Problemas para resolver

Los ejercicios estan ordenados en orden creciente de dificultad (subjetiva)

0) ¿ Que triángulo tiene mayor área: uno con lados de longitud 3; 4 y 5 metros, u otro cuyos lados sean los cuadrados de esos números?

1) Supongamos que no hubiera ninguna montaña, sierra, mar, etc en el ecuador de la Tierra. Si se tomara un cable cuya longitud fuese igual a la longitud de la circunferencia de la Tierra más 13 metros y se envolviera el ecuador con él, ¿ Podría un hombre arrastrarse por debajo de este cable?

2) a) Un hombre va de un pueblo A a un pueblo B por un camino cuesta arriba a un promedio de 4 km/h. Luego vuelve cuesta abajo de B a A a un promedio de 6 km/h. Su amigo va por un camino llano desde A hasta otro pueblo C, ida y vuelta a un promedio de 5 km/h. Si la distancia de C a A es la misma que la de B a A, ¿Quién vuelve primero?

b) En general, si dos personas van desde un punto A a uno B, el primero yendo a v_1 km/h y volviendo a v_2 km/h; mientras que el segundo va y vuelve a un promedio de $(v_1 + v_2)/2$ km/h, probar que solo llegarán al mismo tiempo si $v_1 = v_2$. ¿Quién gana si no es así?

3) Probar que el resto de la división de cualquier primo por 30 es también un primo.

4) Probar que $1-x+x^p-x^q+x^r > 0$ $\forall x$ real; $\forall p < q < r$, p, r pares, q impar.

5) Sea d_n igual al número de diagonales de un polígono regular convexo de n lados y sea a_n igual al último dígito de d_n. Probar que el número $N = 0.a_1a_2a_3....$ es racional.

6) Probar que todo número natural tiene un múltiplo cuyos dígitos son todos ceros y unos. En particular, todo número tiene un múltiplo tal que la suma de sus dígitos es menor o igual que la cantidad de dígitos.

7) a) Probar que no existen números naturales x, y, z (no necesariamente distintos) tales que $x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$.

b) Hallar naturales x, y, z tales que $x^2+y^2+z^2 = 3xyz$. ¿Existen distintos dos a dos?

c) ¿Existen naturales x, y, z tales que $x^2 + y^2 + z^2 = 5xyz$? Probar que cualquier terna que satisfaga la ecuación debe consistir de números distintos dos a dos.

8) Definamos la sucesión $a_1 = a_2 = 1$, $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$. (Sucesión de Fibonacci). Por ejemplo, $a_3 = 2$, $a_4 = 3$; $a_5 = 5$; $a_6 = 8$; $a_7 = 13$, etc.

a) Probar que a_n y a_{n+1} son coprimos.

b) Hallar el máximo común divisor entre a_{15} y a_5; entre a_4 y a_{10}; entre a_{12} y a_9; y entre a_{15} y a_7

c) (difícil sin hacer d)) Hallar el máximo común divisor entre $a_{1000000}$ y a_{1550}

d) En general, encontrar el máximo común divisor entre a_n y a_m. (Ayuda: de los ejemplos de b) haga una hipótesis. Luego, probarla, demostrando primero que $a_{n+m} = a_n a_{m-1} + a_{n+1} a_m$ y que, por lo tanto, a_{kn} es un múltiplo de a_n.

9) Un número natural es *perfecto* si la suma de todos sus divisores propios (menores a el) es igual a el mismo. Por ejemplo, 6 es perfecto, pues $1+2+3 = 6$. 28 también, pues $1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28$. En cambio, 32 no es perfecto, pues $1+2+4+8+16 = 31$; y 72 tampoco pues $1+2+3+6+8+9+12+24+36 = 101$.

a) Probar que los números: 987.654.321 ; 545.529.987 ; 226.901.853 ; 242.457.772 ; 100.845.268 ; 216.710.044 ; 23.602.084 ; 13.410.275 y 630.282.925 NO son perfectos. (Ayuda: tratar de hallar todos los divisores puede ser difícil, aunque con un computador podría no ser tanto trabajo. Es mas rápido usar los siguientes items. Con una calculadora basta, o también a mano)

b) Probar que si un número es divisible por 9 pero no por 27 ni por 13, entonces no puede ser perfecto.

c) Probar que si un número es divisible por 4 pero no por 7 ni por 8, entonces es perfecto.

d) En general, si p es primo, y un número es divisible por p^2, pero no por p^3 ni por $1+p+p^2$, entonces ese número no puede ser perfecto.

e) El item d) parece bastante general, pero puede el lector generalizarlo aun más?

Daniel Penazzi.
Facultad de Matemática, Astronomía y Física.
Universidad Nacional de Córdoba.