Longitud de un arco de Cicloide

Graciela S. Guala, Edgardo N. Güichal,

La **cicloide** es la curva plana descripta por un punto fijo de una circunferencia, que se desplaza sin resbalar, sobre una recta tangente a ella. Puede describirse como una sucesión de arcos con sus extremos sobre la recta (Fig. 1). En esta nota queremos usar esta definición, en términos de movimiento de un punto, para calcular la longitud de uno de esos arcos. Este valor es, por supuesto, ya conocido, pero queremos mostrar aquí cómo puede ser obtenido usando algunas ideas sencillas, muchas de las cuales están ya al alcance de los alumnos de las escuelas secundarias. Otras podrán servir para motivar algunos temas introductorios al cálculo diferencial.

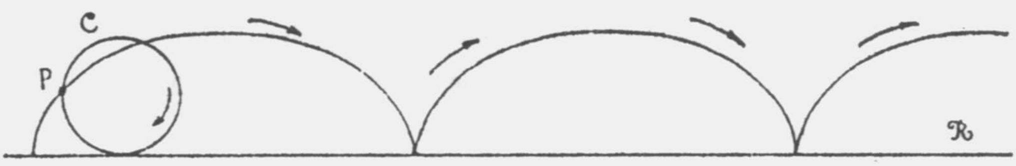

Fig. 1

Para ello, tal como se hizo en la Figura 1, convendremos en dibujar la recta R en posición horizontal, la circunferencia C de radio r, tangente a ella y sobre el semiplano superior y supondremos que el movimiento descripto al definir la cicloide se efectúa hacia la derecha.

Si analizamos el movimiento del punto P, que inicialmente era el punto de tangencia, éste describirá un arco de la cicloide cuando la circunferencia haya realizado una rotación completa alrededor de su centro, es decir, una rotación en un ángulo de medida 2π, de modo que al finalizar, ocupa nuevamente una posición tal que la recta es tangente a la circunferencia en ese punto.

Vemos entonces que el gráfico de la trayectoria de P surge como superposición de dos movimientos: uno que corresponde a la rotación de la circunferencia alrededor de su centro, con velocidad angular uniforme, otro de desplazamiento hacia la derecha con velociad uniforme.

Si convenimos en tomar una velocidad angular igual a 1, entonces el punto P describe, en un intervalo de tiempo t y considerando solamente el movimiento de rotación, un arco de la circunferencia C. Dicho arco, al que corresponde un ángulo central $\alpha = t$, tiene una longitud $l = r.\alpha$, o lo que es lo mismo $l = r.t$ (Fig. 2a).

En el mismo intervalo de tiempo, el segundo movimiento (desplazamiento rectilíneo uniforme), hace recorrer al punto P una distancia $d = k.t$, donde k representa la velocidad (constante) de ese movimiento. Debemos observar que, aunque hemos llamado aquí al escalar k la "velocidad", por tratarse de un movimiento rectilíneo uniforme, en realidad k es el módulo del vector velocidad correspondiente. (ver Fig. 2b).

Ya no podemos elegir arbitrariamente el valor de k, pues el hecho de haber pedido que el movimiento sea tal que C no "resbale" al desplazarse sobre R, nos obliga a observar que la longitud del arco recorrido sobre la circunferencia y la distancia horizontal d recorrida por P en el tiempo t, coinciden, es decir que $k.t = r.t$ y en consecuencia, para que se cumpla esta condición, debe ser $k = r$.

En las Figuras 2a y 2b están representadas las trayectorias que recorrería el punto P bajo cada uno de los movimientos indicados, en forma independiente. $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ representan los vectores velocidad en cada caso y se observa que:

$$|\vec{v}_1| = |\vec{v}_2| = r$$

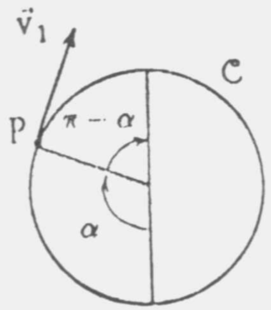

Fig. 2a

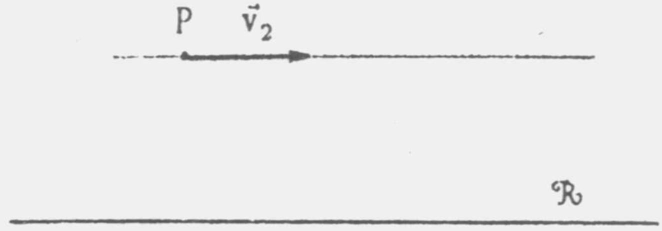

Fig. 2b

Por la forma en que se ha definido α, el sentido creciente (positivo) del ángulo estará dado cuando el radio gire en sentido horario. Con esta convención, no es difícil verificar que el ángulo entre $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ es siempre $\pi - \alpha$, si se considera el menor ángulo (en valor absoluto) que $\vec{v}_1$ debe girar hacia $\vec{v}_2$ para que ambos vectores queden superpuestos.

Si denotamos con $\vec{v}$ al vector velocidad de P, cuando se desplaza sobre la cicloide, resulta que

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$$

y como $|\vec{v}_1| = |\vec{v}_2| = r$, resulta que $\vec{v}$ es la diagonal de un rombo y en consecuencia el ángulo entre $\vec{v}$ y $\vec{v}_2$ (con la misma convención anterior) es: $\beta = \frac{1}{2}(\pi - \alpha) = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$, es decir que β es el complemento del ángulo $\frac{\alpha}{2}$.

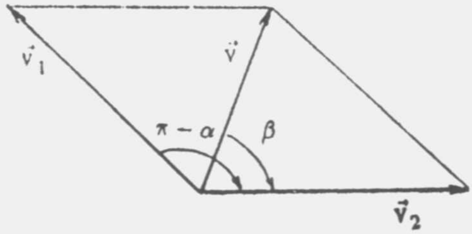

Fig. 3

Pero si recordamos que la medida de un ángulo inscripto en una circunferencia es igual a la mitad de la medida del ángulo central que intercepta el mismo arco, llegamos a la conclusión de que $\vec{v}$ tiene siempre la dirección de la recta que une a P con el punto B sobre C, diametralmente opuesto al punto de tangencia de C con R, lo cual nos da un método sencillo para dibujar la recta tangente a la cicloide en cada uno de sus puntos, puesto que dicha recta tiene justamente la dirección del vector velocidad $\vec{v}$.

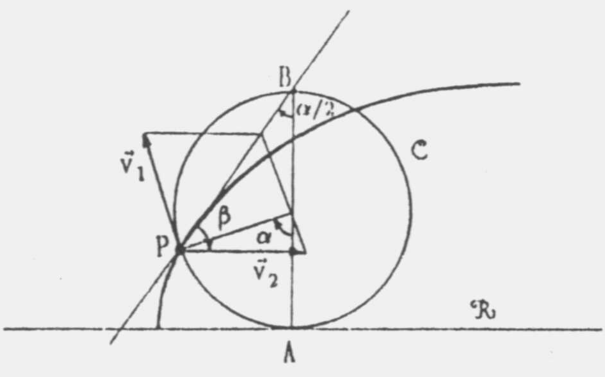

Fig. 4

¿Cuál es el módulo del vector $\vec{v}$? Con los datos que ya tenemos es muy fácil de calcular:

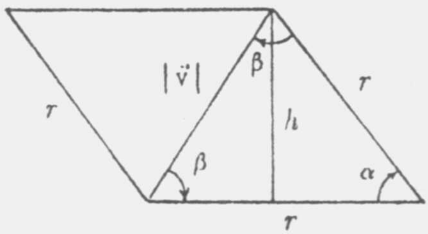

Fig. 5

$$\beta = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{h}{|\vec{v}|}$$

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{h}{r}$$

Luego $|\vec{v}| = \dfrac{h}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \dfrac{r\operatorname{sen}\alpha}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \dfrac{2r\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$, esto es: $\boxed{|\vec{v}| = 2.r.\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}$.

Otro valor que estamos en condiciones de calcular fácilmente y que nos será de utilidad más tarde, es el de la longitud de la cuerda que une P con B (cf. Fig. 4)

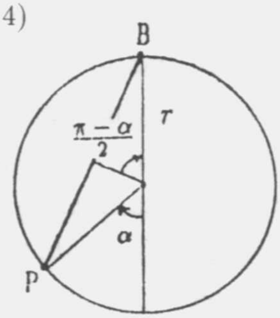

Fig. 6

$$\operatorname{sen}\frac{\pi-\alpha}{2} = \operatorname{long}\frac{\overline{\mathrm{PB}}}{2r}$$

$$\operatorname{long}\overline{\mathrm{PB}} = 2.r.\operatorname{sen}\frac{\pi-\alpha}{2} = 2.r.\cos\frac{\alpha}{2}$$

esto es:

$$\boxed{\operatorname{long}\overline{\mathrm{PB}} = 2.r.\cos\frac{\alpha}{2}} \qquad (1)$$

Queremos calcular ahora la longitud de un arco de cicloide. De hecho, como el trabajo para realizar estos cálculos será el mismo, obtendremos una fórmula más general, que nos dará la longitud del arco comprendido entre los valores α_0 y π del ángulo, cualquiera sea $\alpha_0 \in [0, \pi)$

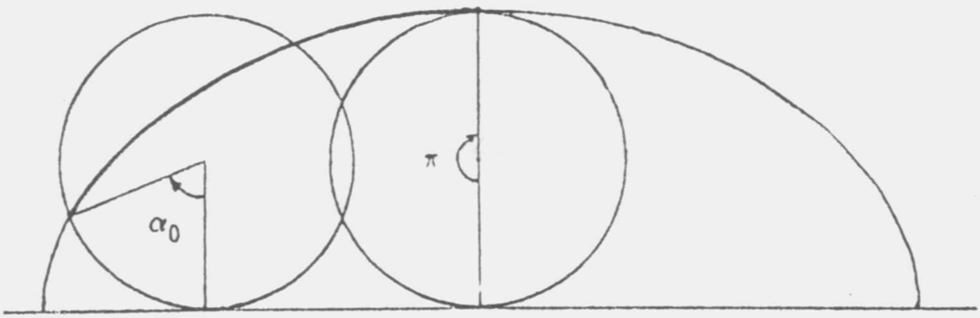

Fig. 7

El primer problema consiste naturalmente en ponernos de acuerdo sobre qué entendemos por "longitud" de un arco de curva. Un método geométrico para llegar a una definición aceptable consiste en tomar un gran número de puntos sobre el arco, construir con ellos una poligonal y calcular su longitud (concepto ya conocido, pues se trata de sumar longitudes de segmentos). Se repite luego este procedimiento, considerando en cada oportunidad un número mayor de puntos elegidos convenientemente sobre el arco y se define la longitud del mismo como aquel número al que se aproximan las longitudes de las poligonales.

El lector reconocerá aquí el método utilizado para definir la longitud de una circunferencia como el valor al que aproximan las longitudes de los perímetros de polígonos regulares inscriptos en ella, cuando el número de lados crece indefinidamente.

Otro método, que será el que usaremos aquí, basado en las ideas "mecánicas" de movimiento con que nos estamos manejando, consiste en considerar que la longitud de cada uno de esos pequeños pedazos en que el arco quedó dividido por los puntos que sobre él se tomaron, es aproximadamente igual a la longitud de un segmento de recta, que es recorrido con velocidad constante, eligiendo, por ejemplo, la velocidad que el punto tenía en el extremo inicial de ese trozo del arco.

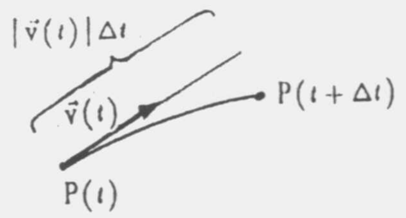

Fig. 8a

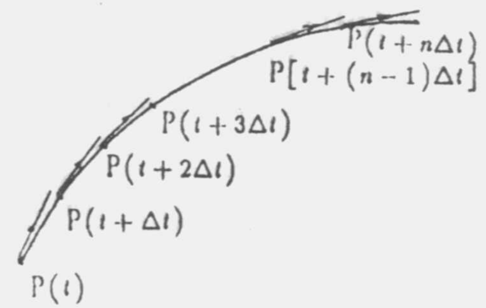

Fig. 8b

La longitud del segmento será, naturalmente, igual a $|\vec{v}(t)|.\Delta t$ y este valor será tomado como valor aproximado de la longitud del pequeño arco que une los puntos P (t) y P $(t+\Delta t)$. La suma de estos números nos dará una aproximación a la longitud del arco y de hecho, se definirá la longitud del arco, como el valor al que aproximan estos números cuando la cantidad de puntos que se han tomado, en forma conveniente, crece indefinidamente.

Recordemos que en nuestro caso, $t = \alpha$ y $|\vec{v}| = 2.r.\text{sen}\frac{\alpha}{2}$, de modo que si consideramos los puntos sobre el arco, que correspondan a los valores de t dados por $t = \alpha_0 + j.\Delta\alpha$ con $j = 0, 1, 2, \ldots, n$ y $\Delta\alpha = \dfrac{\pi - \alpha}{n}$, es decir, tomamos n puntos sobre el arco, que corresponden a n valores de t, o lo que es equivalente, de α, tales que la distancia entre un par de puntos sucesivos sea en todos los casos la misma. Las longitudes de cada uno de esos trozos de arco en que quedó dividido el arco de la cicloide inicial, estarán dados aproximadamente, por los valores:

$$2.r.\mathrm{sen}\frac{\alpha_0}{2}.\Delta\alpha\,;\quad 2.r.\mathrm{sen}\frac{\alpha_0+\Delta\alpha}{2}.\Delta\alpha\,;\quad 2.r.\mathrm{sen}\frac{\alpha_0+2.\Delta\alpha}{2}.\Delta\alpha\,;\cdots;$$
$$2.r.\mathrm{sen}\frac{\alpha_0+j.\Delta\alpha}{2}.\Delta\alpha\,;\cdots;2.r.\mathrm{sen}\frac{\alpha_0+n.\Delta\alpha}{2}.\Delta\alpha$$

y la longitud del arco dado por la Fig. 7, será aproximadamente:

$$L_0 \approx 2.r.\Delta\alpha.\left[\mathrm{sen}\frac{\alpha_0}{2}+\mathrm{sen}\frac{\alpha_0+\Delta\alpha}{2}+\mathrm{sen}\frac{\alpha_0+2.\Delta\alpha}{2}+\cdots+\mathrm{sen}\frac{\alpha_0+j.\Delta\alpha}{2}+\right.$$
$$\left.\cdots+\mathrm{sen}\frac{\alpha_0+n.\Delta\alpha}{2}\right] = 2.r.\Delta\alpha.\sum_{j=0}^{n}\mathrm{sen}\frac{\alpha_0+j.\Delta\alpha}{2}$$

Para calcular esta suma recurriremos a nuestros conocimientos de trigonometría. Dividimos y multiplicamos todos los términos por sen $\frac{\Delta\alpha}{4}$ y usamos la fórmula trigonométrica que convierte el producto de dos valores de la función seno en una diferencia de cosenos y obtenemos:

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{n}\mathrm{sen}\frac{\alpha_0+j.\Delta\alpha}{2} &= \frac{1}{\mathrm{sen}\frac{\Delta\alpha}{4}}.\sum_{j=0}^{n}\mathrm{sen}\frac{\alpha_0+j.\Delta\alpha}{2}.\,\mathrm{sen}\frac{\Delta\alpha}{4} = \\ &= \frac{1}{\mathrm{sen}\frac{\Delta\alpha}{4}}.\sum_{j=0}^{n}\frac{1}{2}.\left\{\cos\left[\frac{\alpha_0}{2}+\frac{(2j-1)\Delta\alpha}{4}\right]-\right. \\ &\qquad\left.-\cos\left[\frac{\alpha_0}{2}+\frac{(2j+1)\Delta\alpha}{4}\right]\right\}\end{aligned}$$

Desarrollando esta última suma, se producen numerosas cancelacines, pues aparecen sumas y restas de términos iguales, que nos darán, si tenemos en cuenta que $n.\Delta\alpha = \pi - \alpha_0$:

$$\sum_{j=0}^{n} \operatorname{sen}\frac{\alpha_0 + j.\Delta\alpha}{2} = \frac{1}{2.\operatorname{sen}\frac{\Delta\alpha}{4}}.\left\{\cos\left(\frac{\alpha_0}{2} - \frac{\Delta\alpha}{4}\right) - \cos\left[\frac{\alpha_0}{2} + \frac{(2n+1)\Delta\alpha}{4}\right]\right\}$$

$$= \frac{1}{2.\operatorname{sen}\frac{\Delta\alpha}{4}}.\left[\cos\left(\frac{\alpha_0}{2} - \frac{\Delta\alpha}{4}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\Delta\alpha}{4}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2.\operatorname{sen}\frac{\Delta\alpha}{4}}.\left[\cos\left(\frac{\alpha_0}{2} - \frac{\Delta\alpha}{4}\right) + \operatorname{sen}\frac{\Delta\alpha}{4}\right]$$

Luego $$L_0 \approx 4.r.\frac{\frac{\Delta\alpha}{4}}{\operatorname{sen}\frac{\Delta\alpha}{4}}.\left[\cos\left(\frac{\alpha_0}{2} - \frac{\Delta\alpha}{4}\right) + \operatorname{sen}\frac{\Delta\alpha}{4}\right]$$

Si el número n, que nos da la cantidad de puntos tomados sobre el arco, crece indefinidamente ($n \to \infty$), entonces $\Delta\alpha$ decrece ($\Delta\alpha \to 0$) y en consecuencia

$$\operatorname{sen}\frac{\Delta\alpha}{4} \quad \to \quad 0$$

$$\cos\left(\frac{\alpha_0}{2} - \frac{\Delta\alpha}{4}\right) \quad \to \quad \cos\frac{\alpha_0}{2}$$

y

$$\frac{\frac{\Delta\alpha}{4}}{\operatorname{sen}\frac{\Delta\alpha}{4}} \to 1$$

Tal vez esta última afirmación resulte difícil de aceptar, pero lo que sucede es que $\frac{\Delta\alpha}{4}$ y $\operatorname{sen}\frac{\Delta\alpha}{4}$ tienden ambos a 0 con la misma rapidez, lo que hace que el cociente se aproxime a 1. Para dar argumentos en favor de esta afirmación, observemos la siguiente tabla de valores:

$\Delta\alpha$	$\dfrac{\Delta\alpha}{4}$	$\operatorname{sen}\dfrac{\Delta\alpha}{4}$	$\dfrac{\frac{\Delta\alpha}{4}}{\operatorname{sen}\frac{\Delta\alpha}{4}}$
0,100	0,02500	0,0249974	1,000104
0,095	0,02375	0,0237477	1,000094
0,090	0,02250	0,0224981	1,000084
0,085	0,02125	0,0212484	1,000075
0,080	0,02000	0,0199986	1,000067
0,075	0,01875	0,0187498	1,000059
0,070	0,01750	0,0174991	1,000051
0,065	0,01625	0,0164928	1,000044
0,060	0,01500	0,0149994	1,000038
0,055	0,01375	0,0137495	1,000031
0,050	0,01250	0,0124996	1,000026
0,045	0,01125	0,0124976	1,000021
0,040	0,00100	0,0099983	1,000017
0,035	0,00875	0,0087498	1,000013
0,030	0,00750	0,0074999	1,000009
0,025	0,00625	0,0062499	1,000007
0,020	0,00500	0,0049999	1,000004
0,015	0,00375	0,0037499	1,000002
0,010	0,00250	0,0024999	1,000001
0,005	0,00125	0,0012499	1,000000

Observemos que el último resultado que aparecen en esta tabla, no significa que el cociente de los valores que aparecen en las dos columnas anteriores sea exactamente 1, sino que los dos valores son tan próximos que su cociente difiere de 1 en un número cuyas cifras decimales significativas recién aparecerán después del séptimo lugar y nuestra calculadora no pudo registrarlas.

Una demostración rigurosa se puede dar partiendo de la desigualdad

$$\operatorname{sen} u \leq u \leq \operatorname{tg} u\,,$$

que vale para todo $u \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$, como se desprende de la Fig. 9,

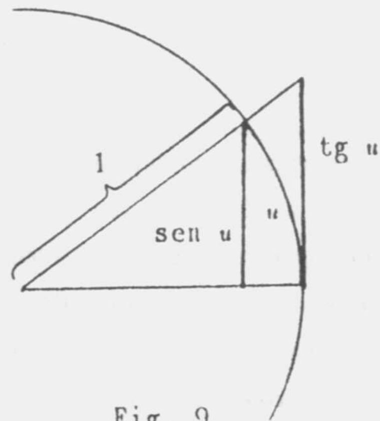

Fig. 9

pues entonces se tiene que, para $0 < u < \frac{\pi}{2}$, es: $1 \leq \frac{u}{\operatorname{sen} u} \leq \frac{1}{\cos u}$.

La expresión de la derecha se aproxima a 1 cuando u toma valores cada vez más próximos a 0, lo que confirma que $\frac{u}{\operatorname{sen} u} \to 1$ cuando $u \to 0$.

Esto nos lleva a aceptar que la longitud del arco de la cicloide entre los valores α_0 y π (Fig. 7) está dada por el valor

$$\boxed{L_0 = 4.\pi.\cos\frac{\alpha_0}{2}} \qquad (2)$$

El lector familiarizado con el cálculo diferencial e integral observará que lo que hemos calculado es:

$$L_0 \;=\; \int_{\alpha_0}^{\pi} |\vec{v}(\alpha)|\,\mathrm{d}\alpha \;=\; \int_{\alpha_0}^{\pi} 2.r.\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{d}\alpha =$$

$$= \quad -4.r.\cos\frac{\alpha}{2}\Big|_{\alpha_0}^{\pi} = 4.r.\cos\frac{\alpha_0}{2}$$

En particular, si $\alpha_0 = 0$, obtenemos la longitud de medio arco de la cicloide:

$$L_m = 4.r$$

de donde se deduce que:

La longitud de un arco completo de la cicloide es igual a 8 veces el radio de la circunferencia que la genera: $L = 8.r$.

Para finalizar, queremos señalar una interesante consecuencia de los resultados obtenidos. Comparando las fórmulas (1) y (2), observamos que la longitud del arco de cicloide desde α_0 a π, es igual a 2 veces la longitud de la cuerda $\overline{\text{PB}}$. Es decir que si prolongamos el segmento $\overline{\text{PB}}$ agregándole el segmento $\overline{\text{BP}'}$ de igual longitud, resulta que la longitud de $\overline{\text{PP}'}$ es igual a la longitud del arco de cicloide desde P hasta C. Pero el punto P′ también pertenece a una cicloide, como lo muestra la Fig. 10, pues la longitud del arco BSP′ sobre la circunferencia C′ es igual a la longitud del segmento $\overline{\text{BC}}$ (como si la circunferencia C′ se desplazase sobre la recta R′, rodando hacia la izquierda, comenzando desde el punto C).

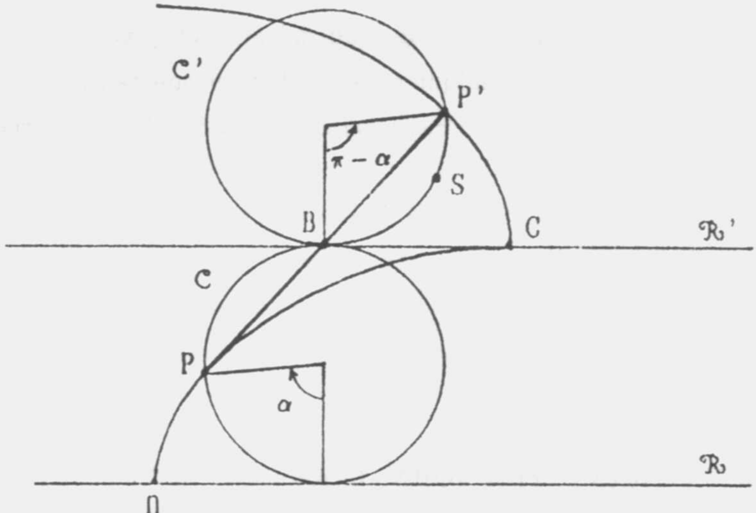

Fig. 10

Más aún, el lector podrá comprobar fácilmente que el segmento PP′ es normal (perpendicular) a esta segunda cicloide en P′; calculando simplemente el ángulo que forma la recta tangente en P′ con la horizontal. Es decir que la cicloide inferior es la *envolvente* de la familia de rectas normales a la cicloide superior. Una curva tal es llamada una *evoluta*, de modo que llegamos a la conclusión de que la evoluta de una cicloide es una cicloide similar, desplazada. Si completamos en forma simétrica la Fig. 10 y la dibujamos en forma invertida, obtenemos la siguiente figura.

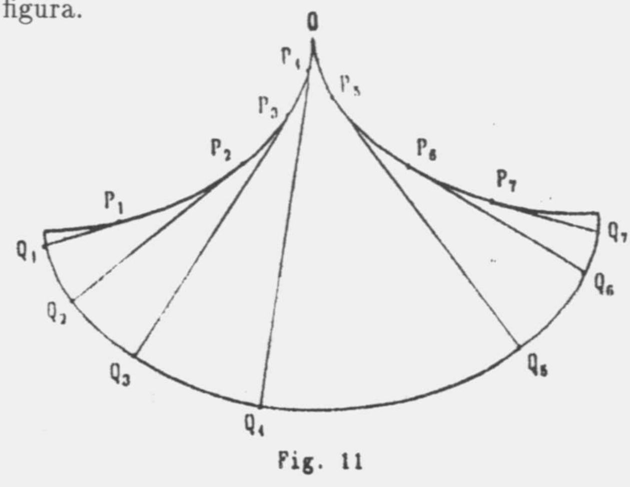

Fig. 11

Resulta así que la suma de la longitud del arco OP_i más la longitud del segmento $\overline{P_iQ_i}$ es constante, cualquiera sea i. Esta propiedad permitió a Huygens diseñar un reloj de péndulo cuyo período de oscilación no variara con la amplitud.

...Pero eso es otra historia.

Bibliografía

[1] Richard COURANT, Fritz JOHN. Introducción al Cálculo y al Análisis Matemático. (Vol. 1, Cap. 4) Limusa (1979)

[2] Richard COURANT, Herbert ROBBINS. ¿Qué es la matemática? (Cap. 3) Aguilar (1967)

[3] Miguel de GUZMAN. Aventuras Matemáticas. (Cap. 12) Labor (1986)

Depto. de Matemática.
Universidad Nacional del Sur. Bahía Blanca.