Mosaicos planares y grupos cristalográficos

Miriam Pacheco

1 Introducción

Imaginemos una decoración infinita del plano construida repetiendo regularmente la letra R en dos direcciones no paralelas y a intervalos regulares

R	R	R	R
R	R	R	R
R	R	R	R
R	R	R	R

Observemos que esta decoración se puede obtener a partir de un ornamento básico, dominio fundamental, que aparece sombreado, mediante repeticiones regulares de forma de cubrir todo el plano.

R	R	R	R
R	R	R	R
R	R	R	R
R	R	R	R

Esto es lo que denominamos mosaico planar o un embaldozado del plano.

Una segunda observación nos permite ver que sólo hay dos tipos de movimientos del plano que transforman el embaldozado en él mismo, o sea, no es perceptible visualmente. Estos movimientos son traslaciones hacia arriba/abajo o derecha/izquierda un número entero de unidades.

La clasificación de mosaicos, tanto del plano, como los análogos del espacio, ha sido de interés desde tiempos remotos. Los primeros resultados se remontan a Pitágoras quien encontró que hay cinco sólidos regulares, sólidos cuyas caras son polígonos regulares de n lados: el tetraedro, el cubo, el octaedro, el dodecaedro y el icosaedro.

Kepler encontró los denominados enrejados del plano, grillas infinitas con dominio fundamental un polígono cuya repetición regular conforma el enrejado. Hay solamente tres de tales enrejados, uno de triángulos, uno de cuadrados, y uno de hexágonos.

En el siglo XIX se inició el camino en busca de una clasificación de mosaicos del plano y del espacio. Uno de los primeros problemas fue decidir cuándo dos mosaicos diferentes tenían el mismo tipo de regularidad. Una gran variedad de métodos de clasificación fueron desarrollados. En un comienzo, se estudiaron las estructuras reticuladas; luego, simetrías, y el modo de relacionarlas para obtener una distinción más fina. A fines del mencionado siglo, Fedorov, Schoenflies, and Barlow clasificaron los 17 grupos cirstalográficos (de dimensión dos) y los 230 grupos cristalográcos (de dimensión tres).

Un análisis similar se planteó para dimensiones mayores que tres. En el caso de dimensión cuatro, los grupos están clasificados en 4895 tipos. Esto fue probado en 1974 por Brown, Bollöw, Neubüser, Wondratscheck and Zassenhaus con ayuda de métodos computacionales.

El problema general para grupos cristalográficos de dimensiones mayores ha sido de gran importancia en la matemática pues forma parte del problema 18 de Hilbert. David Hilbert, un prominente matemático de su época, demostró en el International Congress of Mathematicians en Paris en 1900, donde propuso 23 problemas generales de investigación matemática. Una de sus pregunta fue la siguiente: "En un espacio Euclideano de dimensión n hay solamente un número finito de grupos de movimientos con un dominio fundamental, esencialmente diferentes?" Para dimensión dos y tres el resultado ya era conocido, pero aún no para dimensiones mayores.

Bieberbach resolvió este problema en 1910, probando que en cualquier dimensión hay solamente una cantidad finita de estos grupos. No determinó cuál era ese número y, aún en la actualidad, esta cantidad se desconoce para dimensiones mayores que cuatro.

En este trabajo nos abocaremos explicar la problemática de los mosaicos planares, intentando dejar al descubierto su esencia y su clasificación sin entrar en excesivos detalles técnicos.

Como ya adelantamos hay esencialmente 17 tipos de mosaicos diferentes. Los ejemplos de cada tipo han sido producidos por artistas y artesanos a lo largo de la historia de la humanidad.

En la parte final de esta nota listamos los Algoritmos. La lectura de las tablas es independiente de los teoremas demostrados en ∮ 4.

2 Movimientos rígidos del plano

Necesitamos identificar aquellas transformaciones del plano que mueven el mosaico, de modo que, caiga sobre él mismo; es decir, que lo dejan invariante.

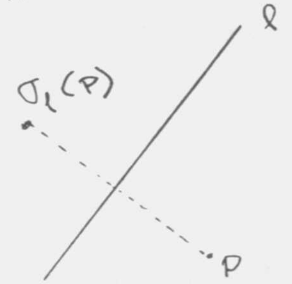
Las únicas transformaciones que consideraremos son aquellos movimientos de todos los puntos del plano que conservan la distancia y la posición relativa de los puntos. Esto significa que, si dos puntos P y Q del plano están a un metro de distancia antes de aplicar un movimiento rígido del plano, ellos permanecerán a un metro de distancia luego de su acción; y si un punto R está en la mitad del segmento con extremos en P y Q, $\overline{PQ}$, después del movimiento rígido seguirá aún a mitad del segmento con extremos en los transformados de P y Q. Estas transformaciones reciben la denominación de *movimientos rígidos del plano*, o *isometrías del plano*.

Hay cuatro tipo de movimientos rígidos del plano: traslaciones, rotaciones, reflexiones y reflexiones deslizadas.

Reflexiones:

Una reflexión está determinada por una línea de reflexión l , que "refleja" los objetos. Llamaremos $\sigma_l(P)$ su acción sobre un punto P del plano. El punto $\sigma_l(P)$ está determinado de modo tal que, la línea l es perpendicular al segmento $\overline{P\sigma_l(P)}$ y lo divide en partes iguales.

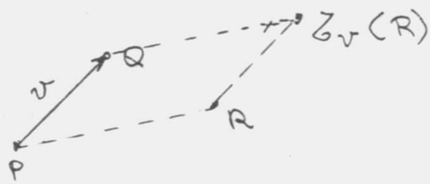
Observemos que los puntos sobre la línea de reflexión quedan fijos y la distancia de un punto P a la línea de reflexión, es la misma que la distancia de la imágen del punto, $\sigma_l(P)$, a la ella.



Traslaciones:

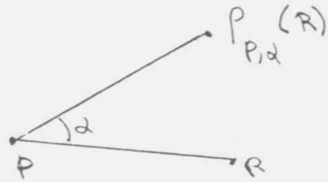
En una traslación todos los puntos son desplazados por una misma longitud y una misma dirección.

Una traslación queda unívocamente determinada por un punto y su imágen. Esto justifica la siguiente notación. Sea $v = \overrightarrow{PQ}$ el vector definido por la traslación que envía P en Q. La traslación de vector $v = \overrightarrow{PQ}$ se notará τ_v ó $\tau_{\overrightarrow{PQ}}$.



Rotaciones:

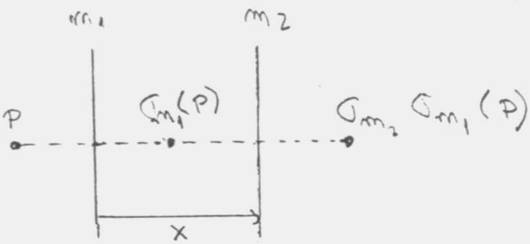
Una rotación fija un punto P, y todo otro punto gira un mismo ángulo alrededor del punto P. El punto fijo se denomina *centro de rotación*, y dibujamos dos líneas para indicar la rotación de una de ellas sobre la otra. Notación $\rho_{P,\alpha}$.



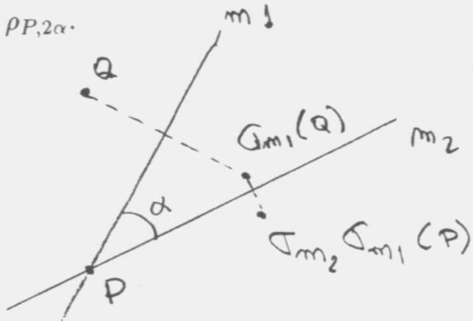
Observación: Que sucede cuándo combinamos *dos* reflexiones?

Hay dos casos posibles: que las líneas de reflexión sean paralelas o no.

En el caso que las líneas de reflexión son paralelas, el efecto es una traslación, $\sigma_{m2} \circ \sigma_{m1} = \tau_{2x}$.

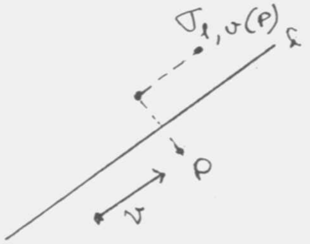


Si las dos líneas de reflexión se intersecan en un punto P, se presenta la siguiente situación: $\sigma_{m2} \circ \sigma_{m1} = \rho_{P,2\alpha}$.



Reflexiones deslizantes:

Este cuarto tipo de movimiento rígido no es tan fácil de ver como los anteriores. Cuando combinamos una reflexión σ_l, con una traslación paralela al eje de reflexión τ_v, el resultado total es un nuevo movimiento rígido diferente de los anteriores denominado reflexión deslizante: $\sigma_{v,l} = \tau_v \circ \sigma_l$.



3 Grupos y homomorfismos

Clasificaremos los mosaicos del plano mediante las transformaciones rígidas que los dejan invariantes. Para un mosaico del plano fijo, la colección de tales transformaciones rígidas constituyen lo que se denomina un **grupo cristalográfico**. En esta sección introduciremos algunas definiciones básicas relacionadas el concepto de grupo y algunos ejemplos, poniendo énfasis en los relacionados con los movimientos rígidos del plano.

Un *grupo* es un conjunto G tal que para cualquier par de elementos $a, b \in G$, existe un único elemento en G, notado por $a.b$, para el cual valen las siguientes propiedades:

i) $(a.b).c = a.(b.c)$ para $a, b, c \in G$ (ley asociativa);

ii) hay un elemento i (la unidad) en G tal que $a.i = i.a = a$ para todo $a \in G$;

iii) para cualquier $a \in G$ existe un elemento $a^{-1} \in G$ tal que $a^{-1}.a = a.a^{-1} = i$.

Ejemplos:

1. Todos los productos de reflexiones forman el grupo $\mathcal{M}$ de *movimientos* en el plano.

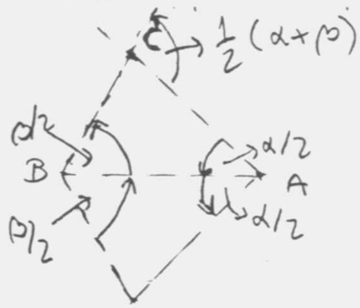
2. Los productos de un número par de reflexiones (rotaciones y traslaciones) forman el grupo $\mathcal{M}^+$ de los *movimientos propios* del plano.

3. Las rotaciones alrededor de un punto P forman un grupo, $\mathcal{R}_P$.

4. El conjunto de todas las rotaciones del plano **no** es un grupo, puesto que el producto de dos rotaciones no siempre es una rotación. Como

$$\rho_{B,\beta}\rho_{A,\alpha} = \rho_{C,\alpha+\beta}, \quad \text{si } \alpha + \beta = k.360^o,$$

$\rho_{C,\alpha+\beta}$ es una traslación.



5. El conjunto de todas las traslaciones es un grupo, τ.

6. Todos los movimentos que dejan un punto P fijo forman un grupo, τ_P. Los elementos de τ_P son las rotaciones de centro P y las reflexiones en líneas que contienen a P.

7. Para un $n \in \mathbf{N}$ fijo, las rotaciones alrededor en un punto P de ángulos $\frac{k}{n}360^0$, $0 \leq k \leq n$, $k \in \mathbf{N}$, forman un grupo $\mathcal{Z}_{P,n}$. Este grupo puede visualizarse como el conjunto de rotaciones alrededor de P que transforma un polígono regular de n lados de centro P en él mismo.

8. El conjunto de transformaciones rígidas del plano que dejan invariante un mosaico constituye un grupo.

   Observación: El elemento unidad para las transformaciones del plano con la operación de composición lo constituye la transformación identidad, que es la transformación que no mueve ningún punto del plano.

9. $(\mathbf{R},+)$, $(\mathbf{Z},+)$ son grupos.

10. $(\mathbf{Z},.)$ no es grupo.

Además de las propiedades básicas de grupo, $\mathcal{R}_P$, $\mathcal{Z}_{P,n}$, τ y todos los grupos definidos para números tienen la propiedad:

$$a.b = b.a, \qquad \text{para todo par de elementos.}$$

Esta propiedad se llama *ley conmutativa.* Un grupo cuyos elementos cumplen con la ley conmutativa, se denomina *grupo abeliano.*

En los ejemplos, $\mathcal{M}$ es un grupo **no** abeliano. Porqué?

El grupo $\mathcal{Z}_{P,n}$ contiene en elemento x, la rotación alrededor de P de ángulo $\dfrac{360^o}{n}$, tal que todos los elementos del grupo pueden escribirse como x^k, para $k = 1, \ldots, n$. Un grupo para el cual existe tal x, se denomina *cíclico.*

Para $\mathcal{Z}_{P,n}$ el número n es el menor entero positivo m para el cual $x^m = i$. Este menor entero positivo es el *orden* del grupo cíclico.

Si un grupo cíclico no tiene ningún orden, es *infinito.* $\mathbf{Z}$ es un ejemplo de uno de tales grupos cíclicos.

Una colección H de elementos de G, tal que ella misma constituye un grupo bajo la multiplicación inducida por G, se llama un *subgrupo* de G.

Por ejemplo, $\mathcal{M}^+$, $\mathcal{R}_P$, τ, τ_P, $\mathcal{Z}_{P,n}$ son subgrupos de $\mathcal{M}$. $(\mathbf{Z},+)$ es subgrupo de $(\mathbf{R},+)$.

En el estudio de la teoría de grupos, suelen interesar las relaciones definidas por la multiplicación del grupo. Estas relaciones se estudian mediante los *homomorfismos.*

Un homomorfismo entre grupos G y G' es una función

$$f : G \to G' \quad \text{tal que} \quad f(g_1.g_2) = f(g_1).f(g_2),$$

es decir, hace que productos en G se correspondan con productos en G'. Si un homomorfismo es inyectivo, se denomina *monomorfismo*; si es suryectivo, *epimorfismo*; si es biyectivo, *isomorfismo*, y en este último caso, se dice que G y G' son isomorfos.

Ejemplos:

1. Sea P un punto del plano $f : \rho_{P,n} \to \mathbf{Z}_n$ definida por $f(\rho_{P,\frac{k}{n}.360^o}) = k$ es un isomorfismo.

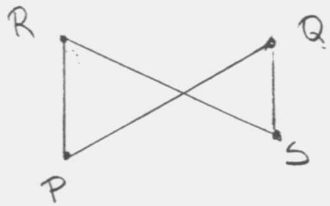
2. Sean P y Q puntos del plano $f : \rho_P \to \rho_Q$ dada por $f(\rho_{P,\alpha}) = \rho_{Q,\alpha}$ es, también un isomomorfismo.

4 Grupos cristalográficos

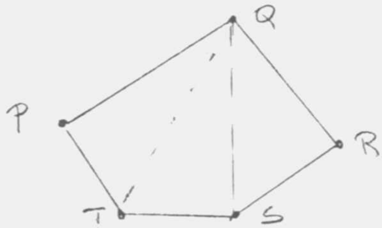
En esta sección daremos la definición de grupo cristalográfico, su relación con reticulados planares.

Para dar la definición de *grupo cristalográfico* necesitamos definir el interior para un polígono convexo.

En general, un polígono no tiene **un** interior.



Si un polígono es tal que sus lados se intersecan sólo en los vértices, entonces el polígono puede ser descompuesto en un número finito de triángulos por segmentos que aparecen como lados de dos de los triángulos. El interior del polígono es la unión de los interiores de los triángulos y los lados que fueron sumados.



Por un polígono entendemos un polígono con su interior.

Un *grupo cristalográfico* es un subgrupo $\mathcal{G}$ del grupo de los movimientos del plano $\mathcal{M}$ para el cual existe un polígono Π tal que:

1. todo punto en el plano es la imágen, por algún elemento de $\mathcal{G}$, de un punto de Π o su interior, y
2. si $g_1\Pi$ y $g_2\Pi$ tienen un punto interior en común $(g_1, g_2 \in \mathcal{G})$, entonces $g_1\Pi = g_2\Pi$.

Las dos condiciones dicen que el plano completo puede cubrirse por Π y su imágen por $\mathcal{G}$, sin agujeros ni dobles cubrimientos. Por esta razón el ornamento del polígono $g\Pi$, $g \in \mathcal{G}$, se llama una *baldoza*. Π es el *dominio fundamental* del ornamento, o baldoza.

Para un grupo dado $\mathcal{G}$ hay infinitas posibilidades de dominios fundamentales Π, pero por otro lado, las posibilidades para grupos cristalográficos son bastante restringidas, pues: *Hay 17 clases de grupos cristalográficos distintos del plano.* El término "distinto" se usa en el sentido de grupos, es decir, que no son isomorfos: no hay homomorfismo biyectivo entre dos cualesquiera de ellos.

Una prueba de la existencia se basa en la construcción explícita de los grupos $\mathcal{G}$ como *grupos cristalográficos*, la cual es de carácter geométrico.

Una herramienta útil para distinguir los diferentes mosaicos planares la constituye los denominados reticulados del plano.

Un *reticulado* T es el conjunto de todos los puntos $\tau_{mv_1+nv_2}X$, para X un punto fijo del plano, v_1, v_2 vectores fijos no paralelos en el plano, m, n enteros. El punto X se denomina *punto base.* Observemos que cualquier punto de un reticulado puede tomarse como punto base X.

El *grupo del reticulado* es el conjunto de todas las transformaciones que dejan invariante al reticulado.

Veamos ahora como se obtiene un reticulado a partir de un grupo cristalogáfico.

Sea X en el interior de Π, Π un dominio fundamental de un ornamento dado de un grupo cristalográfico $\mathcal{G}$ y sea $L = \{gX : g \in G\}$.

Se puede probar que: *el conjunto L contiene un reticulado.* Esta afirmación se puede enunciar en términos de grupos diciendo que $\mathcal{G}$ contiene el subgrupo de las traslaciones de la forma $\tau_{mv_1} \circ \tau_{nv_2}$, n, m enteros, donde v_1 y v_2 son vectores no colineales, y no contiene ningún otro tipo de traslaciones.

La prueba de este hecho es ardua y se basa fundamentalmente en un buen manejo de las transformaciones rígidas del plano y su descomposición como reflexiones, como asi tambié, la noción de plano arquimediano juega un rol importante. En este trabajo nos concentraremos en determinar y reconocer los 17 grupos cristalográficos, más que en la demostración de la anterior afirmación.

En la actualidad hay diferentes formas de notar a cada uno de los grupos cristalográficos, la más difundida es la adoptada en 1952 por la International Union of Crystallography, otra notación que resulta geométricamente ilustrativa, es la que se usa Guggenheimer en su libro "Plane Geometry and its Groups". Esta última elige los nombres de los grupos cristalográficos principalmente con referencia al subgrupo que deja invariante un punto fijo del reticulado, este subgrupo de denomina el *subgrupo de isotropía*.

El subgrupo de isotropia de X en $\mathcal{G}$ es el conjunto de las transformaciones T en $\mathcal{G}$ tal que $T(X) = X$

Si el subgrupo de isotropía es un grupo de rotaciones $\mathcal{Z}_{X,n}$, el grupo cristalográfico se dice C_n. Si el grupo cristalográfico contiene n reflexiones o n reflexiones deslizantes, el grupo cristalográfico se nota D_n. Suele suceder que para un grupo de isotropía dado hay diferentes grupos cristalográficos, en este caso se distinguen por un símbolo k por cada eje de reflexión "no equivalente", y un símbolo g por cada eje de reflexión desplazada "no equivalente". Entendemos que dos ejes de reflexión (análogamente ejes de reflexión desplazada) son *equivalentes* si una traslación del reticulado, no idéntica a la identidad i, puede mover uno sobre el otro.

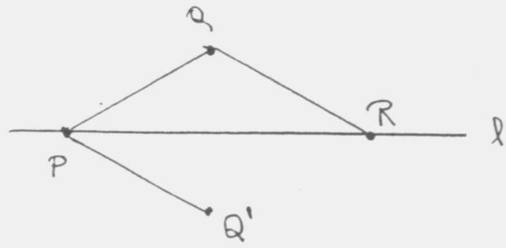
Las razones básicas por las cuales sólo hay 17 grupos cristalográficos se sintetizan en los siguientes resultados:

Teorema 1: Sea $\mathcal{G} \subset \mathcal{M}$ un grupo cristalográfico. Supongamos que $\mathcal{G}$ contiene una reflexión σ_l. Entonces hay una traslación $\tau \in \mathcal{G}$ paralela a l tal que las traslaciones en $\mathcal{G}$ paralelas a l son exactamente las aplicaciones τ^m para todo entero no nulo m. Las reflexiones deslizantes en $\mathcal{G}$ con eje l son las aplicaciones $\tau^m\sigma_l$ para todo entero no nulo m.

Demostración:

Como $\mathcal{G}$ contiene traslaciones en dos direcciones no paralelas y l es un eje de reflexión, debe contener una traslación que no es perpendicular a l.
Escribimos esta traslación como $\tau_{\overrightarrow{PQ}}$ donde $P \in l$ y Q es la imágen de P por la traslación.
Si $Q' = \sigma_l(Q)$, se tiene que

$$\sigma_l \tau_{\overrightarrow{PQ}} \sigma_l^{-1} = \tau_{\overrightarrow{PQ'}}.$$



$\tau_{\overrightarrow{PQ'}}$ aplica Q en un punto R de l, y R no es igual a P pues $\tau_{\overrightarrow{PQ}}$ no es perpendicular a l.
Luego,

$$\tau_{\overrightarrow{PQ'}}\tau_{\overrightarrow{PQ}} = \tau_{\overrightarrow{PR}}.$$

En suma, $\tau_{\overrightarrow{PR}} \in \mathcal{G}$ y $\tau_{\overrightarrow{PR}}$ es una traslación paralela a l.
En consecuencia, hay una traslación τ tal que las traslaciones en $\mathcal{G}$ paralelas a l son las transformaciones τ^m para todo entero no nulo m.
Ahora, las traslaciones deslizantes γ' con eje l son las aplicaciones de la forma $\gamma' = \tau'\sigma_l$ para τ' traslación paralela a l.
Como $\sigma_l \in \mathcal{G}$, si $\gamma' \in \mathcal{G}$, entonces

$$\tau' = \sigma_l \gamma'^{-1} \in \mathcal{G}.$$

Por lo tanto, $\tau' = \tau^m$ para algún entero no nulo m.
En consecuencia, las traslaciones deslizantes con eje l son de la forma $\tau^m\sigma_l$ para m entero no nulo. □

Teorema 2: Sea $\mathcal{G} \subset \mathcal{M}$ un grupo cristalográfico. Supongamos que $\mathcal{G}$ contiene una reflexión deslizantes no trivial con eje l. Entonces hay una traslación $\tau \in \mathcal{G}$ paralela a l tal que las traslaciones en $\mathcal{G}$ paralelas a l son exactamente las aplicaciones τ^m para todo entero no nulo m.

Demostración:

Sea $\gamma \in \mathcal{G}$ una traslación deslizaantes no trivial con eje l.

Luego, $\gamma = \tau_1 \sigma_l$ donde τ_1 es una traslación paralela a l.

Como la traslación deslizante es no trivial, $\sigma_l \notin \mathcal{G}$.

Entonces, $\tau_1 \notin \mathcal{G}$.

Observemos que, como τ_1 es una traslación paralela a l, $\sigma_l \tau_1 \sigma_1^{-1} = \tau_1$, luego, $\sigma_l \tau_1 = \tau_1 \sigma_l$.

En consecuencia, $\gamma^2 = \tau_1 \sigma \tau_1 \sigma = \tau_1 \sigma_l^2 \tau_1 = \tau_1^2$.

Como $\sigma^2 \in \mathcal{G}$, resulta que $\tau_1^2 \in \mathcal{G}$, y τ_1^2 es una traslación paralela a l.

Luego, $\mathcal{G}$ contiene una traslación $\tau = \tau_1^2$ paralela a l.

En consecuencia, hay una traslación τ tal que las traslaciones en $\mathcal{G}$ paralelas a l son las traslaciones τ^m para m entero no nulo. □

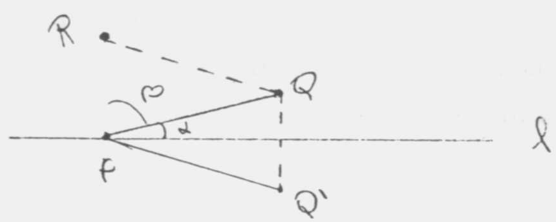
Teorema 3: Sea $\mathcal{G} \subset \mathcal{M}$ un grupo cristalográfico. Supongamos que $\mathcal{G}$ contiene una reflexión con eje l. Entonces hay una traslación $\tau' \in \mathcal{G}$ tal que las traslaciones en $\mathcal{G}$ perpendiculares a l son exactamente las aplicaciones τ'^m para todo entero no nulo m.

Demostración:

Sea $P \in l$.

Como $\mathcal{G}$ contiene traslaciones en dos direcciones no paralelas, hay una traslación no paralela a l.

Escribimos esta traslación como $\tau_{\overrightarrow{PQ}}$, donde Q es la imágen de P por la traslación.



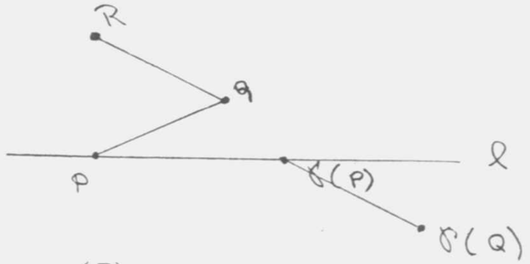
Tenemos que $\sigma_l \tau_{\overrightarrow{PQ}} \sigma_l^{-1} = \tau_{\overrightarrow{PQ'}}$, donde $Q' = \sigma_l(Q)$.
Además, $\tau^{-1}_{\overrightarrow{PQ'}} = \tau_{\overrightarrow{Q'P}}$.
Sea $R = \tau_{\overrightarrow{Q'P}}(Q)$.
Resulta que R no es igual a P, puesto que, $\tau_{\overrightarrow{PQ}}$ no es paralela a l.
Luego, $\tau_{\overrightarrow{Q'P}} \tau_{\overrightarrow{PQ}} = \tau_{\overrightarrow{PR}}$ es un elemento en $\mathcal{G}$.
Entonces, $\tau_{\overrightarrow{PR}}$ es una traslación perpendicular a l pues $\beta = \dfrac{180^o - 2\alpha}{2} = 90^o - \alpha$.
En consecuencia, hay una traslación τ' tal que las traslaciones en $\mathcal{G}$ perpendiculares a l son las aplicaciones τ'^m para m entero no nulo.□

Observación: Se puede probar que en la situación del teorema anterior, las líneas paralelas a l que son ejes de reflexiones en $\mathcal{G}$ se encuentran espaciados por $\frac{1}{2}\tau'$.

Teorema 4: Sea $\mathcal{G} \subset \mathcal{M}$ un grupo cristalográfico. Supongamos que $\mathcal{G}$ contiene una reflexión deslizante no trivial con eje l. Entonces hay una traslación $\tau' \in \mathcal{G}$ tal que las traslaciones en $\mathcal{G}$ perpendiculares a l son exactamente las aplicaciones τ'^m para todo entero no nulo m.

Demostración:

Sea $\gamma \in \mathcal{G}$ una reflexión deslizantes con eje l. Sea $P \in l$.
Como en la demostración del Teorema 3, $\mathcal{G}$ contiene una traslación que no es paralela a l.
Escribimos la traslación como $\tau_{\overrightarrow{PQ}}$ donde Q es la imágen de P por la traslación.
Tenemos que $\gamma \tau_{\overrightarrow{PQ}} \gamma^{-1} = \tau_{\overrightarrow{\gamma(P)\gamma(Q)}}$, luego $\tau_{\overrightarrow{\gamma(P)\gamma(Q)}} \in \mathcal{G}$. En consecuencia, $\tau_{\overrightarrow{\gamma(Q)\gamma(P)}} = \tau^{-1}_{\overrightarrow{\gamma(P)\gamma(Q)}}$.



Sea $R = \tau_{\overrightarrow{\gamma(Q)\gamma(P)}}(B)$.
Como en el teorema anterior, se tiene que R no está en la recta que pasa por P y es perpendicular a l.
Dado que $\tau_{\overrightarrow{PQ}}$ no es paralela a l, R no es P.
Como $\tau_{\overrightarrow{\gamma(Q)\gamma(P)}}\tau_{\overrightarrow{PR}}(P) = \tau_{\overrightarrow{\gamma(Q)\gamma(P)}}(Q) = R$, se tiene que $\tau_{\overrightarrow{PR}} = \tau_{\overrightarrow{\gamma(Q)\gamma(P)}}\tau_{\overrightarrow{PQ}} \in \mathcal{G}$.
Luego, $\mathcal{G}$ contiene una traslación $\tau' = \tau_{\overrightarrow{PR}}$ perpendicular a l, es decir, hay una traslación τ' tal que las traslaciones en $\mathcal{G}$ perpendiculares a l son de la forma τ'^m para todo m entero no nulo.□

Observación: Como en el caso anterior, se puede probar que las líneas paralelas l que son ejes de reflexión deslizantes en $\mathcal{G}$ están espaciadas por $\frac{1}{2}\tau'$.

Teorema 5: Sea $\mathcal{G} \subset \mathcal{M}$ un grupo cristalográfico. Supongamos ρ es una rotación en $\mathcal{G}$, entonces ρ es de orden 2, 3, 4 o 6.

Demostración:

Sean P y Q dos centros de rotación de orden n de modo que
$\rho_{P,\frac{360^\circ}{n}}, \rho_{P,\frac{360^\circ}{n}} \in \mathcal{G}$.
Luego, $\rho_{P,\frac{360^\circ}{n}}\rho_{Q,\frac{-360^\circ}{n}}$ es una traslación en $\mathcal{G}$, es decir,

$$\rho_{P,\frac{360^\circ}{n}}\rho_{Q,\frac{-360^\circ}{n}} = \tau_{v_1}^{m}\tau_{v_2}^{n} \in \mathcal{G}$$

En consecuencia,

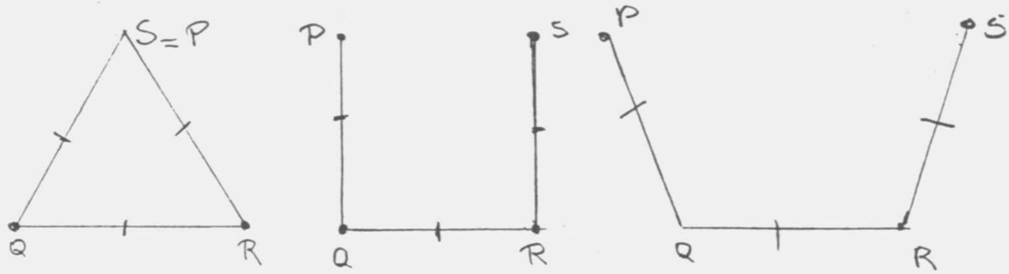
$$\rho_{P,\frac{360^\circ}{n}}(Q) = \tau_{v_1}^m \tau_{v_2}^n \rho_{Q,\frac{360^\circ}{n}}(Q) = \tau_{v_1}^m \tau_{v_2}^n (Q).$$

Supongamos que elegimos Q de forma tal que resulta el centro de rotación de orden n más cercano a P.

Sea $R = \rho_{Q,\frac{360^\circ}{n}}(P)$.

Como $R = \tau_{v_1}^m \tau_{v_2}^n(P)$, se tiene que R es un centro de rotación de orden n y $\overline{PQ} = \overline{QR}$.

Análogamente, $S = \rho_{R,\frac{360^\circ}{n}}(Q)$, es un centro de rotación de orden n y $\overline{RQ} = \overline{RS}$. Si S coincide con P, se obtiene que el triángulo PQR es equilátero y, en consecuencia, $n = 6$. Si P no coincide con Q, por la elección de Q, $\overline{PQ} \leq \overline{SP}$. Luego, $n \leq 4$. En consecuencia, n puede tomar los valores 2, 3, 4 o 6.



5 Reticulados

En esta sección analizaremos en forma más detallada los diferentes tipos de reticulado del plano.

Sea T el reticulado formado por el conjunto de todos los puntos $X_{m,n} = \tau_{mv_1+nv_2}X$, para X un punto fijo del plano, v_1, v_2 vectores fijos no paralelos en el plano, m, n enteros. Llamaremos *región fundamental* al cuadrilátero determinado por cualquiera de las 4-uplas formada por los puntos $X_{m,n}$, $X_{m+1,n}$, $X_{m+1,n+1}$, $X_{m,n+1}$.

Los reticulados se pueden clasificar en cinco tipos según la región fundamental. Si es un cuadrado, se llamará un *reticulado cuadrado*. Si es un rombo de

60:, se denominará *reticulado hexagonal*, esto se debe a que los puntos más cercanos a cualquiera de los puntos en el reticulado son los vértices de un hexágono regular. Si el reticulado tiene un rombo como región fundamental, es decir, un paralelogramo con lados iguales, será un *reticulado romboidal.* Si tiene un rectángulo, se denominará un *reticulado rectangular.* Por último, si no es uno de los casos anteriores, será un *reticulado paralelogramo.*

Observemos que si:
un mosiaco admite una reflexión, entonces el reticulado debe ser romboidal, rectangular o cuadrado;
tiene una rotación de 90^o, el reticulado debe ser un cuadrado;
tiene una rotación de 60^o o 120^o, el reticulado será hexagonal.

Los reticulados son tipos especiales de mosaicos, y constituyen ejemplos de cinco de los 17 grupos cristalográficos.

Tipo de reticulado	**Grupo cristalográfico**	**Orden de rotación**	**Ejes de reflexión**
paralelogramo	2(p2)	2	ninguna
rectangular	6(pmm)	2	90^o
romboidal	9(cmm)	2	90^o
cuadrado	11(p4m)	4	45^o
hexagonal	17(p6m)	6	30^o

Observación: Una región fundamental para el reticulado definido para un grupo cristalográfico es un dominio fundamental para el grupo cristalogáfico.

6 Los 17 mosaicos del plano

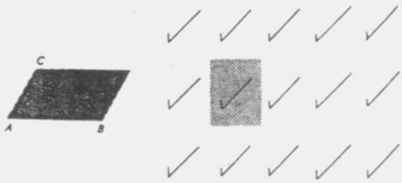
La siguiente tabla presenta la clasificación completa de los 17 tipos de mosaicos del plano, la que se puede obtener a partir de un cuidadoso análisis de los distintos tipos de reticulados en forma conjunta con los resultados de la sección 4.

Grupo cristalog.	Notación IUC	Notación Guggenheimer	Tipo de reticulado	Orden de rotación	Ejes de reflexión
1	p1	C_1	paralelogramo	ninguno	ninguno
2	p2	C_2	paralelogramo	2	ninguno
3	pm	$D_1 kk$	rectángulo	ninguno	paralelo
4	pg	$D_1 gg$	rectángulo	ninguno	ninguno
5	cm	$D_k g$	romboidal	ninguno	paralelo
6	pmm	$D_2 kkkk$	rectángulo	2	90^o
7	pmg	$D_2 kkgg$	rectángulo	2	paralelo
8	pgg	$D_2 gggg$	rectángulo	2	ninguno
9	cmm	$D_2 kgkg$	romboidal	2	90^o
10	p4	C_4	cuadrado	4	ninguno
11	p4m	D_4^*	cuadrado	4*	45^o
12	p4g	D_4^o	cuadrado	4**	90^o
13	p3	C_3	hexágono	3	ninguno
14	p31m	D_3^o	hexágono	3**	60^o
15	p3m1	D_3^*	hexágono	3*	30^o
16	p6	C_6	hexágono	6	ninguno
17	p6m	D_6	hexágono	6	30^o

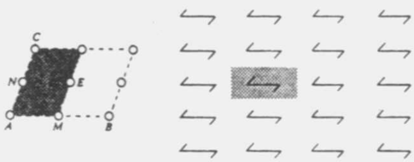
*=todos los centros de rotación están sobre ejes de reflexión,

**=no todos los centros de rotación están sobre ejes de reflexión.

Grupo cristalográfico 1 (p1) Es el más sencillo de los grupos cristalográficos, solo consiste de traslaciones. No contiene reflexiones, ni reflexiones deslizadas, ni rotaciones. Su reticulado es paralelogramo, de modo que el dominio fundamental para el grupo cristalográfico es la región fundamental para el reticulado.

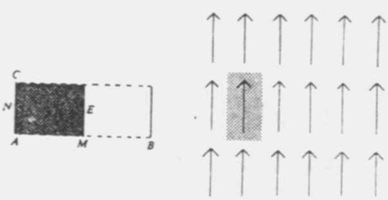


Grupo cristalográfico 2 (p2) Este grupo difiere del anterior en que contiene rotaciones de 180^o, es decir, rotaciones de orden 2. No contiene reflexiones ni reflexiones deslizadas. Su reticulado es paralelogramo. Un dominio fundamental es la mitad de un paralelogramo que es región fundamental para el subgrupo de traslaciones.



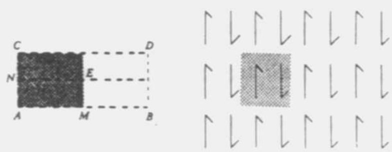
Grupo cristalográfico 3 (pm)

Este grupo contiene reflexiones. Los ejes de reflexión son paralelos a uno de los ejes de traslación y perpendicular al otro eje de traslación. El reticulado es rectangular. No hay rotaciones ni reflexiones deslizadas. Una región fundamental para el subgrupo de traslaciones es un rectángulo y puede elegirse de modo que esté dividido por un eje de reflexión, así, uno de los medios rectángulos constituirá un dominio fundamental para el grupo cristalográfico.



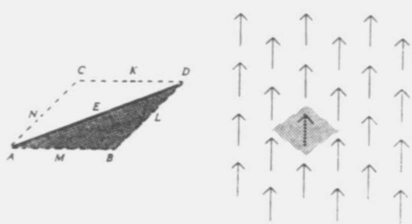
Grupo cristalográfico 4 (pg)

Este grupo contiene reflexiones deslizadas. La dirección de las reflexiones deslizadas es paralela a uno de los ejes de traslación y perpendicular al otro eje de traslación. El reticulado es rectangular. No hay rotaciones ni reflexiones. Una región fundamental para el subgrupo de traslaciones es un rectángulo y puede elegirse de modo que esté dividido por un eje de reflexión, así, uno de los medios rectángulos constituirá un dominio fundamental para el grupo cristalográfico.



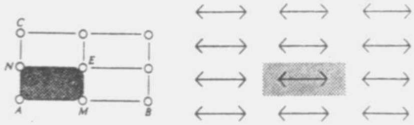
Grupo cristalográfico 5 (cm)

Este grupo contiene reflexiones y reflexiones deslizadas con ejes paralelos. No hay rotaciones en este grupo. Las traslaciones puede formar cualquier ángulo, pero los ejes de las reflexiones se bisecan el ángulo formado por las traslaciones. La región fundamental para el subgrupo de las traslaciones es un rombo. Un dominio fundamental para el grupo cristalogáfico es la mitad del rombo.



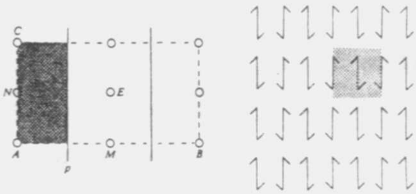
Grupo cristalográfico 6 (pmm)

Este grupo cristalográfico contiene ejes de reflexión perpendiculares. No hay reflexiones deslizadas o rotaciones. El reticulado es rectangular, y un rectángulo que constituya una región fundamental para el subgrupo de traslaciones puede elegirse de modo que un cuarto del mismo constituya un dominio fundamental para el grupo cristalográfico.



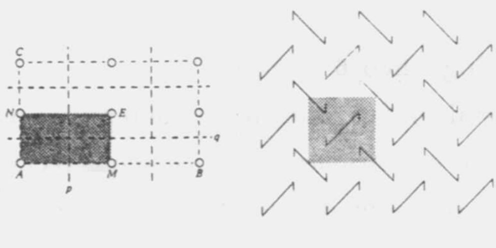
Grupo cristalográfico 7 (pmg)

Este grupo contiene una reflexión y una rotación de 180^o, es decir de orden 2. Los centros de reflexión no estan sobre los ejes de reflexión. El reticulado es rectangular, y un cuarto de la región fundamental para el grupo de traslaciones es un dominio fundamental para el grupo cristalográfico.



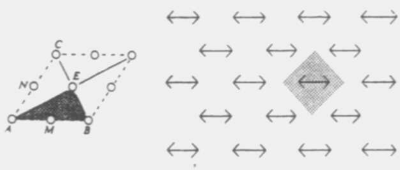
Grupo cristalográfico 8 (pgg)

Este grupo no contiene reflexiones, pero contiene reflexiones deslizadas y rotaciones de orden 2. Hay ejes perpendiculares para las reflexiones deslizadas y los centros de las rotaciones no están sobre los ejes. El reticulado es rectangular, y un cuarto rectángulo de una región fundamental para el grupo de traslaciones es un dominio fundamental para el grupo cristalográfico.



Grupo cristalográfico 9 (cmm)

Este grupo tiene ejes de reflexión perpendicular, como el grupo 6, pero también tiene rotaciones de orden 2. Los centros de las rotaciones no están sobre los ejes de reflexión. El reticulado es romboidal, y un cuarto de una región fundamental para el grupo de traslaciones es un dominio fundamental par el grupo cristalográfico.

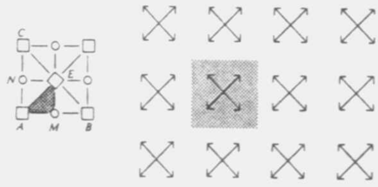


Grupo cristalográfico 10 (p4)

Este grupo contiene rotaciones de 90°, es decir, una rotación de orden 4. También tiene rotaciones de orden 2. Los centros de rotaciones de orden 2 están entre los centros de rotaciones de orden 4. No hay reflexiones. El reticulado es un cuadrado, y también, un cuarto de una región fundamental para el grupo de traslaciones es un dominio fundamental para el grupo cristalográfico.

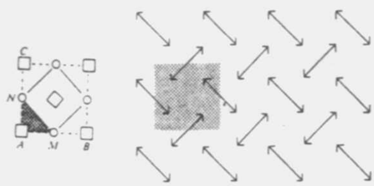
Grupo cristalográfico 11 (p4m)

Este grupo difiere del anterior en que contiene reflexiones. Los ejes de reflexión forman ángulos de 45° de modo que cuatro ejes de reflexión pasan por centros de rotaciones de orden 4. En realidad todos los centros de rotación están sobre los ejes de reflexión. El reticulado es cuadrado, y si lo dividimos en ocho triángulos, uno de ellos constituye un dominio fundamental para el grupo cristalográfico.



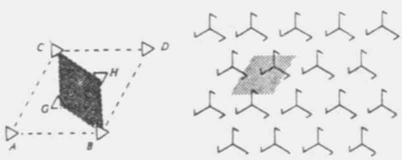
Grupo cristalográfico 12 (p4g)

Este grupo contiene reflexiones y rotaciones de ordenes 2 y 4. Los ejes de reflexión son perpendiculares, y ninguno de los centros de rotación están sobre los ejes de reflexión. También el reticulado es cuadrado, y un octavo de un cuadrado fundamental para el grupo de las traslaciones es un dominio fundamental para el grupo cristalográfico.



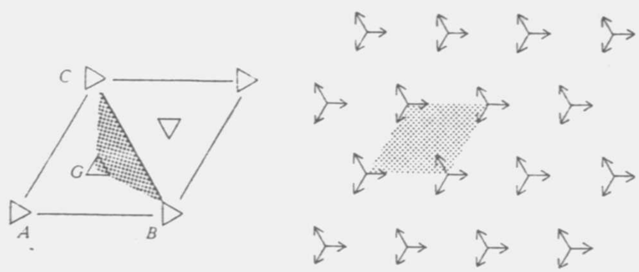
Grupo cristalográfico 13 (p3)

Este es el más simple de los grupos que contiene rotaciones de 120°, es decir, rotaciones de orden 3. En este caso, el reticulado es hexagonal.



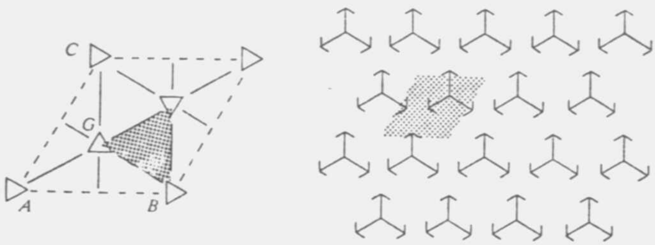
Grupo cristalográfico 14 (p31m)

Este grupo contiene reflexiones, cuyos ejes forman ángulos de 60°, y rotaciones de orden 3. Algunos de los centros de rotación están sobre ejes de reflexión, y otros no. El reticulado es hexagonal.



Grupo cristalográfico 15 (p3m1)

Este grupo es similar al anterior, contiene relexiones y rotaciones de orden 3. Los ejes de reflexión forman ángulos de 60^o, pero ahora, todos los centros de rotación están sobre los ejes de reflexión. El reticulado es hexagonal.



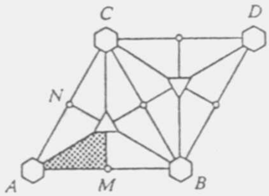
Grupo cristalográfico 16 (p6)

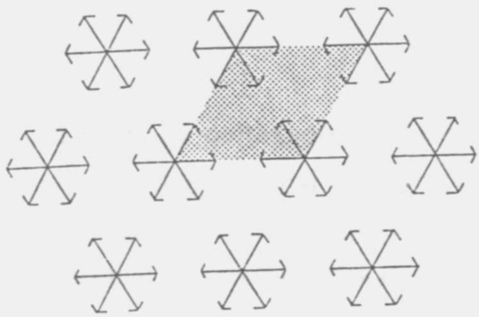
Este grupo contiene rotaciones de 60^o, esto es, rotaciones de orden 6. También contiene rotaciones de orden 2 y 3, pero no contiene reglexiones. El reticulado es hexagonal.

Grupo cristalográfico 17 (p6m)

Este el grupo cristaligráfico más complicado, contiene rotaciones de orden

2, 3 y 6, y también reflexiones. En los centros de rotaciones de orden 6, se intersecan seis ejes de reflexión que forman ángulos de 30°. El reticulado es hexagonal.





Universidad Nacional de la Patagonia San Juan Bosco.