Números de Stirling

Noemí Patricia Kisbye

1 Introducción

Sea A un conjunto no vacío. Una partición de A es una familia de subconjuntos no vacíos de A tal que su unión es todo A y tal que la intersección de dos conjuntos cualesquiera es vacía. Por ejemplo:

$$\begin{aligned} \{1,\ 2,\ 3,\ 4\} &= \{1\} \cup \{2,\ 3\} \cup \{4\} && (1) \\ &= \{1,\ 2,\ 3\} \cup \{4\} && (2) \\ &= \{1\} \cup \{2\} \cup \{3\} \cup \{4\} && (3) \end{aligned}$$

Un conjunto de n elementos se puede *partir* en k subconjuntos siempre que $k \leq n$.

El *número de Stirling* $S(n,k)$ se define como el número de particiones de un conjunto de n elementos en k subconjuntos. Claramente $S(n,k)$ está bien definido si $k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$.

En este artículo daremos varias fórmulas para calcular $S(n,k)$ y tomaremos como el conjunto A de n elementos al subconjunto de los naturales $\{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$ al cual denotaremos $[n]$. Los métodos para hallar una expresión para $S(n,k)$ serán puramente combinatorios. Esto es, explicaremos distintas formas de contar cuántos elementos tiene el conjunto de las particiones de $[n]$ en k subconjuntos y cada manera de contar nos conducirá a una fórmula diferente para $S(n,k)$.

2 Algunos valores especiales de $S(n,k)$

Calculemos $S(n,k)$ para algunos valores especiales de n y de k. Observemos que $S(n,n)$ es el número de particiones de $[n]$ en n subconjuntos. Existe una única partición así, y ésta es: $[n] = \{1\} \cup \{2\} \cup \ldots \cup \{n\}$. Luego

$$\boxed{S(n,n) = 1.} \tag{4}$$

$S(n,1)$ es la cantidad de particiones de $[n]$ en un único subconjunto. Esto se puede hacer de una única manera: $[n] = \{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$. Luego

$$\boxed{S(n,1) = 1.} \tag{5}$$

Calculemos $S(n,2)$. Si partimos $[n]$ en dos subconjuntos uno de ellos tiene al elemento n y algunos de los $n-1$ restantes. Luego para calcular $S(n,2)$ basta con saber de cuántas maneras se pueden elegir los $n-1$ elementos que pertenecen al mismo subconjunto que n. Este número es exactamente 2^{n-1}, pero debemos descartar el caso en que todos los elementos de $[n]$ estén en un mismo subconjunto , luego

$$\boxed{S(n,2) = 2^{n-1} - 1.} \tag{6}$$

Para $k = n-1$, $S(n,n-1)$ es la cantidad de particiones de un conjunto de n elementos en $n-1$ subconjuntos. En este caso, en cada partición hay un subconjunto con 2 elementos y los demás tiene uno. Luego contar cuántas particiones hay es equivalente a contar de cuántas maneras distintas podemos formar un subconjunto de dos elementos. Pero esto es exactamente el número combinatorio $\binom{n}{2}$. Luego:

$$\boxed{S(n,n-1) = \binom{n}{2} = \tfrac{n(n-1)}{2}.} \tag{7}$$

3 Fórmulas recursivas para $S(n,k)$

Supongamos que sabemos de cuántas maneras podemos particionar un conjunto de m elementos en h subconjuntos para cada valor de m menor que n y cada valor de h menor que k. Vamos a probar que podemos hallar una expresión para $S(n,k)$ en términos de estos valores ya conocidos.

En primer lugar observemos que podemos escribir

$$[n] = [n-1] \cup \{n\}.$$

Una partición de $[n-1]$ en $k-1$ subconjuntos determina una partición de $[n]$ en k subconjuntos donde el elemento n está *solo*, es decir uno de los subconjuntos tiene a n como único elemento; luego existen $S(n-1,k-1)$ particiones de $[n]$ con esa propiedad.

Siguiendo con esta idea contemos ahora todas las particiones donde n pertenece a un subconjunto de exactamente 2 elementos. Es decir $n \in \{i, n\}$, donde $i \in [n-1]$. Tenemos $\binom{n-1}{1} = n-1$ formas de elegir i, y para cada i tenemos $S(n-2,k-1)$ maneras de particionar $[n-1]-\{i\}$ en $k-1$ subconjuntos.

Luego consideramos las particiones donde n pertenece a un subconjunto de exactamente 3 elementos, es decir de la forma $\{i, j, n\}$. Tenemos $\binom{n-1}{2}$ maneras de elegir i y j, y para cada elección de i y de j hay $S(n-3,k-1)$ particiones de los restantes $n-3$ elementos en $k-1$ subconjuntos.

Así sucesivamente vamos contando en cuántos subconjuntos de m elementos puede estar n y por cada uno de esos subconjuntos tendremos $S(n-m,k-1)$ particiones de los $n-m$ elementos restantes en $k-1$ subconjuntos. Este proceso lo podremos hacer siempre que $n-m$ sea mayor o igual que $k-1$, es decir para $1 \le m \le n-k+1$. Finalmente, obtenemos la siguiente fórmula recursiva para $S(n,k)$:

$$\begin{aligned} S(n,k) &= S(n-1,k-1) + \binom{n-1}{1} S(n-2,k-1) + \dots \\ &\dots + \binom{n-1}{n-k} S(k-1,k-1) \end{aligned} \tag{8}$$

o bien

$$\boxed{S(n,k) = \textstyle\sum_{j=0}^{n-k} \binom{n-1}{j} S(n-1-j,k-1)} \tag{9}$$

Observemos que si aplicamos la fórmula (9) para $k = 2$ obtenemos:

$$\begin{aligned} S(n,2) &= \sum_{j=0}^{n-2} \binom{n-1}{j} S(n-1-j,1) \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} - \binom{n-1}{n-1} = 2^{n-1} - 1 \end{aligned} \tag{10}$$

que coincide con la expresión en (6).

Supongamos ahora que conocemos el número de particiones de $[n-1]$ en $k-1$ subconjuntos y en k subconjuntos. Veremos que podemos hallar una fórmula para $S(n,k)$ en función de estos dos valores ya conocidos.

Primero consideramos todas las particiones en donde aparece el subconjunto $\{n\}$, y luego contamos todas las particiones donde n pertenece a un subconjunto con más de un elemento. Las primeras son exactamente $S(n-1,k-1)$, como ya lo habíamos dicho en el caso anterior. En las demás particiones observemos que si sacamos el elemento n obtenemos una partición de $[n-1]$ en k subconjuntos. Recíprocamente, si tenemos una partición de $[n-1]$ en k subconjuntos y agregamos n a uno de ellos obtenemos una partición de $[n]$ en k subconjuntos. Como hay k subconjuntos tenemos k formas distintas de agregar el elemento n, luego hay $k\,S(n-1,k)$ particiones en las que n pertenece a un subconjunto con más de un elemento. Así obtenemos una segunda fórmula recursiva válida para $k < n$:

$$\boxed{S(n,k) = S(n-1,k-1) + k\,S(n-1,k).} \tag{11}$$

4 Funciones Generatrices

A cada sucesión de números reales $\{a_n\}$, se la puede asociar las dos siguientes series de potencias formales:

$$S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \qquad\qquad S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!}$$

La serie S_1 se llama *función generatriz* de $\{a_n\}$ y S_2 es la *función generatriz exponencial* de $\{a_n\}$.

En esta sección deduciremos cuál es la función generatriz y cuál es la función generatriz exponencial de la sucesión $\{S(n,k)\}$, $n \geq k$.

Asociemos a cada partición de $[n]$ un $k-$upla de enteros $(n_1, n_2, \ldots n_k)$ con la propiedad que $n_j \geq 1$ para cada j y que $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$. La asociación es la siguiente:

Los elementos 1, 2, ... hasta n_1 pertenecen a un mismo subconjunto de la partición, pero $n_1 + 1$ pertenece a otro subconjunto. (Notemos que n_1 puede ser 1).

Los elementos n_1+1, n_1+2, hasta n_1+n_2 pertenecen o al mismo subconjunto que 1 o al mismo subconjunto que n_1+1, pero n_1+n_2+1 pertenece a un tercer subconjunto distinto.

Así sucesivamente, consideramos el intervalo natural con n_j elementos $[n_1 + n_2 + \ldots + n_{j-1} + 1, n_1 + n_2 + \ldots + n_j]$, de tal manera que los naturales comprendidos en este intervalo pertenecen a alguno de los subconjuntos ya contados o al mismo subconjunto que $(n_1 + n_2 + \ldots + n_{j-1} + 1)$ pero $(n_1 + n_2 + \ldots + n_j + 1)$ pertenece a otro subconjunto de la partición, (a menos que j sea igual a k).

Ahora bien, dada una k-upla con estas características, ¿cuántas particiones hay que se correspondan con ella? Observemos que 1, 2, ..., n_1 pertenecen a un mismo subconjunto, $n_1 + 1$ pertenece a otro subconjunto y los $n_2 - 1$ siguientes están distribuidos entre estos dos. Existen 2^{n_2-1} formas distintas de *repartir* estos $n_2 - 1$ elementos en dos subconjuntos.

El elemento $n_1 + n_2 + 1$ está en un tercer subconjunto y los $n_3 - 1$ siguientes están en alguno de estos tres primeros subconjuntos. Tenemos 3^{n_3-1} distribuciones distintas. Así siguiendo vemos que a cada k- upla $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ le corresponden $1^{n_1-1}.2^{n_2-1}.\ldots.k^{n_k-1}$ particiones distintas. Así obtenemos una nueva fórmula para $S(n, k)$:

$$\boxed{S(n,k) = \sum_{n_1+n_2+\ldots+n_k=n} 1^{n_1-1}.2^{n_2-1}.\ldots.k^{n_k-1}} \tag{12}$$

donde en la suma cada $n_j \geq 1$.

Esto sugiere una fórmula para la función generatriz de $S(n, k)$. Precisamente, la función generatriz para $S(n, k)$ se obtiene haciendo el producto formal de las siguientes sumas formales:

$$\begin{aligned}(\sum_{n_1=1}^{\infty} 1^{n_1-1}x^{n_1})(\sum_{n_2=1}^{\infty} 2^{n_2-1}x^{n_2}) \ \ldots \ (\sum_{n_k=1}^{\infty} k^{n_k-1}x^{n_k}) &= \\ &= \left(\frac{x}{1-x}\right)\left(\frac{x}{1-2x}\right)\cdots\left(\frac{x}{1-kx}\right)\end{aligned} \tag{13}$$

es decir que

$$\sum_{n\geq k} S(n,k)x^n = \frac{x^k}{(1-x)(1-2x)\ldots(1-kx)} \tag{14}$$

una serie que es convergente si $|x| < \frac{1}{k}$.

Sea $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ una k-upla de naturales con la propiedad que cada $n_j \geq 1$ y que $n_1 + n_2 + \ \ldots \ + n_k = n$. El número combinatorio $\binom{n}{n_1 \ n_2 \ \ldots n_k}$ indica de cuántas maneras podemos ubicar n elementos distintos en k subconjuntos *distintos* poniendo n_1 en el primero, n_2 en el segundo y así sucesivamente, y este número es:

$$\binom{n}{n_1 \ n_2 \ \ldots n_k} = \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}.$$

A su vez, una partición de $[n]$ en k subconjuntos A_1, A_2, ..., A_k determina una k-upla $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ con esa propiedad, siendo n_j el cardinal de A_j. Por otro lado, como en la partición no interesa el orden de los subconjuntos vemos que si permutamos los índices de la k-upla la partición sigue siendo la misma. Como hay $k!$ permutaciones, tenemos $k!$ $k-$uplas que se corresponden con una misma partición. Luego:

$$\sum_{n_1+n_2+\ldots+n_k=n} \binom{n}{n_1\ n_2\ \ldots n_k} = S(n,k)\, k! \tag{15}$$

donde en la suma cada $n_j \geq 1$. Esto sugiere una fórmula para la función generatriz exponencial de $S(n,k)$, precisamente:

$$\sum_{n \geq k} S(n,k)\frac{x^n}{n!} = \frac{1}{k!}\left(\sum_{n_1\geq 1}\frac{x^{n_1}}{n_1!}\right)\left(\sum_{n_2\geq 1}\frac{x^{n_2}}{n_2!}\right)\cdots\left(\sum_{n_k\geq 1}\frac{x^{n_k}}{n_k!}\right) \tag{16}$$

$$= \frac{1}{k!}(e^x-1)^k \tag{17}$$

y esta serie es convergente para todo $x \in \mathbf{R}$.

5 Doce números

Concluimos este artículo haciendo referencia al número de funciones que puede haber entre dos conjuntos finitos, poniendo ciertas restricciones en las funciones y con respecto a cuándo consideramos que dos funciones son *iguales* o *equivalentes*. Sean N y K dos conjuntos finitos con $|N| = n$ y $|K| = k$. Habrá tres restricciones posibles para las funciones $f : M \mapsto N$, éstas son:

1. f es arbitraria (sin restricción),

2. f es inyectiva,

3. f es suryectiva.

Habrá cuatro interpretaciones para decidir cuando dos funciones son equivalentes y éstas provienen de considerar a los elementos de N y de K como *distinguibles* o *indistinguibles.*

Sean f y g dos funciones de N en K. Diremos que:

1. f y g son equivalentes con N *y* K *distinguibles* si $f(x) = g(x)$ para todo $x \in N$.

2. f y g son equivalentes con N *indistinguible* si existe una permutación π de los elementos de N tal que $g(x) = f(\pi(x))$, para todo $x \in N$.

3. f y g son equivalentes con K *indistinguible* si existe una permutación σ de los elementos de K tal que $\sigma(g(x)) = f(x)$, para todo $x \in N$.

4. f y g son equivalentes con N y K *indistinguibles* si existen permutaciones π en N y σ en K tales que $\sigma(g(x)) = f(\pi(x))$.

Por ejemplo, si $N = \{a, b\}$ y $K = \{1, 2\}$, entonces

$$f(a) = 1 \qquad g(a) = 2 \tag{18}$$

$$f(b) = 1 \qquad g(b) = 2 \tag{19}$$

son funciones equivalentes si consideramos a los elementos de K como indistinguibles, y son no equivalentes si los consideramos distinguibles. Las funciones

$$h(a) = 1 \qquad j(a) = 2 \tag{20}$$

$$h(b) = 2 \qquad j(b) = 1 \tag{21}$$

son funciones equivalentes si consideramos a los elementos de N como indistinguibles y son no equivalentes si los consideramos distinguibles.

Luego si queremos contar todas las funciones $f : N \mapsto K$ obtendremos 12 números diferentes según la restricción que tomemos. Consideraremos a N como el conjunto $[n]$ y a K como el conjunto $[k]$.

Supongamos primero que f es arbitraria.

Si consideramos a todos los elementos distinguibles tenemos que para cada $x \in N$, $f(x)$ puede tomar k posibles valores, luego hay k^n funciones distintas.

Consideremos ahora a los elementos de N indistinguibles y a los de K distinguibles. La imagen de f puede ser un elemento, dos elementos o hasta k elementos (siempre que $n \geq k$). Tenemos k funciones cuya imagen es un único elemento: $f(N) = 1$, $f(N) = 2$, ..., $f(N) = k$.

Tenemos $\binom{k}{2}$ formas de elegir una imagen de exactamente dos elementos, i y j. En la preimagen de i puede haber 1 elemento, o 2, o hasta $n-1$, luego hay $\binom{k}{2}(n-1)$ funciones con 2 elementos en la imagen.

Hay $\binom{k}{3}$ formas de elegir 3 elementos en la imagen, i, j y k. Si en la preimagen de i hay un elemento, hay $n-2$ posibilidades para j y k. Si hay 2 elementos, hay $n-3$ posibilidades. Luego hay $(n-2)+(n-3)+\ldots+1 = \frac{(n-2)(n-1)}{2} = \binom{n-1}{2}$ funciones con 3 elementos en la imagen.

Si k y n son mayores o iguales a 4, tenemos $\binom{k}{4}$ formas de elegir una imagen de 4 elementos i, j, k y m. Siguiendo con el razonamiento anterior, si la preimagen de i tiene 1 elemento, tenemos $\binom{n-2}{2}$ posibilidades distintas para j, k y m, si i tiene 2 elementos, tenemos $\binom{n-3}{2}$ posibilidades, y así siguiendo. Como

$$\binom{2}{2} + \binom{2+1}{2} + \binom{2+2}{2} + \ldots + \binom{n-2}{j} = \binom{n-1}{3}$$

concluimos que hay $\binom{n-1}{3}$ funciones con 4 elementos en la imagen.

Siguiendo este mismo razonamiento y usando el hecho que

$$\binom{j}{j} + \binom{j+1}{j} + \binom{j+2}{j} + \ldots + \binom{n-2}{j} = \binom{n-1}{j+1}$$

vemos que en general hay $\binom{n-1}{j-1}$ funciones con j elementos determinados en la imagen.

Luego el número de funciones arbitrarias donde los elementos de N son indistinguibles y los de K son distinguibles es:

$$\binom{k}{1}\binom{n-1}{0}+\binom{k}{2}\binom{n-1}{1}+\ldots\binom{k}{j}\binom{n-1}{j-1} \tag{22}$$

donde j es el mínimo entre k y n. Según la fórmula de Vandermonde, el número representado por la fórmula (22) es $\binom{n+k-1}{n}$.

Si consideramos a los elementos de N distinguibles y los de K indistinguibles, cada f determina una partición de N en j subconjuntos: A_1, A_2, ..., A_j, donde j es el cardinal de la imagen de f y donde podemos suponer que $f(A_1) = 1$, $f(A_2) = 2$, ..., $f(A_j) = j$. Como f es arbitraria, j puede ser cualquier entero entre 1 y k; luego el número de funciones distintas es:

$$S(n,k)+S(n,k-1)+S(n,k-2)+\ldots+S(n,1)=B(n).$$

$B(n)$ se llama *número de Bell.*

Por último, si consideramos a todos los elementos indistinguibles, cada función f cuya imagen tiene cardinal j es equivalente a una función $\tilde{f}$ cuya imagen es el intervalo $[j]$; y $\tilde{f}$ y por ende f determina una j-upla de enteros $(n_1, \ldots, n_j)$ tales que hay n_1 elementos en la preimagen del 1, n_2 elementos en la preimagen del 2, y así sucesivamente. Cada j upla satisface que $n_1 + n_2 + \ldots n_j = n$ y $n_j \geq 1$. Una j-upla con esta propiedad se llama una *partición de n en j enteros*, y se denota $p_j(n)$. Concluimos entonces que el número de funciones $f : N \mapsto K$ con N y K indistinguible es:

$$p_1(n)+p_2(n)+\ldots+p_k(n).$$

Consideremos ahora f inyectiva, y $n \leq k$, de lo contrario no puede haber funciones inyectivas.

Si consideramos todos los elementos distinguibles tenemos k posibilidades distintas para $f(1)$. Para cada una de estas elecciones tenemos $k-1$ posibilidades para $f(2)$ y así siguiendo hasta $f(n)$. Luego existen

$$k\ (k-1)\ \dots(k-n+1)=\frac{k!}{n!}=(k)_n$$

funciones distintas.

Si los elementos de N son indistinguibles y los de K son distinguibles, cada función determina una elección de n elementos de K. Luego el número de funciones distintas es $\binom{k}{n}$.

Si los elementos de N son distinguibles y los de K son indistinguibles, todas las funciones serán equivalentes, es decir hay esencialmente una sola.

Lo mismo ocurre si todos los elementos de N y de K son indistinguibles.

Por último, si f es suryectiva debemos considerar que $n \geq k$. Si los elementos de N son distinguibles, cada función determina una partición de N en k subconjuntos. Luego si los elementos de K son indistinguibles, el número de funciones no equivalentes es $S(n,k)$; si son distinguibles por cada partición de N debemos considerar todas las permutaciones en K, luego hay $S(n,k)\ k!$ funciones no equivalentes.

Si los elementos de N son indistinguibles y los de K son distinguibles, seleccionamos de N un subconjunto M de k elementos tal que su imagen sea exactamente K. $N-M$ tiene $n-k$ elementos, y lo que nos resta contar es el número de funciones arbitrarias entre $N-M$ y K. Pero esto ya vimos que es

$$\binom{|N-M|+k-1}{|N-M|}=\binom{n-1}{n-k}.$$

Si los elementos de N y de K son indistinguibles, cada función suryectiva determina una partición de $[n]$ en k subconjuntos, donde la imagen de cada subconjunto es un elemento distinto de $[k]$. Pero entonces el número de funciones no equivalentes es la cantidad de veces que se puede expresar el número n como suma de k términos, distintos de cero. Y esto es $p_k(n)$.

Resumimos esto en la siguiente tabla:

Distinguibles	f arbitraria	f inyectiva $n \leq k$	f suryectiva $n \geq k$
N y K	k^n	$(k)_n$	$S(n,k)k!$
K	$\binom{n+k-1}{n}$	$\binom{k}{n}$	$\binom{n-1}{n-k}$
N	$B(n)$	1	$S(n,k)$
	$p_1(n) + p_2(n) + \ldots + p_k(n)$	1	$p_k(n)$

Facultad de Matemática, Astronomía y Física
Universidad Nacional de Córdoba.