Como las perpendiculares tienen longitud x, el área es bx.
Para mostrar que $x^2 = bx + c$, debemos mostrar que el rectángulo bx mas otro rectángulo de área c, hacen un cuadrado de lado x, cuya área es x^2. Véase la Figura 6, en la cual a $\overline{AB}$ se le dio la longitud b, y $\overline{AD}$ tiene longitud x. Trazamos los segmentos perpendiculares $\overline{AE}$ y $\overline{DG}$, ambos de longitud x, para construir un cuadrado $AGDE$ de área x^2. Como el rectángulo $ABFE$ tiene área bx, necesitamos mostrar que el rectángulo $BDGF$ tiene área c. Por construcción $|MD| = |MC|$ (C sobre FB). En consecuencia, el cuadrado de lado $\overline{MD}$, tal como $MDHJ$, tiene la misma área que un cuadrado de lado $\overline{MC}$, tal como el cuadrado 3.
Por el teorema de Pitágoras, la suma de las áreas del cuadrado 1 ($MBLK$) y el cuadrado 2 es igual al área del cuadrado 3, el cual es igual al área de $MDHJ$. En consecuencia, si sustraemos el cuadrado $MBLK$ del cuadrado $MDHJ$, el área restante tiene la misma área que el cuadrado 2, el cual es c por construcción.

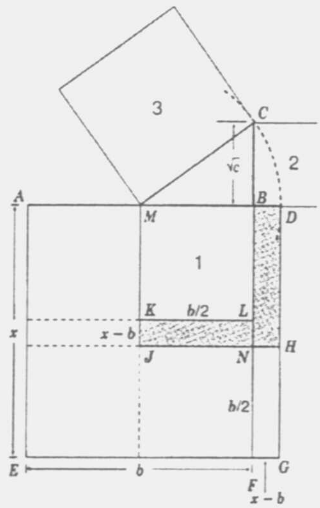

Figura 6
Aplicación de áreas

En entonces, la figura sombreada en forma de L al revés *BDHJKL* que se ve en la Figura 6, tiene área *c*. Tomando el rectángulo *JKLN* y llevándolo sobre el rectángulo congruente *BDGF*, mostramos que el rectángulo *BDGF* tiene área *c*, que es el resultado buscado.

La solución Babilónica a la ecuación de segundo grado

Los escribas de la antigua Babilonia, territorio que está actualmente incluido en Irak, fueron excelentes matemáticos. Existen muchísimos registros arqueológicos que dan cuenta de sus avances muy temprano en el segundo milenio AC., particularmente en los tiempos de Hamurabí, alrededor del 1700 AC. Podían resolver una gran cantidad de problemas con ecuaciones de segundo grado, tales como: si la suma de dos números es 20 y el producto es 96, cuáles son esos números.
Esta es una versión disfrazada del problema sobre perímetro y área visto anteriormente. Cuando los números representan las longitudes de los lados de un rectángulo, su suma es el semiperímetro. Si dos números x e y tienen una suma b y un producto c, sustituyendo $y = b - x$ en el producto $xy = c$, tenemos:

$$x^2 + c = bx$$

En consecuencia, el problema es de tipo (4). Cualquier problema de este tipo puede ser puesto en forma de áreas y semiperímetros, o de sumas y productos.

Los babilonios resolvían este problema suponiendo que x es 10 e y es 10. Como sabemos que x e y deben sumar 20, la suposición es razonable. Sin embargo no es correcta, porque un cuadrado de 10 metros en cada lado tendrá un área de 100 metros cuadrados. Si a 100 le restamos el área dada 96, da una diferencia de 4 metros cuadrados. Extraemos la raíz cuadrada de 4, que puede ser hallada geométricamente, y se la sumamos a x. En consecuencia, tenemos $x = 10 + 2$ o sea 12. Tomamos el mismo valor 2 y lo sustraemos de y. Entonces $y = 10 - 2$, o sea 8. Estamos en condiciones de afirmar que la respuesta es correcta, porque $x+y=12+8$ o sea 20, y $xy=12\times 8$, o sea 96.

Esta solución en realidad no conlleva ninguna geometría. Los escribas babilonios no utilizaban figuras para resolver este problema. En lugar de ello utilizaban un algoritmo que manipulaba los números 20 y 96 para obtener las dimensiones. Vea la Figura 7.

1. Divida la suma S por la mitad	$S/2$
2. Eleve al cuadrado la respuesta de la parte 1	$(S/2)^2$
3. Sustraiga el producto A del resultado del paso 2	$(S/2)^2 - A$
4. Tome la raíz cuadrada del resultado de la parte 3	$\sqrt{(S/2)^2 - A}$
5. Sume la respuesta de la parte 4 a la respuesta de la parte 1 para determinar una dimensión de la figura.	$S/2+\sqrt{(S/2)^2 - A}$
6. Sustraiga la respuesta de la parte 4 de la respuesta de la parte 1 para determinar la otra dimensión del campo.	$S/2-\sqrt{(S/2)^2 - A}$

Figura 7
Algoritmo Babilónico

En la Figura 8 se da una justificación geométrica: un cuadrado de lado $b/2$ tiene el perímetro deseado b. El valor $(b/2)^2$ excede el área deseada en la cantidad $(b/2)^2 - c$, el cual es el área del cuadrado no sombreado de tamaño z, en el extremo izquierdo. La figura sombreada restante puede ser reconstruido en un rectángulo, como se indica. Las dimensiones del rectángulo son:

$$x = \frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} - c} \quad - \quad x = \frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} - c}$$

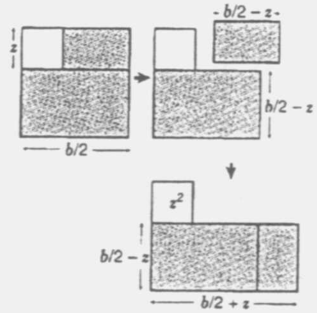

Figura 8
Una justificación geométrica

Este procedimiento es prácticamente una derivación de la resolvente de la ecuación de segundo grado. Como la ecuación resuelta es $x^2 - bx + c = 0$ cuando se coloca en la forma usual, un signo positivo aparece delante del término $b/2$.

Al-Khwarizmi y completar el cuadrado

En el siglo noveno, Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi (780-850) escribió el primer libro islámico de álgebra, *El cálculo de al-Jabr y al-Muqabala.* la expresión *al-jabr* en el título dio orígenes a la actual palabra *álgebra*. En este libro sobre resolución de ecuación, al-Khwarizmi brinda detalladas explicaciones sobre la resolución de ecuación de segundo grado.

La matemática islámica en esos tiempos no aceptaba números negativos ni como coeficientes ni como raíces; tuvieron que pasar trescientos años antes que al-Samaw´al introdujera coeficientes negativos. Las soluciones algebraicas tuvieron que llevarse a cabo por casos, como se hizo en las resoluciones geométricas. En realidad, los casos listados anteriormente fueron los mismo que hizo al-Khwarizmi.

En general, utilizaron el método que conocemos como completar el cuadrado, para los casos (3), (4), y (5). Utilizaron la demostración geométrica para mostrar que el método algebraico tiene sentido. Veamos el método aplicado a la ecuación $x^2 + 10x = 39$, la cual es de tipo (5).

- Comenzamos con un cuadrado de área x^2, o sea, de lado x.
- Sume dos rectángulos, con cada lado de valor 10/2, o sea 5, y el otro lado x.

- El área total sombreada es $x^2 + 2(5x)$, o $x^2 + 10x$, expresión del lado izquierdo de la ecuación. En consecuencia el área total es 39.
- En la Figura 9, en el rincón superior derecho hay un cuadrado de lado 5, o sea de área 25. Agregando este cuadrado al dibujo, completamos el cuadrado y tenemos un área total de $x^2 + 2(5x) + 25$. Como agregamos 25 al área original de 39, el área del cuadrado más grande es 64, y podemos escribir:

$$x^2 + 10x + 25 = 64$$

Como el lado del cuadrado grande tiene una longitud $x + 5$, su área es $(x+5)^2$.

Podemos concluir entonces:

$$(x+5)^2 = 64$$
$$x + 5 = 8$$
$$x = 3$$

Como el tratamiento se realizó en forma de álgebra geométrica, el procedimiento confirma solamente el valor positivo de x.

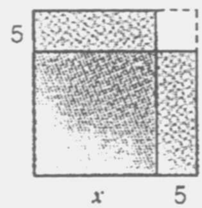

Figura 9
Agregando el pequeño cuadrado blanco al dibujo
se completa el cuadrado dando
$x^2 + 10x + 25 = 64$

Construcción de Descartes

En el siglo XVII, en su primer libro *La Géometrie*, René Descartes (1596-1650) describió un procedimiento geométrico para encontrar la solución de la ecuación de segundo grado $x^2 + bx = c$. A pesar de su relación con Descartes, la construcción no utiliza ejes cartesianos; como los trabajos anteriores, muestra solo la raíz positiva.

La construcción se realiza como sigue:

Construya $\overline{AB}$ con con $|AB| = \sqrt{c}$.

Trace $\overline{AC}$, perpendicular a $\overline{AB}$, con $|AC| =$ b/2 .

Construya una circunferencia de centro C y radio $\overline{AC}$.

Construya la recta determinada por los puntos B y C, que interseca a la circunferencia en los puntos E y D. Luego $x = |BE|$.

Vea la Figura 10 .

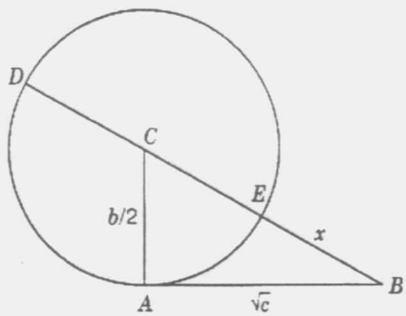

Figura 10
Construcción de Descartes

Se puede justificar que $x = |BE|$ utilizando el teorema de la tangente - secante o algebraicamente aplicando el Teorema de Pitágoras al triángulo ABC.
Para los alumnos que conocen el teorema de la tangente - secante, que dice que si se trazan una tangente y una secante a una circunferencia desde un punto exterior a ella, la longitud del segmento tangente es medio proporcional entre la longitud del segmento secante y la longitud del segmento externo de la secante.
A continuación realizamos la verificación que $x = |BE|$:

$$\frac{|BD|}{|AB|} = \frac{|AB|}{|BE|}$$

$$\frac{x+b}{\sqrt{c}} = \frac{\sqrt{c}}{x} .$$

Multiplicando los extremos y los medios, tenemos que

$$x(x+b)=\left(\sqrt{c}\right)^2 \text{ o sea } x^2+bx=c.$$

Una alternativa algebraica puede ser utilizar el Teorema de Pitágoras.

Por construcción, el triángulo ABC es rectángulo, en consecuencia:

$$|CB|^2 = |AC|^2 + |AB|^2$$

$$\left(x+\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{c}\right)^2$$

$$x^2 + bx + \frac{b^2}{4} = \frac{b^2}{4} + c$$

$$x^2 + bx = c$$

La construcción de Descartes se puede utilizar para resolver la ecuación $x^2 = bx + c$, en cuyo caso $x = |BE|$.

Se puede notar que hay mucha similitud entre esta última construcción y la solución por aplicación de áreas.

Método de Carlyle

Si bien el método de Descartes no utiliza las coordenadas cartesianas, el procedimiento que veremos a continuación, ideado por Thomas Carlyle (1775 - 1881), si lo hace. La construcción resuelve la ecuación $x^2+bx+c=0$ para todos los valores reales de *b* y *c*; además muestra cuando las soluciones no son reales.

- En un papel cuadriculado, marque los puntos $A = (0, 1)$ y $B = (-b,c)$.
- Marque el punto M en el medio de $\overline{AB}$.
- Construya una circunferencia con centro M y radio $\overline{AM}$.
- Llama P y Q los puntos donde la circunferencia corta el eje x.

Vea la Figura 11

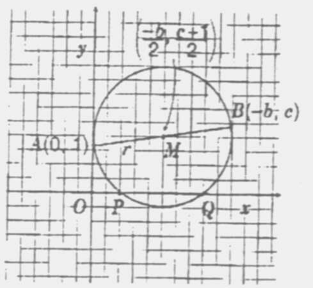

Figura 11
Método de Carlyle

Las abcisas de *OP* y *OQ* representan las soluciones de la ecuación si la ecuación tiene raíces reales. La verificación utiliza la geometría de las coordenadas utilizando el hecho que la circunferencia tiene radio $|AB|/2$; su centro es el punto medio de $\overline{AB}$, y para cualquier solución x de la ecuación, $(x, 0)$ pertenece a la circunferencia. Eligiendo diferentes valores de (b, c), podemos dibujar distintos casos donde la circunferencia corta el eje x en dos puntos, tangencialmente en un punto y que no lo corta. Estos resultados se obtienen cuando el radio es, respectivamente, mayor, igual o menor que la distancia entre el centro de la circunferencia y el eje x, o sea $|c-1|/2$.

Esta condición muchas veces no puede ser comprendida por alumnos de nivel medio, pero sí pueden experimentar con diferentes valores de b y c y apreciar la relación entre los coeficientes de la ecuación de segundo grado y lo número de soluciones. Como comenzamos dividiendo por a, cualquier solución no está en realidad relacionada con los tres coeficientes.
Esta experiencia puede introducir a la discusión sobre la naturaleza del discriminante, donde se desarrollan esas relaciones.

Una justificación del método de Carlyle

Si r es el radio de la circunferencia de la figura 11, resulta $r = |AB|/2$. En consecuencia:

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{(-b-0)^2+(c-1)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{b^2+(c-1)^2}}{2} .$$

El centro de la circunferencia es el punto medio de $\overline{AB}$, cuyas coordenadas son:

$$\left(\frac{-b}{2}, \frac{c+1}{2}\right).$$

Si $(x, 0)$ es un punto que pertenece a una circunferencia con este radio y centro, entonces

$$\left(x-\frac{-b}{2}\right)^2+\left(0-\frac{c+1}{2}\right)^2 = r^2,$$

$$\left(x+\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{c+1}{2}\right)^2 = \frac{b^2+(c-1)^2}{4},$$

$$\left(x+\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{b^2+(c-1)^2-(c+1)^2}{4},$$

$$\left(x+\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{b^2-4ac}{4},$$

$$x^2+bx+\frac{b^2}{4} = \frac{b^2}{4}-c,$$

$$x^2+bx+c=0 .$$

Bibliografía

BOYER Carl B. *Historia de la matemática.* Madrid. Alianza Editorial S.A. 1996.

DESCARTES René. *The Geometry of René Descartes.* Traducción al inglés realizada por David Eugene Smith y Marcia Latham. New York. Dover Publications. 1954.

EVES Howard. *An Introduction to the History of Mathematics.* Philadelphia. Saunders College Publishing. 1992.

FLAX Rosabel. "A Squeeze Play on Quadratic Equations". *Mathematics Teacher 75* (Febrero 1982). 132-134.

KLINE Morris. El pensamiento matemático, desde la antigüedad a nuestros días. Versión de Mariano Martínez, Juan Tarrés y Alfonso Casal. Madrid, Alianza Editorial. 1992.

(*) Instituto Superior del Chaco.

(**) Instituto de Nivel Terciario "San Fernando Rey"
Resistencia, Chaco.