Coordenadas Cartesianas: ¿ La única opción?

Mónica Bocco - Mónica Villarreal

Introducción

Este trabajo contiene, en parte, los temas de un curso dictado en la Reunión de Educación Matemática en el año 1990. Su título, que puede parecer algo así como el slogan de una campaña política, tiene una doble intención: por un lado, recordar algunos aspectos interesantes de las coordenadas cartesianas y mostrar el empleo, ventajas y desventajas que sobre las anteriores tienen las coordenadas polares y por otro, reflexionar sobre la matemática como una ciencia viva y no acabada, que día a día avanza.

El uso de coordenadas es un ejemplo claro y transparente sobre cómo la realidad crea la necesidad de generar nuevos conocimientos y así sobre carencias y porque no errores anteriores ir creciendo en el saber.

Cabe preguntarse aquí si la aversión que muchos estudiantes sienten hacia la matemática no será un poco debido a esa materia anquilosada y sin vida que a veces transmitimos, no olvidemos que la matemática la hicieron, y la hacemos, los hombres con todo lo que esto significa. La historia de la matemática y la propia realidad que nos rodea son ricas y fecundas en ejemplos quizás muy poco explotados como material didáctico. Mostrar el conocimiento vivo es una tarea que tenemos la responsabilidad de asumir como mediadores entre el objeto de conocimiento y nuestros alumnos. Este trabajo está dividido en tres partes. En la primera parte se analiza, en diversas situaciones, el empleo de métodos de coordenadas. En la segunda parte se introducen las coordenadas cartesianas como método de representación gráfica. Se estudian coordenadas cartesianas rectangulares y oblicuas, y la ventaja de aquellas sobre estas. Finalmente se analizan distintos tipos de escalas: lineales y no lineales, y la transformación de los gráficos de acuerdo a las escalas que se toman en cada eje cartesiano.

En la tercera parte se tratan las coordenadas polares y su relación con las coordenadas cartesianas. Las ventajas y desventajas de cada sistema de representación. Por último se realiza un análisis de gráficos en coordenadas polares.

1. Métodos de Coordenadas.

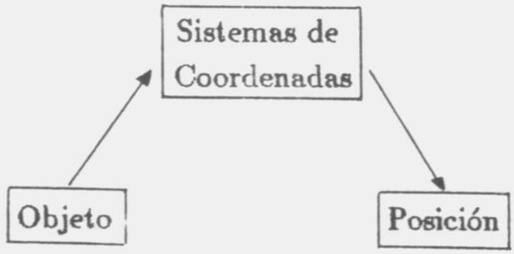
Métodos Gráficos: su importancia en la enseñanza de la Matemática.

A través de los gráficos, el mundo exterior o las relaciones que vinculan entre sí a sus elementos, se *visualizan* y se comprenden mejor. Es conveniente, siempre que sea posible *graficar* de alguna manera la situación y sus componentes. Los problemas se comprenden mejor y muchas veces se resuelven más cómodamente, a través de representaciones gráficas.

Las representaciones gráficas pueden ser muy variadas. Un mismo fenómeno puede representarse de maneras muy diferentes, y por esto conviene ejercitar las distintas posibilidades de manera de poder elegir, en cada caso, la forma más conveniente.

Para lograr una representación gráfica es necesario determinar *numéricamente* la situación de un punto en el espacio, en el plano, en la superficie de la tierra, etc... Los *sistemas de coordenadas* nos permiten determinar posiciones mediante números, dichos números reciben el nombre de *coor-*

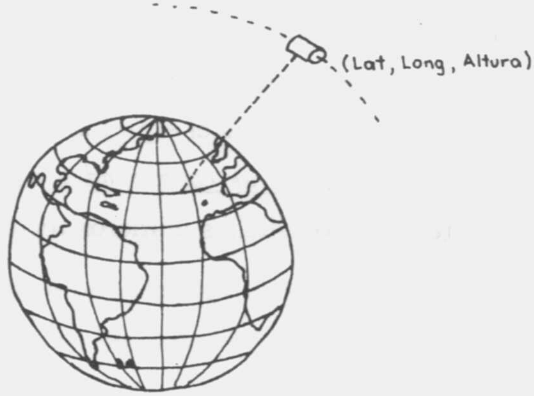
denadas.



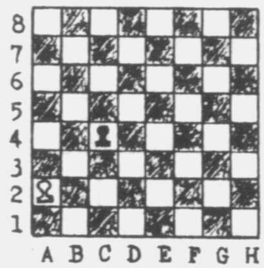
Las *coordenadas geográficas* nos permiten conocer la situación de una ciudad, pueblo, montaña en la superficie de la tierra: cada punto de la superficie terrestre tiene dos coordenadas: *longitud y latitud* .

Para determinar la posición de una ciudad o un pueblo sobre una ruta nacional se indica: *Ruta Nacional* $N^o\, 8\, km.\, 780$,distancia que se mide a partir de un punto que se toma como referencia (El Obelisco en la Capital Federal).

Para determinar la ubicación de un satélite en el espacio se necesitan tres números en vez de dos. Por ejemplo, se puede indicar además de la longitud y la latitud del punto sobre el cual se encuentra, la altura de éste sobre la superficie de la tierra.



En el juego de ajedrez se emplean unas coordenadas particulares, la posición de las piezas en el tablero se determina mediante letras y números. Las columnas de los escaques se designan por letras del alfabeto latino y las filas horizontales por números. A cada escaque del tablero le corresponde una letra que indica la columna y un número que indica la fila. En el dibujo el peón blanco se encuentra en el escaque *A 2* y el negro en *C 4*.



Diremos que el peón blanco tiene coordenadas (A,2) y el peón negro tiene coordenadas (C,4).

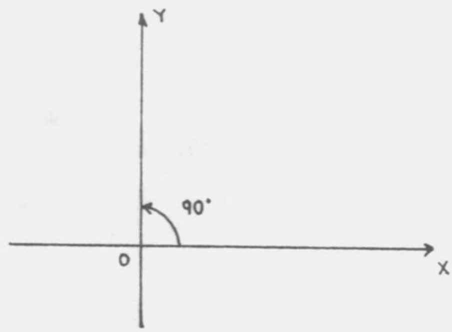
La aplicación de coordenadas permite jugar al ajedrez por correspondencia y a los alumnos jugar a la guerra naval (cuando están aburridos en clase!)

En estas notas nuestro interés estará centrado en cómo ubicar puntos en el plano. Hablar de puntos en la recta nos llevaría al estudio de la *recta numérica* y generalizando podemos estudiar sistemas de coordenadas en espacios n-dimensionales con $n \geq 3$.

2. Sistemas de Coordenadas Cartesianas

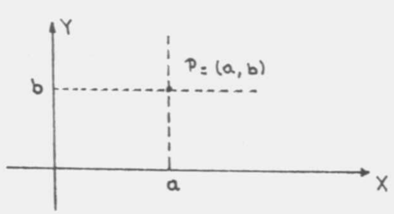
Sistemas de Coordenadas Ortogonales.

Para determinar las coordenadas de un punto en el plano trazaremos, en este último, dos rectas numéricas, perpendiculares entre sí.



La recta horizontal se llama *eje de las abscisas* o Eje X y la vertical *eje de las ordenadas* o Eje Y. La dirección de los ejes se elige de tal modo que el semieje positivo X coincida con el semieje positivo Y al hacerlo girar un ángulo de $90°$ en sentido antihorario. El punto de intersección de las rectas se llama *origen de coordenadas* .

Cualquier punto P en el plano se puede describir por el par ordenado (a, b) de números reales obtenidos trazando rectas perpendiculares a los ejes X e Y . como lo muestra la figura:



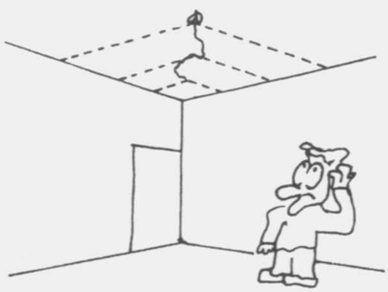
a = abscisa de P
b = ordenada de P

Las palabras coordenadas, abscisas y ordenadas fueron introducidas por Leibniz en 1692.

Algo de Historia.

El sistema de coordenadas que acabamos de ver tiene nombre propio: *sistema de coordenadas cartesianas* , debido al matemático y filósofo francés René Descartes (1596-1650). Una historia, quizás apócrifa, explica el porqué de este nombre.

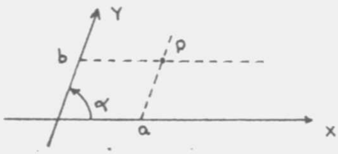
La historia cuenta que la idea original de la geometría analítica se le ocurrió a Descartes cuando mirando una mosca que caminaba por el techo de su cuarto cerca de una esquina, observó que la trayectoria de la misma sobre el techo podía describirse conociendo solamente la relación que conectaba las distancias de la mosca medidas desde dos paredes adyacentes.



Obviamente Descartes ubicó un sistema de coordenadas plano cuyo origen era una esquina de la habitación y los ejes las paredes adyacentes.

Sistemas de Coordenadas Oblicuos

Observemos que el sistema de coordenadas que hemos considerado es *ortogonal* , es decir, los ejes coordenados se cortan formando un ángulo *recto* . Surge entonces la pregunta ¿ por qué no considerar sistemas coordenados en los cuales los ejes se corten formando un ángulo α con $\alpha \neq 90°$ es decir *sistemas de coordenadas cartesianos* *oblicuos* ?



$P = (a, b)$

La respuesta puede ser relativamente sencilla:

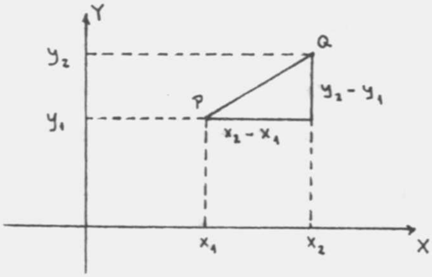
Podemos construir sistemas de coordenadas planos bastante fâcilmente; en realidad todo lo que necesitamos es un sistema de referencia apropiado acompañado de algunas reglas que nos digan como localizar un punto en el plano por medio de un conjunto ordenado de números asociado al sistema de referencia prefijado.

Sin embargo los sistemas de coordenadas fueron creados para la geometría y no la geometría para las coordenadas, y obviamente la geometría en el plano resulta en muchos casos ser más sencilla si la estudiamos con un sistema de coordenadas cartesianas *ortogonales* .

Veamos un ejemplo: definir la distancia entre dos puntos P y Q en el plano teniendo como datos sus coordenadas, en un sistema ortogonal y en un sistema oblicuo:

En el caso del sistema ortogonal, por Teorema de Pitágoras:

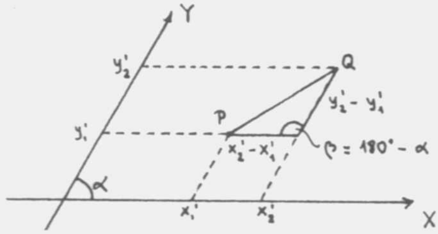
$$d(P, Q) = \sqrt{(y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2}$$



En el segundo caso, ya no podemos aplicar el T. de Pitágoras, debemos recurrir al Teorema del Coseno:

$$d(P,Q) = \sqrt{(x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 - 2(x'_2 - x'_1)(y'_2 - y'_1)\ cos\ (180^\circ - \alpha)}$$

resultando así una fórmula mucho más complicada que la anterior.



Este ejemplo nos muestra una de las ventajas de los sistemas ortogonales por sobre los oblicuos; sin embargo nada ni nadie nos impide hacer uso de los sistemas oblicuos si en realidad lo que queremos hacer es ¡complicarnos la vida!

Escalas

Las rectas que constituyen el sistema de referencia en los sistemas de coordenadas cartesianas, son rectas numéricas con alguna *escala* . La elección de escalas adecuadas nos permite hacer un uso más provechoso del sistema.

Podemos diferenciar 2 tipos de escalas:

- lineales
- no lineales

Ejemplo: Se quiere representar el movimiento rectilíneo uniforme de un móvil: sea e el espacio recorrido, v la velocidad (constante) y t el tiempo.

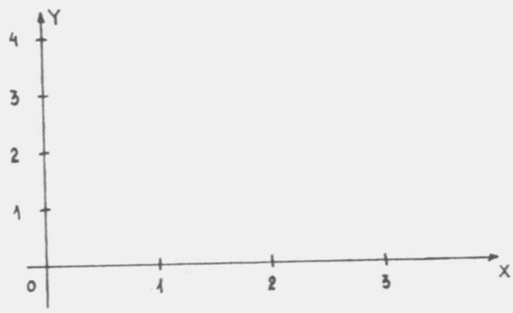
Como la ecuación que representa este movimiento es:

$$e = v.t$$

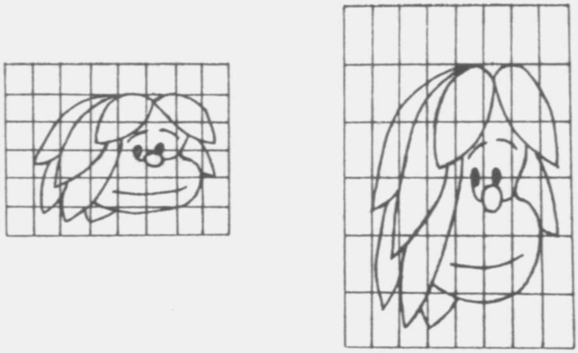
tomando un segmento de cierta longitud como representante de la velocidad v , los espacios recorridos en los tiempos $t = 1, 2, 3, ...$ se representan por puntos equidistantes:

Se dice que se trata de una *escala lineal* .

La siguiente condición caracteriza a las <u>escalas lineales</u> : *la distancia entre puntos sucesivos de la escala es igual para incrementos iguales de la variable* , si bien la unidad de medida no necesariamente es igual en ambos ejes. Así por ejemplo en el siguiente sistema el eje X e Y tienen escalas lineales distintas:



En publicidad o para fines políticos es frecuente el empleo de escalas *expandidas* con el propósito de aparentar variaciones de mayor o menor importancia que las reales.

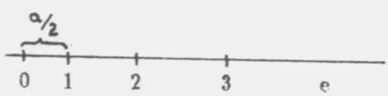


¿ Qué pasa si en el ejemplo anterior el móvil tiene una aceleración constante a ?

En este caso la ecuación del movimiento, suponiendo que el móvil parte del reposo, es:

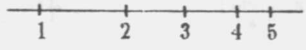
$$\epsilon = \frac{1}{2}.a.t^2$$

y entonces, el gráfico es:



Es decir, los puntos que corresponden a los tiempos $t = 1, 2, 3, \ldots$ ya no aparecen equidistantes. Se dice en este caso que la escala es *no lineal* .

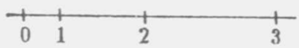
Un ejemplo importante de escala no lineal es la *escala logarítmica*



en la que las distancias al punto 1 van siendo *log* 1 , *log* 2 , *log* 3 . ... o sea la verdadera magnitud r se representa por los *log* r (observese que en el origen se anota el número 1 puesto que $log\ 1 = 0$).

Las escalas logarítmicas son muy importantes para representar cantidades con una gran variación, tales como las edades paleontológicas, o las dimensiones microscópicas y macroscópicas.

Otra escala importante es la de los cuadrados, en la cual los números $1, 2, 3, \ldots$ se colocan en los cuadrados $1, 4, 9, \ldots$.

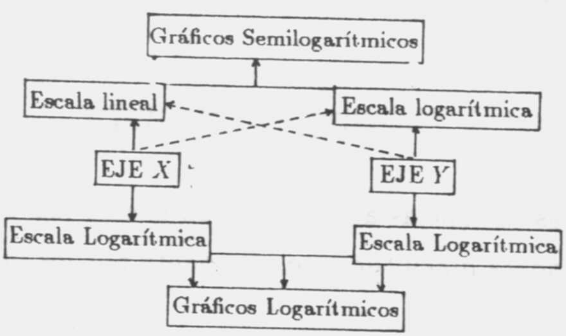


Ya hemos dicho que nuestro interés está centrado en el plano, es por ello que ahora trabajaremos con representaciones de gráficos cartesianos. De acuerdo a las escalas que se tomen en cada eje los más frecuentes son:

- semilogarítmicos
- logarítmicos

Cuando el eje X o el eje Y , tienen una escala logarítmica y la otra lineal, el sistema de coordenadas se llama *semilogarítmico* y da lugar a los gráficos *semilogarítmicos* .

Mientras que si ambos ejes de un sistema de coordenadas llevan escalas logarítmicas, éste se llama *logarítmico* (o *doblemente logarítmico*) y da lugar a los gráficos *logarítmicos* .



¿ Qué ventajas tiene el uso de sistemas de coordenadas semilogarítmicos o logarítmicos?

1. Cuando tenemos que dibujar una función exponencial $y = b.a^x$ con b y a positivos, cuyo $Dom = \mathbf{R}$ e $Img = \{y \in \mathbf{R}/y > 0\}$ es conveniente aplicar la *transformación logarítmica:*

$$log\ y = log\ b + x.log\ a$$

Si llamamos $\underline{Y = log\ y}$, $A = log\ a$, $B = log\ b$ obtenemos la <u>*función lineal:*</u>

$$Y = A.x + B$$

Naturalmente es más sencillo graficar esta recta.

2. Los gráficos doblemente logarítmicos se emplean para la representación gráfica de la función potencial $y = b.x^n$ con $b > 0$, $n \in \mathbf{R}$, $Dom = \{x \in \mathbf{R}/x > 0\}$ e $Img = \{y \in \mathbf{R}/y > 0\}$. Aplicando la *transformación logarítmica:*

$$log\ y = n.log\ x + log\ b$$

Si llamamos $\underline{Y = log\ y}$, $\underline{X = log\ x}$, $B = log\ b$ obtenemos la <u>*función lineal:*</u>

$$Y = n.X + B$$

Por lo tanto en un gráfico logarítmico, el exponente n de la función potencial aparece como la pendiente de la recta.

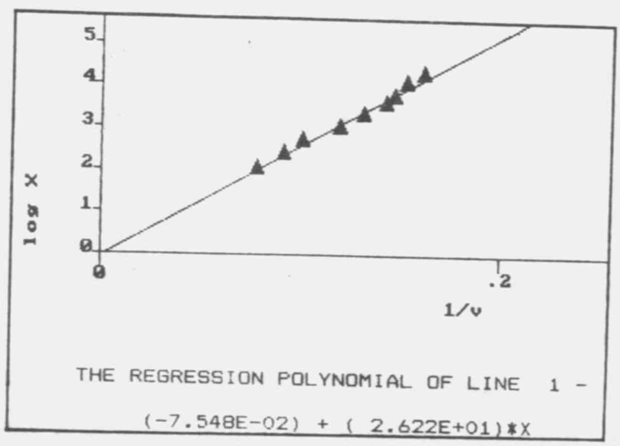
Notar: En 1. solo se aplicó transformación logarítmica o la variable dependiente mientras que en 2. se aplicó tanto a la variable dependiente como a la independiente.

Ejemplos:

1. [1] En los récords mundiales de carrera, sea x la distancia en yardas y t el tiempo récord en segundos. Se puede extraer la siguiente tabla del Almanaque Mundial:

x	t
100	7,8
220	20,0
440	44,8
880	105.1
1760	231,1
3520	499,8
5280	772,4
10560	1607,0
17600	2832,8

Sea $v = \frac{x}{t}$ la velocidad media en yardas / segundos. La representación de $\frac{1}{v}$ con respecto a $log\ x$ es el siguiente gráfico semilogarítmico:



De la observación del gráfico podemos deducir que los valores se

[1]Adaptado de Good I. J. , A power law and a logarithmic law in athletics. American Statistician, 1971

acercan mucho a una línea recta, de lo cual la relación entre x y v es la siguiente:

$$\begin{aligned} \log x &= a.\frac{1}{v} + b \\ \frac{\log x - b}{a} &= \frac{1}{v} \\ v &= \frac{a}{\log x - b} \end{aligned}$$

Por el método de mínimos cuadrados se estimó que $a = 26,220$ y $b = -0,075$ con lo cual obtenemos una función que relaciona la velocidad media y el espacio recorrido *independientemente* del tiempo.

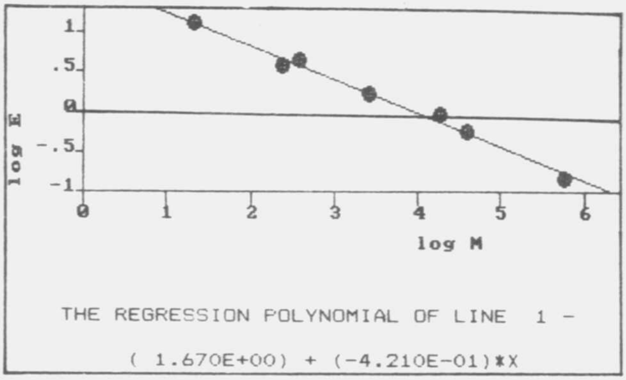
$$v = \frac{26,220}{\log x + 0,075}$$

2.[2] Se midió el gasto de energía en la carrera de varias especies animales. Sea E el costo de energía para transportar 1 g. de cuerpo una distancia de 1 km. (en cal/g. km.) y sea M la masa del cuerpo (en g.). Algunos datos empíricos son:

Animal	$M(g)$	$E(cal\ g^{-1}\ km^{-1})$
Ratón blanco	21	13
Ardilla de tierra	236	3,7
Rata blanca	384	4,4
Perro (pequeño)	$2,6 \times 10^3$	1,7
Perro (grande)	$1,8 \times 10^4$	0,92
Oveja	$3,9 \times 10^4$	0,58
Caballo	$5,8 \times 10^5$	0,15

Si se utilizan escalas logarítmicas para ambas cantidades el gráfico es el siguiente:

[2] Adaptado de Schmidt-Nielsen. Locomotion energy cost of swimming, flying and running. Science 177, 222-228, 1972



Al igual que en el ejemplo anterior, de la relación entre *log M* y *log E* (lineal) concluímos:

$$logE = p.logM + b$$

$$E = b'M^p \qquad b = log\ b'$$

$$E = 46,77\ M^{-0,42}$$

3. [3] La relación entre la longitud y el peso en la serpiente occidental de hocico de cerdo (Heterodon Nacicus); suponiendo que todas las serpientes de esta especie, jóvenes o viejas, tienen la misma forma y peso específico, si su peso es P y su longitud L es:

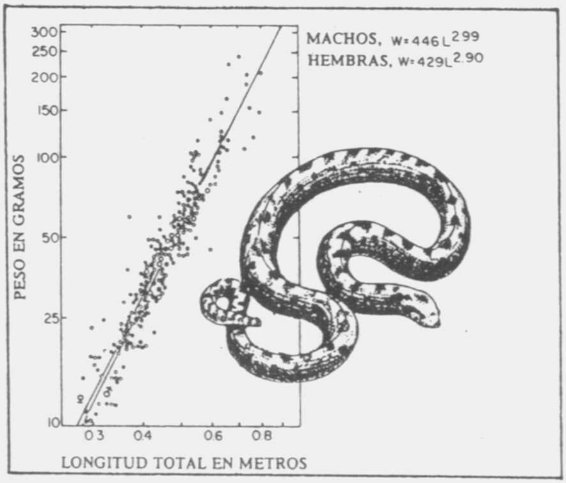
$$P = a.L^3 \quad \text{con una cierta constante } a$$

Aplicando logarítmo se obtiene:

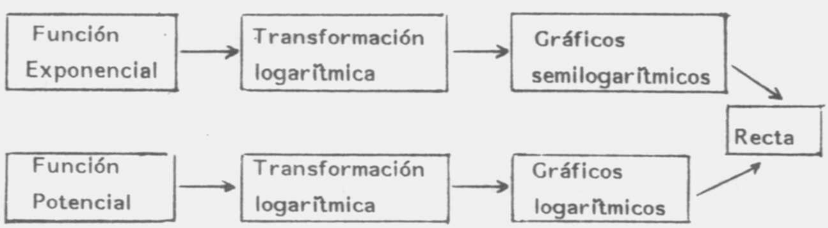
$$log\ P = 3.log\ L + log\ a$$

[3] Platt D. R. Natural history of the hognose snakes *Heterodon platyrhinos* and *Heterodon nasicus* . University of Kansas Publications, Museum of Natural History 18 . N. 4 . 1969

que es una relación lineal entre *log L* y *log P* . Por lo tanto el gráfico logarítmico será una recta de pendiente 3.



Resumamos ahora los principales resultados:



3. Sistemas de Coordenadas Polares

Los sistemas de coordenadas cartesianos son los más usados y han sido desarrollados enormemente. Mucha terminología, tal como nuestra clasificación de curvas en: lineales, cuadráticas, cúbicas , etc. , derivan del empleo de este sistema. Algunas curvas, sin embargo, tales como muchos espirales, tienen ecuaciones *intratables* referidas a un sistema cartesiano, mientras que gozan de una ecuación relativamente simple si se asocian a algún otro sistema coordenado inteligentemente diseñado.

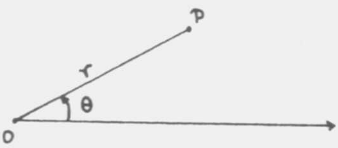
La descripción del lenguaje de las abejas refuerza nuestra afirmación anterior: cuando una abeja ha encontrado un lugar lleno de alimento, vuela de nuevo hacia la colmena, participa el aroma, y danza sobre la superficie vertical del panal. La abeja recorre una cierta distancia hacia el frente, vuelve en un semicírculo al punto de partida, recorre de nuevo el tramo recto, describe un semicírculo en la dirección opuesta, y así sucesivamente alternando regularmente. El número de recorridos por unidad de tiempo señala la distancia. Por ejemplo para una distancia de 1000 mts. la abeja exploradora efecúa unos 18 recorridos por minuto. En la parte recta del recorrido, la abeja sacude vigorosamente su abdomen. Un golpe vertical hacia arriba significa que el alimento está en la dirección del sol. Si lo hace 30° a la derecha de la vertical, significa que las provisiones están 30° a la derecha del sol, etc.

A partir de esta breve descripción de su lenguaje, aprendemos que las abejas no utilizan coordenadas cartesianas X e Y. En su lugar utilizan un ángulo y una distancia, en otras palabras, mediante la danza se transmiten las *coordenadas polares* de la fuente de alimento.

En la conducta animal, particularmente en el estudio de la orientación de los pájaros y los peces, las coordenadas polares desempeñan un papel muy importante.

Las coordenadas polares de un punto se definen en el plano de la siguiente forma: se fija un punto origen O llamado *polo* y una semirrecta con origen en O que se denomina *eje polar* .

Para determinar un punto P en el plano es suficiente indicar la distancia del punto al polo, r , y el ángulo de rotación o, desde el eje polar al segmento OP, que notaremos por el par ordenado (r, θ)



$P = (r, \theta)$

De este modo, en el sistema de coordenadas polares, la posición de un punto en el plano queda determinada por dos números que indican la distancia y la dirección en que se encuentra el punto.

De la definición anterior concluimos que el polo se puede caracterizar por la ecuación $r = 0$ y el eje polar por la ecuación $\theta = 0°$.

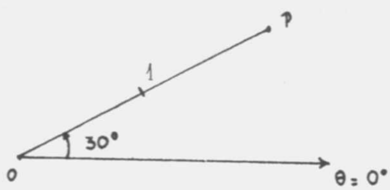
Las coordenadas polares fueron introducidas por Isaac Newton en 1671 y Jacques Bernoulli en 1691. El tratamiento definitivo de las coordenadas polares en su versión actual fue dado por Leonhard Euler en 1748.

Algunas consideraciones acerca de θ y r.

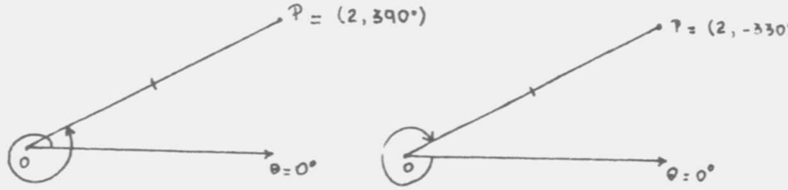
El ángulo θ puede tomar cualquier valor *positivo* cuando es medido en *sentido antihorario* y *negativo* si se lo mide en *sentido horario* .

De la consideración anterior y recordando que θ y $\theta + 2\pi$ representan el mismo ángulo se deduce que: *el ángulo asociado con un punto dado* *no es único* . Es decir, a diferencia de las coordenadas cartesianas, *no hay correspondencia biunívoca entre los puntos y las coordenadas polares que los representan* .

Ejemplo: El punto $P = (2, 30°)$



tiene también coordenadas $r = 2$, $\theta = -330°$ o $r = 2$, $\theta = 390°$, etc...



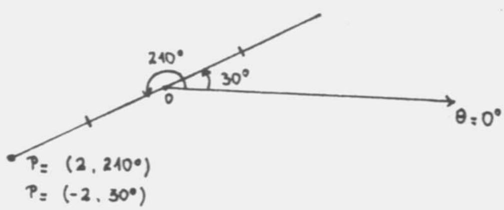
- Si bien hemos dicho que r representa una distancia, en ocasiones es necesario considerar r negativo, si acordamos que el par $(-r, \theta)$ y $(r, \theta + \pi)$ representan el mismo punto.

Ejemplo: Las semirrectas en dirección del ángulo $\theta = 30°$ y $\theta = 210°$ forman una recta que pasa por el polo.

Una persona que se encuentra situada en el polo "mirando" en la dirección del eje polar puede alcanzar el punto $P = (2, 210°)$ de dos maneras diferentes:

a. Primero girar 210° en sentido antihorario y luego avanzar dos unidades.

b. Girar solamente 30° en sentido antihorario y caminar hacia atrás dos unidades.

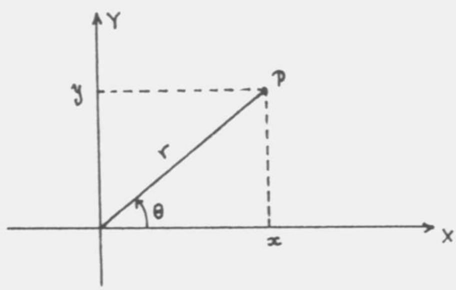


Conversión de coordenadas polares

La siguiente situación se planteó luego de un experimento sobre orientación y navegación de palomas mensajeras: un grupo de palomas fue soltado a 72 km. de su palomar. Considerando el palomar como polo de un sistema de coordenadas polares, el punto de suelta tiene un azimut de 241° (azimut: ángulo medido en sentido horario desde el punto cardinal norte al punto de suelta) ¿ Cuántos km. al sur y al oeste del palomar está el punto de suelta ?

Para resolver este problema necesitamos primero ajustar el mapa geográfico a un sistema de coordenadas cartesianas rectangulares (suponien do para simplificar que la superficie de la tierra es plana) y luego encontrar una relación que vincule las coordenadas polares y cartesianas de un punto.

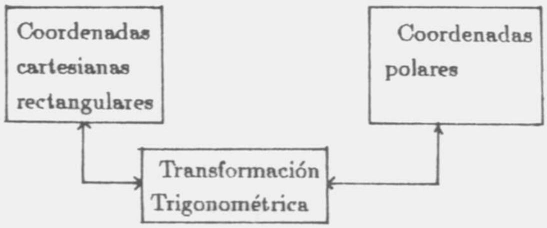
Para esto, hacemos coincidir el origen del sistema de coordenadas cartesianas con el polo y el eje polar con el eje X positivo.



con ayuda de la trigonometría obtenemos las siguientes relaciones:

$$x = r\cos\theta \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$y = r\,sen\,\theta \qquad \cos\theta = (x/r)$$
$$sen\,\theta = (y/r)$$

Así entonces:



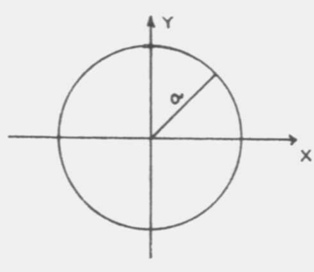
Nota: mediante el empleo de las fórmulas anteriores ud. podrá resolver el problema inicialmente planteado.

Gráficos en coordenadas polares

En coordenadas cartesianas estamos habituados a graficar funciones $y = f(x)$ del mismo modo podemos graficar funciones $r = f(\theta)$ en coordenadas polares.

Así por ejemplo, la ecuación de una circunferencia con centro en el polo es muy sencilla: si el radio de la circunferencia es a la ecuación tiene la forma:

$$r = a$$

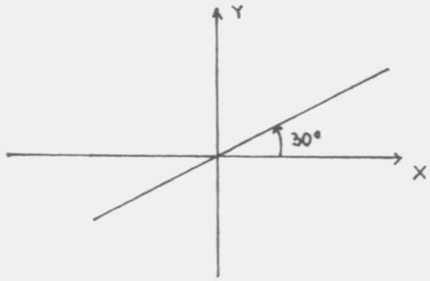


donde θ puede tomar cualquier valor.

Por otro lado si r varía y θ se mantiene fijo, por ejemplo

$$\theta = 30^\circ$$

se describe la ecuación de la recta que forma con el eje polar un ángulo de 30°.

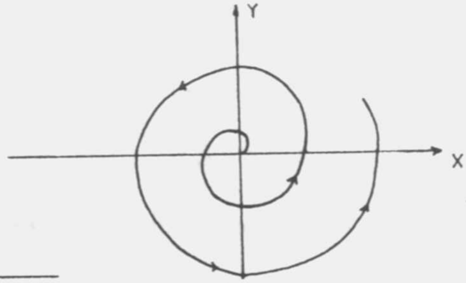


Hemos adoptado por convención que r podía ser cualquier número real, $-\infty < r < \infty$ así si $r = 0$ nos encontramos en el origen del sistema. ¿En qué cuadrante se encuentran los puntos de la recta que corresponde a $r \geq 0$? ¿y si $r \leq 0$?

Veamos otro ejemplo: la ecuación

$$r = \theta$$

representa un espiral. En efecto, para $\theta = 0$. tenemos $r = 0$ (polo) y junto con el crecimiento de θ crece también r , de modo que un punto sobre la curva gira alrededor del polo (en sentido contrario a las agujas del reloj) alejándose del mismo [4].



[4]notemos que en este ejemplo, como en muchas otras ecuaciones, es conveniente expresar θ en radianes

Observemos que al completar θ un ángulo de un giro, el radio r ha aumentado en 2π Por lo tanto los sucesivos giros del espiral tienen un ancho constante. Tal tipo de curva recibe el nombre de *Espiral de Arquímedes* .

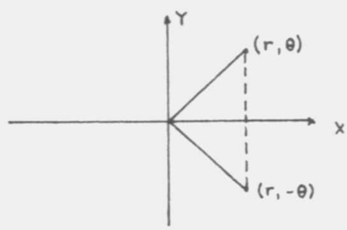
Hemos analizado acá el caso $\theta > 0$, ¿ qué ocurre si θ es menor que 0 ?

Simetrías: una ayuda para graficar

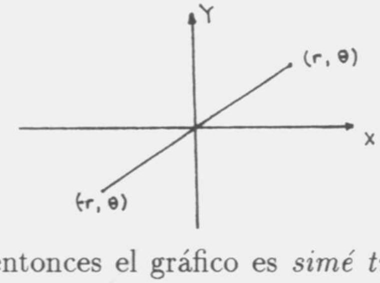
Al estudiar gráficos de funciones en coordenadas cartesianas interesa analizar la paridad o imparidad de la función, esto brinda información acerca de la simetría del gráfico y luego nos facilita su trazado.

Con este mismo objetivo observemos que en coordenadas polares podemos estudiar cierta simetría, que describiremos a continuación:

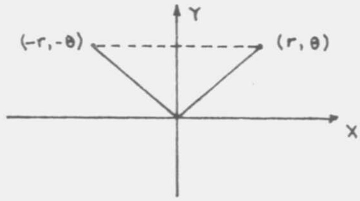
- Si $f(\theta) = f(-\theta + \pi)$ entonces el gráfico es *simé trico con respecto al eje X.*



- Si $f(\theta) = f(\theta + \pi)$ entonces el gráfico es *simétrico con respecto al origen.*



- Si $f(\theta) = -f(-\theta)$ entonces el gráfico es *simé trico con respecto al eje Y.*



Nota: esta simetría se puede definir como $f(\theta) = f(\pi - \theta)$.

Ejemplos: Grafiquemos las siguientes funciones:

1.

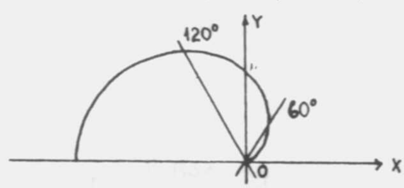
$$r = a(1 - cos\theta) \quad a\text{es una constante positiva}$$

En este caso $f(\theta) = a(1 - cos\theta)$ y ya que $cos\ \theta = cos\ (-\theta)$, se verifica que $f(\theta) = f(-\theta)$ por lo tanto la curva es simétrica con respecto al eje X

Así sólo necesitamos estudiar su gráfico para valores de θ entre 0 y π . El valor mínimo, $r = 0$, ocurre en $\theta = 0$ y cuando $\theta = \pi$, r toma su valor máximo, $r = 2a$. Así entonces cuando θ crece de 0 a π , el cos decrece de 1 a -1 , por lo tanto $1 - cos\theta$ crece de 0 a 2 ; esto es, r crece de 0 a $2a$.

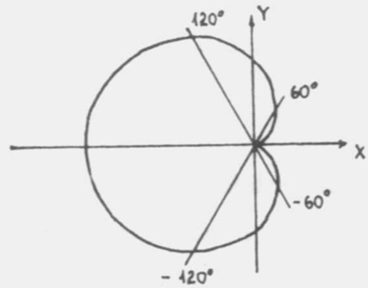
Podemos construir la siguiente tabla:

θ	0°	60°	90°	120°	180°
r	0	$\frac{a}{2}$	a	$\frac{3a}{2}$	$2a$



Empleando la propiedad de simetría con respecto al eje X completamos la gráfica, que es llamada *cardioide* por su semejanza a un corazón.

2.



$$r = \frac{a}{\theta} \qquad a \text{ constante positiva}$$

Analicemos tres casos:

a. $\theta = 0$

Observemos que no hay ningún punto sobre la curva para dicho valor.

b. $\theta > 0$

En este caso, para un valor de θ próximo a 0 , el valor de r es muy grande y positivo, así el punto P que representa el par (r, θ) se halla en el primer cuadrante.

Notemos que el punto $P = (r, \theta)$ tiene coordenadas cartesianas (x, y) con

$$y = r sen\ \theta = \frac{a}{\theta} sen\, \theta$$

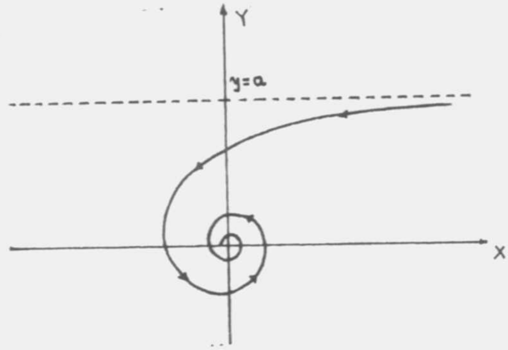
Recordemos que

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{sen\ \theta}{\theta} = 1$$

entonces

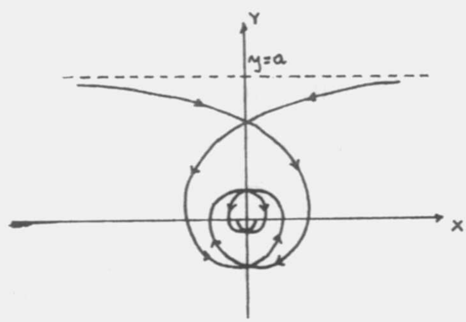
$$\lim_{\theta \to 0} y = \lim_{\theta \to 0} a.\frac{sen\ \theta}{\theta} = a$$

Esto muestra que la recta $y = a$ es una *asíntota* de esta curva. Entonces un punto que se mueve sobre la curva describe un espiral que comienza, para θ "pequeño", cerca de la recta $y = a$ con valores de r muy "grandes" y cuya cola se enrosca en el origen, ya que cuando θ crece r se aproxima a 0.



c. $\theta < 0$

Como se verifica que $f(\theta) = -f(-\theta)$ podemos completar la gráfica por simetría con respecto al eje Y. Así la curva completa, llamada *Espiral Hiperbólico* [5] es la siguiente:



[5]El adjetivo ***hiperbólico*** es usado porque la ecuación $r = \frac{a}{\theta}$ es análoga a la ecuación $y = \frac{a}{x}$ que representa una hipérbola en coordenadas cartesianas.

Ejercicios

Ejercicio 1: Para cada una de las siguientes funciones, busque las escalas que hay que tomar sobre cada uno de los ejes X e Y, para que la representación gráfica sea una recta:

a. $y = 2^x$ b. $y = 2.x^{1/2}$

c. $y = (1/2)^x$ d. $y = x^{3/2}$

Ejercicio 2: Según ciertas estadísticas de una determinada población, el número de personas que mueren de 30 , 40 , ... años de edad, por cada 100.000 habitantes, *tasa de mortalidad* , está dado por la siguiente tabla:

Edad	Tasa de Mortalidad
30	150
40	400
50	1000
60	2500
70	6500
80	16000

Realice el gráfico semilogarítmico de estos datos y verifique que se aproxima a una recta. Deduzca la ecuación aproximada de la recta y a partir de ella la expresión aproximada de la función que expresa la tasa de mortalidad en función de la edad.

Ejercicio 3: El contenido de plomo de la sangre humana, C_s , medido en $\mu g/100ml$, aumenta con el contenido medio en plomo del aire ambiente, C_a medido en $\mu g/m^3$, según la fórmula

$$C_s = 60.log\ C_a - 20$$

para el dominio $\{C_a/5 < C_a < 100\}$. Dibuje esta función por medio de una línea recta.

Ejercicio 4: Represente la *Ley de Boyle y Mariotte* $p.v = k$ ($p =$ presión, $v =$ volumen y $k =$ constante) para distintos valores de k, usando escalas logarítmicas.

Ejercicio 5: Las larvas de la polilla de las hojas (*porthetria dispar*) son serios desfoliadores de bosques y huertos. Para el apareamiento, los machos son atraídos por las hembras utilizando una sustancia especial. Esta sustancia es cis-7,8-epoxi-2-metiloctadecano y se puede utilizar en un intento de controlar la población. Se capturan los machos en ciertas trampas. En un experimento en el terreno se encontró la siguiente relación:

x	N
0,1	3
1	7
10	11
100	20

x = cantidad de sustancia en μg

N = número de machos atrapados

El log N aumenta casi linealmente con el log x. Compruebe esta propiedad mediante un gráfico logarítmico.

Ejercicio 6: I. Describa el conjunto de puntos cuyas coordenadas polares (r, θ) verifican:

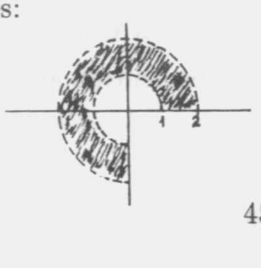
a.

$$-1 \leq r \leq 2 \qquad \frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

b.

$$0 < r < 4 \qquad \frac{-\pi}{6} < \theta < \frac{\pi}{6}$$

II. Describa las coordenadas polares de los puntos que pertenecen a las siguientes regiones:



Ejercicio 7: En un experimento sobre orientación y navegación de palomas se suelta un grupo de las mismas a 23 km. al sur y 65 km. al este del palomar. ¿ A qué distancia del palomar se realizó la suelta?

Ejercicio 8: En un experimento del comportamiento de tres tortugas éstas fueron soltadas en un punto O y más tarde observadas en reposo. Para medir su posición, se eligió un eje polar con origen O y orientado hacia el este. Los ángulos se midieron en sentido antihorario. Las coordenadas polares de las tres tortugas fueron:

$$\begin{array}{ll} r_1 = 27.5m. & \theta_1 = 73^\circ \\ r_2 = 18.7m. & \theta_2 = 165^\circ \\ r_3 = 31.3m. & \theta_3 = 106^\circ \end{array}$$

Convierta estas coordenadas polares en coordenadas rectangulares suponiendo que el origen está en O , que el eje X apunta hacia el este y el eje Y hacia el norte.

Ejercicio 9: Obtenga el gráfico de las siguientes funciones:

a. $r = sen\ \theta$

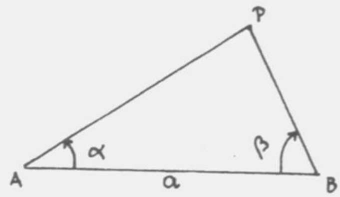
b. $r = sen\ 2\theta$

c. $r = a.\theta + b$ a y $b$constantes positivas

d. $x^2 + y^2 - 2x = 0$

Sugerencia: En el inciso d. convierta a coordenadas polares previamente.

Ejercicio 10: Diseñemos un sistema al que llamamos *bipolas* , cuyo sistema de refe rencia es un segmento horizontal AB , de longitud a , con respecto al cual un punto P es localizado en el plano registrando como coordenadas rl ángulo $\alpha = BAP$ medido en sentido antihorario y el ángulo $\beta = ABP$ medido en sentido horario.



I. Encuentre la ecuación bipolar de:

a. la bisectriz perpendicular de AB

b. el semicírculo de diámetro AB

c. la recta perpendicular a AB que pasa por A

d. la recta perpendicular a AB que pasa por B

II. Encuentre las ecuaciones de transformación que conectan el sistema de coordenadas bipolares con el sistema de coordenadas cartesianas rectangulares tomando el eje X sobre el segmento AB y el origen en el punto medio del segmento.

III. Identifique las siguientes curvas:

a. $cot\ \alpha . cot \beta = k$ $\quad k$constante

b. $cot \alpha / cot \beta = k$ $\quad k$constante positiva

c. $cot \alpha + cot \beta = k$ $\quad k$constante distinta de 0

Bibliografía

- Batschelet E., *Matemáticas Básicas para Biocientíficos* , Editorial Dossat S.A., 1978.

- Eves H., *An Introduction to the History of Mathematics* , CBS College

Publishing, 1983.

- Gelfand I., Glagolieva E., Kirillov A., *El Método de Coordenadas* , Editorial Mir, 1973.

- Marsden J., Weinstin A., *Calculus, single variable* , The Benjamin / Cummings Publishing Company, Inc, 1981.

- Thomas, G., *Calculus and Analytic Geometry* , Addison - Wesley Publishing Company, Inc, 1972.

- UNESCO, *Los Módulos en la Enseñanza y el aprendizaje de la Matemática en la Escuela Secundaria* , Oficina Regional de Ciencia y Tecnología de la UNESCO para América Latina y el Caribe, 1977.

Facultad de Ciencias Agropecuarias.
Universidad Nacional de Córdoba.