Dimensión del espacio de los cuadrados mágicos de orden n

Gustavo Piñeiro

Resumen: Demostraremos en este artículo que el espacio vectorial de los cuadrados mágicos de orden n, si $n > 2$, tiene dimensión $n(n - 2)$. Para $n = 2$ la dimensión es 1.

1. Introducción

En el artículo *Los Espacios Vectoriales, los Cuadrados Mágicos y las Progresiones Aritméticas*, publicado en el volumen 16, N° 2 (2001) de esta misma revista, su autora, Estela Sonia Aliendro, demuestra que el conjunto de todos los cuadrados mágicos de orden n es un subespacio del espacio vectorial de las matrices cuadradas de orden n. En ese artículo se muestra además una base, formada por 3 matrices, para el espacio de los cuadrados mágicos de orden 3.

Basados en la lectura de ese artículo, Élida Ferreyra y Jorge Vargas, en la editorial de ese mismo número de la revista, plantearon el problema de determinar la dimensión del subespacio de los cuadrados mágicos de orden n. Nuestro objetivo en este trabajo es dar solución a ese problema. Mostraremos, de hecho, que la dimensión de ese subespacio es $n(n - 2)$ para $n > 2$ y que la dimensión es 1 para $n = 2$.

2. Ecuaciones para los cuadrados mágicos

Como es habitual, llamaremos $\boldsymbol{R}^{nxn}$ al espacio vectorial de las matrices cuadradas de orden n con coeficientes reales (dotado con las operaciones usuales) y $A = (a_{ij})$ a las matrices que lo forman. Tal como esta indicado en los textos de álgebra, todo subespacio de $\boldsymbol{R}^{nxn}$ es el conjunto de soluciones de algún sistema homogéneo de ecuaciones lineales (cuyas incógnitas representan coeficientes de una matriz genérica de $\boldsymbol{R}^{nxn}$).

El espacio vectorial $\boldsymbol{R}^{nxn}$ tiene dimensión n^2. En consecuencia, si un subespacio W es el conjunto de soluciones de un sistema formado por m ecuaciones linealmente independientes, podemos asegurar que la dimensión de W es igual a $n^2 - m$. Nuestra estrategia será entonces demostrar que el subespacio de los cuadrados mágicos de orden n (si n > 2) es el conjunto de soluciones de un sistema de 2n ecuaciones linealmente independientes. Podremos deducir entonces que su dimensión es $n^2 - 2n = n(n-2)$.

Si $A = (a_{ij})$ es una matriz de $\boldsymbol{R}^{n\mathrm{x}n}$, llamaremos F_k a la suma de los coeficientes de la fila k-ésima de A, llamaremos C_k a la suma de los coeficientes de la columna k-ésima de A, D_1 a la suma de la diagonal principal (que corre desde el vértice superior izquierdo hasta el inferior derecho) y D_2 a la suma de los coeficientes de la diagonal restante (que llamaremos diagonal secundaria). Es decir:

$$F_k = \sum_{j=1}^{n} a_{kj}\,, \quad C_k = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}\,, \quad D_1 = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}\,, \quad D_2 = \sum_{i=1}^{n} a_{i(n-i+1)}\,.$$

Definición: Una matriz $A = (a_{ij})_{1\le i,\, j\le n}$, es un cuadrado mágico de orden n si todos los números $F_1, \ldots, F_n$, $C_1, \ldots, C_n$, D_1 y D_2 coinciden.

De esto, A es un cuadrado mágico si existe un número P tal que

$$\begin{gathered} F_1 = \ldots = F_n = P \\ C_1 = \ldots = C_n = P \\ D_1 = D_2 = P. \end{gathered}$$

Llamemos S a la suma de los coeficientes de A, $S = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}$ se tiene que

$$P = \frac{1}{n} S.$$

Debemos entonces establecer el sistema de ecuaciones que define al subespacio de los cuadrados mágicos de orden n. Es claro que toda matriz de n x n que es un cuadrado mágico satisface el siguiente sistema (1)-(2)-(3) de ecuaciones lineales:

$$(1)\ \begin{cases} F_1 - P = 0 \\ F_2 - P = 0 \\ \ldots \\ F_{n-1} - P = 0 \end{cases} ;\ (2)\ \begin{cases} C_1 - P = 0 \\ C_2 - P = 0 \\ \ldots \\ C_{n-1} - P = 0 \end{cases} ;\ (3)\ \begin{cases} D_1 - P = 0 \\ D_2 - P = 0 \end{cases}.$$

Recíprocamente, si una matriz satisface el sistema (1)-(2)-(3), entonces es necesariamente un cuadrado mágico. En efecto, si una matriz A satisface todas las ecuaciones (1), entonces todas sus filas desde la primera hasta la (n – 1)-ésima tienen la misma suma (esta suma es P) y de ello se deduce inmediatamente que la suma de la fila n-ésima es también igual a P, ya que:

$$F_n = S - \sum_{k=1}^{n-1} F_k = S - \sum_{k=1}^{n-1} P = S - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n} S = S - \frac{n-1}{n} S = \frac{1}{n} S = P.$$

Análogamente se demuestra que las ecuaciones (2) implican que $C_n = P$. Las ecuaciones (3) implican que las dos diagonales tienen también suma igual a P. En consecuencia, como habíamos afirmado, toda matriz A que satisfaga (1)-(2)-(3) es un cuadrado mágico.

Podemos afirmar entonces que el subespacio de las matrices cuadradas de orden n es el conjunto de soluciones del sistema (1)-(2)-(3). Dado que este sistema tiene 2n ecuaciones, basta ver que ellas son linealmente independientes.

3. Independencia lineal

Si de un sistema de ecuaciones lineales eliminamos una ecuación que sea combinación lineal de las restantes, el conjunto de soluciones de este sistema reducido es exactamente el mismo que el conjunto de soluciones del sistema original. Por el contrario, si eliminamos una ecuación que no es combinación lineal de las restantes, el conjunto de soluciones del nuevo sistema contendrá matrices que no estaban en el conjunto de soluciones del sistema original.

Para ver que el sistema (1)-(2)-(3) está formado por ecuaciones linealmente independientes entre sí, basta ver entonces que si eliminamos cualquier ecuación, el sistema así reducido admite como solución una matriz que no es un cuadrado mágico.

Supongamos primeramente que se elimina una de las ecuaciones de (1), es decir, eliminamos $F_k - P = 0$, para algún k entre 1 y n – 1. Debemos ver entonces que existe una matriz que satisface las restantes ecuaciones, pero que no es un cuadrado mágico.

Consideremos por ejemplo la matriz cuadrada de orden n en la cual todos los coeficientes de la fila k-ésima son iguales a 1, los de la fila n-ésima son iguales a – 1, mientras que todos los demás coeficientes son iguales a 0 (nótese que P = 0). Se muestra a continuación el ejemplo para n = 4, k = 2:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Es fácil ver que la matriz así construida no es un cuadrado mágico y que satisface el sistema (1)-(2)-(3) si de él se ha eliminado la ecuación $F_k - P = 0$, por lo tanto esta ecuación no es combinación lineal de las restantes.

Supongamos ahora que se elimina una de las ecuaciones de (2), es decir, eliminamos $C_k - P = 0$, para algún k entre 1 y $n - 1$. Debemos ver nuevamente que existe una matriz que satisface las restantes ecuaciones, pero que no es un cuadrado mágico.

Tomamos un ejemplo similar al que hemos construido para el caso anterior. Consideramos la matriz cuadrada de orden n en la cual todos los coeficientes de la columna k-ésima son iguales a 1, los de la columna n-ésima son iguales a -1, mientras que todos los demás coeficientes son iguales a 0 (nótese que, nuevamente, $P = 0$). Se muestra a continuación el ejemplo para $n = 4$, $k = 2$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Es fácil ver que la matriz así construida no es un cuadrado mágico y que satisface el sistema (1)-(2)-(3) si de él se ha eliminado la ecuación $C_k - P = 0$, por lo tanto esta ecuación no es combinación lineal de las restantes.

Si se elimina la ecuación $D_2 - P = 0$ y n es impar, podemos tomar como $A_n = (a_{ij})$ la matriz en la cual todos los coeficientes de la diagonal secundaria valen 1 y los restantes coeficientes valen 0 (nótese que en este caso $P = 1$).

Si n es par y $n > 2$, construimos la matriz $A_n = (a_{ij})$ del siguiente modo: $a_{11} = 1$, $a_{21} = -1$, $a_{(n-1)1} = -1$, $a_{n1} = 1$, $a_{12} = -1$, $a_{(n-1)2} = 1$, $a_{2n} = 1$, $a_{nn} = -1$, $a_{ij} = 0$ en cualquier otro caso (véase el ejemplo más abajo).

En todos los casos la matriz A_n así construida no es un cuadrado mágico y satisface todas las ecuaciones (1)-(2)-(3) excepto $D_2 - P = 0$. Mostramos ejemplos para $n = 3$, $n = 4$ y la forma general para n par. Obsérvese que la matriz indicada para el caso par no puede construirse si $n = 2$, éste es el motivo por el cual esta demostración sólo es válida si $n \geq 3$:

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \; A_4 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \; A_n = \begin{pmatrix} 1 & -1 & . & . & . & 0 & 0 \\ -1 & 0 & . & . & . & 0 & 1 \\ . & . & & & & . & . \\ . & . & & & & . & . \\ . & . & & & & . & . \\ -1 & 1 & . & . & . & 0 & 0 \\ 1 & 0 & . & . & . & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Para demostrar que la ecuación $D_1 - P = 0$ no es combinación lineal de las restantes basta considerar para cada valor de n la matriz que es simétrica a la definida en el punto anterior con respecto a un eje vertical. Este eje se determina del siguiente modo: para n par, pasa entre las dos columnas centrales y para n impar, coincide con la columna central. En este último caso la matriz obtenida no es otra que la matriz identidad, en la cual todos los coeficientes de la diagonal principal son iguales a 1, mientras que los coeficientes restantes valen 0.

Por lo tanto ninguna de las ecuaciones de (1)-(2)-(3) es combinación lineal de las restantes.

4. Conclusión

Hemos probado entonces que, para $n \geq 3$ el sistema (1)-(2)-(3) está formado por 2n ecuaciones linealmente independientes. Por lo tanto el subespacio de los cuadrados mágicos de orden n tiene dimensión $n^2 - 2n = n(n-2)$, tal como queríamos demostrar.

Para $n = 2$, resolviendo explícitamente el sistema (1)-(2)-(3), es fácil ver que el subespacio de los cuadrados mágicos de orden 2 tiene dimensión 1 y que una matriz generadora del mismo es la siguiente:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Referencia

Aliendro, Estela Sonia – *Los Espacios Vectoriales, los Cuadrados Mágicos y las Progresiones Aritméticas* – Revista de Educación Matemática, Universidad Nacional de Córdoba, Volumen 16, N° 2, año 2001.

Facultad de Ingeniería. Universidad de Flores. Camacuá 282 – (1406) Buenos Aires.
E-mail: pineiro@datamarkets.com.ar