# Pretorneo de las ciudades

Los siguientes problemas formaron parte del Pretorneo de las ciudades, realizado en abril de 1993.

**Problema 4 (nivel mayor).**
Se da un ángulo en el plano, con vértice en 0 y un punto A en el interior del ángulo. Se eligen puntos M y N, uno en cada lado del ángulo, de modo tal que los ángulos $\widehat{OAM}$ y $\widehat{OAN}$ sean iguales.
Probar que de acuerdo a la posición de A, se verifica a) o b):
a) Al variar M y N las rectas MN son paralelas a una recta fija.
b) Al variar M y N las rectas MN pasan por un punto fijo.

**Solución.**
Demostremos en primer lugar un resultado útil:
Sean X, N, Y, M puntos alineados (en ese orden). Sea 0 un punto fuera de la recta que los contiene. Consideremos $m_x$ y $m_y$ las distancias desde M hasta OX y OY respectivamente, $n_x$ y $n_y$ las distancias desde N hasta OX y OY respectivamente. Tenemos entonces:

$\frac{MX}{MY} = \frac{(MOX)}{(MOY)} = \frac{m_x OX}{m_y OY}$, donde $(MOX)$ y $(MOY)$ son las superficies de los triángulos.

Análogamente se obtiene que $\frac{NX}{NY} = \frac{n_x OX}{n_y OY}$.

Entonces $\frac{MX.NY}{NX.MY} = \frac{m_x n_y}{n_x m_y}$.

Si otra recta intersecta a $OX, ON, OY$ y $OM$ en $X', N', Y'$ y $M'$ respectivamente y se definen $m'_x.m'_y, n'_x$ y $n'_y$ como antes, tenemos:

$$\frac{M'X'.N'Y'}{N'X'.M'Y'} = \frac{m'_x n'_y}{n'_x m'_y}.$$

Pero:

$\frac{m_x}{m'_x} = \frac{OM}{OM'} = \frac{m_y}{m'_y}$ y $\frac{n_x}{n'_x} = \frac{ON}{ON'} = \frac{n_y}{n'_y}$. Por lo tanto:

$$\frac{MX.NY}{NX.MY} = \frac{M'X'.N'Y'}{N'X'.M'Y'}$$

Volvamos a nuestro problema.

Si A pertenece a la bisectriz de $\widehat{MON}$ entonces $MN$ es perpendicular a $OA$. Si $\widehat{M'AO} = \widehat{N'AO}$ para $M'$ en $OM$ y $N'$ en $ON$, $M'N'$ también es perpendicular a $OA$, y por lo tanto es paralela a $MN$.

Supongamos que $\widehat{MOA} > \widehat{NOA}$. Entonces la recta por $A$ perpendicular a $OA$ intersecta a $MN$ en un punto $X$ que no está entre $M$ y $N$. Sea $Y$ la intersección de $MN$ con $OA$. Observamos que $AX$ es la bisectriz exterior de $\widehat{MAN}$. Por lo tanto $\frac{MX}{NX} = \frac{MA}{NA} = \frac{MY}{NY}$, de modo que $\frac{MX.NY}{NX.MY} = 1$.

Supongamos que $M'\widehat{AO} = N'\widehat{AO}$ para $M'$ en $OM$ y $N'$ en $ON$. Afirmamos que $M'N'$ pasa por $X$.

Sean $Y', X', X''$ los puntos donde $M'N'$ corta a $OY, AX$ y $OX$ respectivamente. Observamos que ni $X'$ ni $X''$ están entre $M'$ y $N'$. Por las propiedades de la bisectriz, $\frac{M'X'.N'Y'}{N'X'.M'Y'} = \frac{MX.NY}{NX.MY} = 1$.

Pero si aplicamos el resultado demostrado al principio, tenemos:

$$\frac{M'X''.N'Y'}{N'X''.M'Y'} = \frac{MX.NY}{NX.MY} = 1$$

Entonces:

$$\frac{M'X'}{N'X'} = \frac{M'X''}{N'X''}$$

Pero $M', N', X', X''$ están alineados y ni $X'$ ni $X''$ están entre $M'$ y $N'$, entonces debe ser $X' = X''$.

En efecto, si $M'X' = a, N'X' = b, X'X'' = k, \frac{a}{b} = \frac{a \pm k}{b \pm k} \Rightarrow k = 0$.

Como este punto pertenece simultáneamente a $OX$ y a $AX$, debe ser $X$. Esto prueba nuestra afirmación.

# Soluciones de Problemas

Probl.2, V. 9.2, p. 43. (Solución M.I.V. Rocha, U.N. Tucumán).

Construir un sólido de volumen finito y área lateral infinita.

Dado un prisma recto su volumen será igual al producto de la superficie de su base y la altura del mismo ($V = S_l.h$) de manera análoga su área lateral será equivalente a la del rectángulo cuyos lados miden la altura del prisma y la longitud del polígono que es su base ($A = l_b.h$). Por lo tanto bastará construir un polígono cuya superficie sea finita y su longitud infinita para que las condiciones del problema sean satisfechas.

Recordemos mi artículo en el vol. 6-3 "Series geométricas: algunas aplicaciones" (pág. 37 a 45). En la aplicación d) me refería a la Curva Copo de nieve. Es justamente esta curva la solución a nuestro problema. Transcribiré ese trozo del artículo: (pág. 41 y 42).

"Una curva muy singular es la copo de nieve" (su nombre deriva de su parecido con los cristales de nieve). Fue concebida en función de un proceso de trazado en etapas múltiples:

*Etapa 1:* se inicia con un triángulo equilátero de lado igual a la unidad.

*Etapa 2:* se divide cada uno de los lados en 3 partes iguales y en cada tercio medio se construye un triángulo equilátero dirigido hacia afuera, suprimiendo las partes comunes a los triángulos viejo y nuevo.

*Etapas sucesivas:* se repite el procedimiento de la Etapa 2.

Su singularidad se debe a que, en cada etapa del trazado, su longitud es 4/3 de la longitud en la etapa anterior:

$l = long\ C_n = 3 + \sum_{i=2}^{n} \left(\frac{L_1}{3}\right)^{i-2}$, de donde, si $n \to \infty, l = 3 + \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^{j-1}$ y como $\frac{4}{3} > 1$, esta serie diverge. Es decir posee longitud infinita.

En cambio si consideramos el área encerrada por las curvas, ésta es, a partir de $C_3$, $\frac{4}{9}$ del área en la etapa anterior:

$$\text{A} = \text{área } C_n = \tfrac{\sqrt{3}}{4}\left(1 + \tfrac{1}{3}\sum_{i=2}^{n} \left(\frac{4}{9}\right)^{i-2}\right), \text{ de donde si } n \to \infty$$

$$A = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(1 + \frac{1}{3}\sum_{i=2}^{\infty}\left(\frac{4}{9}\right)^{i-2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(1 + \frac{1}{3}\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{4}{9}\right)^{j-1}\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}\left(1 + \frac{1}{3}\,\frac{1}{1-\frac{4}{9}}\right) = 2\frac{\sqrt{3}}{5}$$

Es decir, área finita! y no sólo finita, sino que su valor es apenas $\frac{8}{5}$ del área de $C_1$, lo que significa que es sólo un 60% mayor que el área inicial".

Probl. V. 9.2. Se escoge un número al azar de entre todos los números de 5 cifras tales que la suma de sus cifras sea 43. ¿ Cuál es la probabilidad de que el número sea divisible por 11?

Los únicos números ( y son 15) de 5 cifras tales que la suma de sus cifras sea 43 son: .99.997 - .99979 - .99799 - .97999 - .79.999 - .99988 - .99898 - .99.889 - .98998 - .98.989 - .98.899 - .89.998 - .89.989 - .89899 - .88.999 -

La condición de divisibilidad por 11 establece que si a la suma de las cifras impares se le resta la suma de las cifras pares y el resultado es múltiplo de 11, entonces el número dado es divisible por 11.

Ya que las cifras que están en juego son 7 y 9 ú 8 y 9 (es decir son próximos los dígitos que consideramos), en nuestro caso sólo se dará

$(\mathbf{a_1} + \mathbf{a_3} + \mathbf{a_5}) - (\mathbf{a_4} + \mathbf{a_2}) = \mathbf{11}$ para lograr el/los números requerido/s.

Las posibilidades para $a_2 + a_4$ son $(1) 9+9=18$, $(2) 9+7=16$, $(3) 9+8=17$, $(4) 8+8=16$.

En el primer caso (1) $(a_1 + a_3 + a_5)$ debería ser igual a 27 o sea si $a_1 = a_3 = a_5 = 9$. Por lo tanto el (2) 99979 y 97999 y en (4) 98989. La probabilidad requerida es, por lo tanto, $P = \frac{3}{15} = \frac{1}{5} = 0,2$

*"Es una vieja máxima mía que, una vez que se ha excluído lo imposible, lo que resta, por más improbable que resulte, debe ser la verdad.*

*Sherlock Holmes.*

*"La singularidad es casi invariablemente, un indicio".*

*Sherlock Holmes.*

*"Al seguir dos diferentes caminos de razonamiento Watson, encontrarás algún punto de intersección, que debería aproximarse a la verdad".*

*Sherlock Holmes.*

# Problemas Varios

(para alumnos del profesorado)

$(A)$

Una circunferencia tiene centro en el origen y es tangente a la recta de ecuación $x + 2y = 1$. ¿Cuál es su radio?.

$(B)$

Hallar un entero m tal que $\sum_{n=0}^{m} \left(\frac{2}{3}\right)^n$ difiera de $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$ en menos de un millonésimo.

$(C)$

¿Cuál es el menor número natural con la propiedad de que la suma de sus cifras no divida a la suma de los cubos de las mismas?.

$(D)$

En cada uno de los siguientes casos, determinar si lo que se afirma es verdadero o falso:

a) Dados tres puntos cualesquiera del plano, existe un punto del plano que equidista de ellos.

b) Dados cinco puntos cualesquiera del plano, siempre hay tres de ellos alineados.

c) Dado un rectángulo en el plano, existe una circunferencia que pasa por sus cuatro vértices.

$(E)$

Hallar el área de la región del primer cuadrante limitada por el gráfico de la función $f(x) = x^3$ y las rectas de ecuaciones $y = \frac{1}{2}$ e $y = 1$.

$(F)$

¿Cuántos números entre 1 y 1000 tienen la suma de sus cifras igual a 13?.

# I Certamen el número de oro

## Prueba para alumnos del profesorado

1- Los boletos de una línea de colectivos están numerados de 00001 a 99999. ¿ Qué porcentaje de ellos son múltiplos de 13 y terminan en 127?

2- Hallar las soluciones enteras del sistema de ecuaciones

$$x^3 = y^2$$

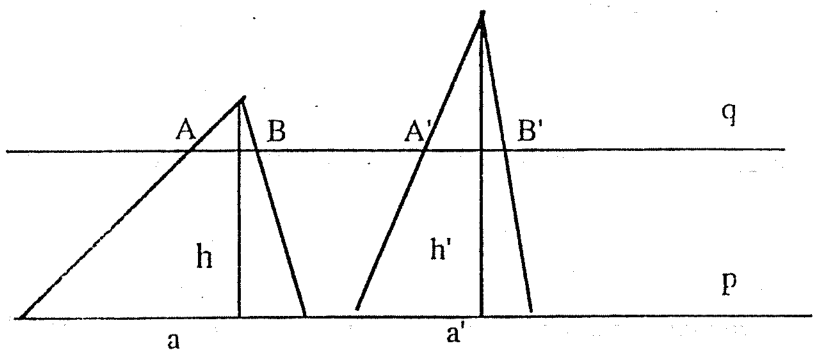
$$(x+y)^2 = 36x$$

3- Hallar las raíces reales del polinomio $X^6 - 7x^2 + \sqrt{6}$.

4- Dada la sucesión 1,2,5,10,17... consideremos la sucesión $(a_n)$ que se obtiene tomando el último dígito de cada término de la primera, es decir $1, 2, 5, 0, 7, ...$ calcular $\sum_{n=1}^{1994} a_n$

5- Sea f una función de $R$ en $R$ tal que $cos 17x = f(cosx)$ para todo número real $x$. Probar que $sen\ 17x = f(sen\ x)$ para todo x perteneciente a $\mathbf{R}$.

6- Consideremos dos triángulos como indica la figura




donde los lados y alturas verifican las relaciones $a > a'$ y $h < h'$. ¿Es posible determinar una recta q paralela a p tal que los segmentos $AB$ y $A'B'$ sean de igual longitud?

7- Dados en $\mathbf{R}^2$ los puntos $A = (-1, 00)$y $B = (3, 0)$, y dados números reales positivos $m$ y $h$, determinar el vértice $C$ de cada uno de los triángulos $ABC$ cuya mediana y altura correspondientes al lado $AB$ miden $m$ y $h$ respectivamente.

8- a) Dados números reales $a$ y $x, 0 < a < 1,\ x > 0$, probar que

$$(1+x)^a < 1 + ax$$

b) Sean $m, n$ números naturales mayores que 1. Probar que

$$\frac{1}{\sqrt[n]{m+1}} + \frac{1}{\sqrt[m]{n+1}} > 1$$

9- Se considera la matriz de orden 10 x 10 cuyos coeficientes, por filas, son los números naturales de 1 a 100, en su orden natural. Si se cambian los signos de los coeficientes de forma tal que exactamente la mitad de éstos en cada fila y en cada columna tengan signos opuestos, probar que la suma de todos los coeficientes de la matriz obtenida es 0.

10- Probar que la medida de la diagonal del pentágono regular de lado 1 es el número de oro: $(1 + \sqrt{5})/2$.

## Prueba para profesores de enseñanza media.

1- Considerados los números naturales de cuatro cifras, ¿qué porcentaje de ellos no tienen ninguna cifra menor que alguna que la precede?.

2- Determinar todas las ternas de números naturales coprimos dos a dos tales que cada uno de ellos divide a la suma de los otros dos.

3- Dado el polinomio $P(X) = X^4 + X^3 - 1/4X^2 + X + 1$, probar que para todo natural n mayor ó igual que 2, la potencia n-ésima de $P(X)$ tiene todos sus coeficientes no negativos.

4- En el municipio $X$ hay 30 funcionarios con los cuales el Director de Planeamiento desea formar 30 comisiones de 6 personas cada una de modo que no haya dos comisiones que tengan más de un miembro en común. ¿Puede el Director conseguir esto?.

5- Dado un cuadrilátero convexo cualquiera, construir con regla y compás un cuadrilátero semejante de área doble y de área mitad.

6- Sea $EFGH$ un cuadrilátero inscripto en el rectángulo $ABCD$, es decir, E pertenece al lado $AB, F$ al $BC, G$ al $CD$ y $H$ al $DA$. Probar que una condición necesaria y suficiente para que el área del cuadrilátero $EFGH$ sea la mitad de la $ABCD$ es que una de sus diagonales sea paralela a un lado del rectángulo.

7- Se arroja un dado sucesivas veces hasta que la suma de los resultados obtenidos supere a 12. ¿Cuál es la suma más probable?.

8- Sean $a_1, a_2, ...a_n$ números reales positivos y sea $b_1, b_2, ...b_n$ una permutación cualquiera de ellos. Probar que

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{b_i} \leq n$$

9- Se considera la matriz de orden $10 \times 10$ cuyos coeficientes, por filas, son los números naturales de 1 a 100, en su orden natural. Si se cambian los signos de los coeficientes de forma tal que exactamente la mitad de éstos en cada fila y en cada columna tengan signos opuestos, probar que la suma de todos los coeficientes de la matriz obtenida es 0.

10- Probar que la medida de la diagonal del pentágono regular de lado 1 es el número de oro: $(1+\sqrt{5})/2$

REGLAMENTO

-En el presente certamen sólo pueden participar profesores de enseñanza media en ejercicio (respectivamente alumnos activos del Profesorado de Matemática).

-La pre-inscripción efectuada en las Secretarías Regionales de O.M.A. tiene sólo carácter administrativo. La inscripción y participación definitiva se realiza por la entrega de la presente prueba. En la misma el profesor debe consignar: nombre completo, tipo y número de documento de identidad, domicilio, número de teléfono y colegio donde ejerce.

-El Consejo Superior de la O.M.A. dictaminará sobre los méritos de cada prueba.

-El ordenamiento por méritos se hará a lo sumo hasta el trigésimo lugar, según decisión del Consejo Superior de O.M.A., la que será inapelable.

-Se presentarán 10 problemas de los cuales el profesor participante seleccionará para concursar, entre los que haya resuelto u obtenido resultados parciales significativos, sólo los tres que a su juicio resulten de mayor peso desde el punto de vista matemático.

-En cualquier momento el profesor podrá retirarse del certamen si considera que no ha alcanzado algún resultado a su criterio satisfactorio.

-Está permitido consultar libros y apuntes y utilizar calculadora.

-La prueba es de carácter estrictamente personal.

-La interpretación de los enunciados está a cargo del profesor participante. No se responderán preguntas.

-La duración de esta prueba se ha estimado en tres horas. El participante podrá solicitar una extensión no superior a una hora.

-Los razonamientos y cálculos que intervienen en la resolución de los problemas deben consignarse en la hora de la prueba.

-Toda cuestión no contemplada en el presente reglamento será considerada por el Consejo Superior de la O.M.A.