DESARROLLOS PERIODICOS

ENZO R. GENTILE

1. Sea $s \in N$, $s > 1$. Si $a \in N$ entonces se sigue de la existencia de algoritmo de división en Z, la existencia de únicos enteros $q_o, \ldots, q_r$ tales que

$$0 \leq q_i < s$$
$$a = q_o + q_1 s + \ldots + q_r s^r$$

La expresión de a en términos de las potencias s^i se denomina el desarrollo en base s de a. En el caso $s = 10$ nos referimos al desarrollo decimal y en el caso $s = 2$ al desarrollo diádico. Los enteros $q_o, \ldots, q_r$ son exactamente, en ese orden, los restos de las divisiones sucesivas de a por s. Por ejemplo el desarrollo de 2351 en base 5 se obtiene efectuando las divisiones sucesivas por 5 como se indica a continuación

$$\begin{array}{rrrrrr}
2351 & \underline{5} & & & & \\
35 & 470 & \underline{5} & & & \\
01 & 20 & 94 & \underline{5} & & \\
1 & 0 & 44 & 18 & \underline{5} & \\
 & & 4 & 3 & 3 & \underline{5} \\
 & & & & 3 & 0
\end{array}$$

Se sigue que $2351 = 1 + 0.5 + 4.5^2 + 3.5^3 + 3.5^4$ y podemos escribir

$$2351 = (33401)_5$$

para denotar el desarrollo de 2351 en base 5.

En este trabajo nos proponemos estudiar el desarrollo en base s no de enteros sino de fracciones positivas $\frac{a}{b}$ irreductibles, o sea $(a,b) = 1$. Es bien sabido que todo número real positivo a puede escribirse o representarse mediante una serie convergente del tipo

$$a = \sum_{i=m} \frac{q_i}{10^i}$$

con q_i enteros, $0 \leq q_i < 10$ y $m \in Z$.
Para el caso de números racionales se obtienen explícitamente los coeficientes q_i utilizando el algoritmo de división entera.

A manera de ejemplo calculemos el desarrollo decimal del número $\frac{1}{7}$. El proceso es el siguiente

$$\frac{1}{7} = \frac{10}{70} = \frac{1.7+3}{7.10} = \frac{1}{10} + \frac{3}{7.10} = \frac{1}{10} + \frac{30}{7.100}$$

$$= \frac{1}{10} + \frac{4.7+2}{7.10^2} = \frac{1}{10} + \frac{4}{10^2} + \frac{20}{7.10^3}$$

$$= \dots$$

$$= \frac{1}{10} + \frac{4}{10^2} + \frac{2}{10^3} + \frac{8}{10^4} + \frac{5}{10^5} + \frac{7}{10^6} + \frac{1}{10^6}$$

Puesto que $\frac{4}{7.10^6} = \frac{1}{10^6} . \frac{1}{7}$ volvemos a la situación inicial y el proceso se repite en forma periódica, o sea, usando la notación decimal se obtiene

$$\frac{1}{7} = 0,142857\ 142857\ 142857\ldots$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{q_i}{10^i}$$

con $\quad q_{6k+1} = q_{6k+2} = 4,\ q_{6k+3} = 2,\ q_{6k+4} = 8,\ q_{6k+5} = 5,\ q_{6k+6} = 7$

para todos los valores de $k = 0,1,2,3,\ldots$. El desarrollo decimal de $\frac{1}{7}$ es pues periódico y como es habitual escribimos

$$\frac{1}{7} = 0,\overline{142857}$$

Los dígitos 1,4,2,8,5 y 7 se obtienen por los sucesivos cocientes

$$\begin{array}{l|l}
1 & \ \ 7 \\ \hline
10 & 0,142857 \\
\ 30 & \\
\ \ 20 & \\
\ \ \ 60 & \\
\ \ \ \ 40 & \\
\ \ \ \ \ 50 & \\
\ \ \ \ \ \ 10 & \\
\ \ \ \ \ \ \ \ddots &
\end{array}$$

El desarrollo de $\frac{1}{7}$ en base $s = 5$ se obtiene en forma análoga:

$$
\begin{array}{rl}
1 = 7.0 + 1 & \\
5.1 = 5 = 7.0 + 5 & q_1 = 0 \\
5.5 = 25 = 7.3 + 4 & q_2 = 3 \\
5.4 = 20 = 7.2 + 6 & q_3 = 2 \\
5.6 = 30 = 7.4 + 2 & q_4 = 4 \\
5.2 = 10 = 7.1 + 3 & q_5 = 1 \\
5.3 = 15 = 7.2 + 1 & q_6 = 2
\end{array}
$$

se tiene

$$\frac{1}{7} = (0.\overline{032412})_5$$

El desarrollo de $\frac{1}{7}$ en base 12 con dígitos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, a, b es

$$\frac{1}{7} = (0.\overline{186a35})_{12}$$

Se tiene también

$$\frac{1}{7} = (0,\overline{012})_2$$

$$\frac{1}{7} = (0,\overline{010212})_3$$

$$\frac{1}{7} = (0,\overline{4})_{29}$$

La discusión precedente hecha con $\frac{1}{7}$ es válida en general y es por otra parte bien conocida, por lo que simplemente recordaremos que un número racional positivo admite uno de los siguientes tipos de desarrollos en base s:

1. finito

$$a = q_0 + \frac{q_1}{s} + \frac{q_2}{s^2} + \ldots + \frac{q_r}{s^r}, \quad q_i \in Z, \ 0 \le q_i < s \text{ si } 1 \le i \le r$$

$$= q_0, \ q_1 q_2 \ldots q_r$$

2. periódico puro

$$a = q_0, \overline{q_1 q_2 \ldots q_r}, \quad q_i \in Z, \ 0 \le q_i < s \text{ si } 1 \le i \le r$$

3. periódico mixto

$$a = q_0, \ c_1 \ c_2 \ \ldots \ c_k \ \overline{q_1 \ q_2 \ldots q_r}, \qquad \begin{array}{l} q_i \in Z, \ c_i \in Z, \\ 0 \le q_i < s, \ 1 \le i \le r \\ 0 \le c_i < s, \ 1 \le i \le k. \end{array}$$

El objeto de este trabajo es discutir los siguientes problemas:

A. ¿Qué racionales a poseen desarrollos finitos?

B. ¿Qué racionales a poseen desarrollos periódicos?

C. En los casos periódicos calcular la longitud del período (en rigor se trata de calcular el menor período o período primitivo, notar por ejemplo que

$$\frac{1}{7} = 0,\overline{142857} = 0,\overline{142857142857}$$

$$= 0,\overline{142857142857142857} = \ldots).$$

2. Desarrollos finitos y periódicos.

Sean $a, b \in \mathbb{N}$, $(a,b) = 1$. Sea $s \in \mathbb{N}$, $s > 1$. Escribimos

$$
(1)\quad
\begin{array}{ll}
a = q_0.b + r_0, & 0 \le r_0 < b \\
sr_0 = q_1.b + r_1, & 0 \le r_1 < b \\
sr_1 = q_2.b + r_2, & 0 \le r_2 < b \\
\ldots \quad \ldots & \ldots \\
sr_{j-1} = q_j.b + r_j, & 0 \le r_j < b
\end{array}
$$

Entonces

$$\frac{a}{b} = q_0 + \frac{q_1}{s} + \frac{q_2}{s^2} + \ldots + \frac{q_j}{s^j} + \frac{r_j}{s^j.b}$$

Notemos que

$$0 \le q_i < s \text{ si } 1 \le i.$$

En efecto,

$$q_i.b \le q_i.b + r_i = s.r_{i-1} < s.b \Rightarrow q_i < s$$

$$0 \le s.r_{i-1} = q_i.b + r_i < b.(q_i + 1) \Rightarrow 0 < q_i + 1 \Rightarrow 0 \le q_i$$

Escribamos las relaciones en (1) mediante congruencias. Se tiene

$$
\begin{array}{ll}
sr_0 \equiv r_1 & (\mathrm{mod}\ b) \\
sr_1 \equiv r_2 & (\mathrm{mod}\ b) \\
\ldots & \ldots \\
sr_{j-1} \equiv r_j & (\mathrm{mod}\ b)
\end{array}
$$

Por lo tanto, para todo j es

$$r_j \equiv sr_{j-1} \equiv s^2r_{j-2} \equiv \ldots \equiv s^jr_0 \pmod b$$

es decir

$$s^jr_0 \equiv r_j \pmod b$$

Veamos algunas consecuencias de esta congruencia.

A. Desarrollo finito. Esto ocurre si y sólo si para algún j es $r_j = 0$. Por lo tanto se sigue que

$$r_j = 0 \Rightarrow s^jr_0 \equiv 0 \pmod b$$

pero puesto que

$$(a,b) = 1 \Rightarrow (b,r_0) = 1$$

concluímos que,

$$s^j \equiv 0 \pmod b$$

o equivalentemente

$$b|s^j, \text{ para algún } j$$

es condición necesaria y suficiente para que el desarrollo s-ádico de $\frac{a}{b}$ sea finito.

En particular si s = 10 el desarrollo de $\frac{a}{b}$ es finito sí y sólo si $b|10^j$, es decir $b = 2^i.5^k$, $i \geq 0$, $k \geq 0$.

B. Desarrollo periódico. Ocurre si y sólo si existe un índice $k > 0$ tal que $r_j = r_{j+k}$ o sea

$$s^jr_0 \equiv s^{j+k}r_0 \pmod b$$

o también

$$s^j.(s^k - 1)\ r_0 \equiv 0 \pmod b$$

Puesto que $(b, r_0) \equiv (b, a) \equiv 1$, podemos escribir también

$$s^j.(s^k - 1) \equiv 0 \pmod b,$$

o equivalentemente $b|s^j.(s^k - 1)$.

Caben dos posibilidades:

B1. Si $(b,s) = 1$ entonces $b|s^k - 1 \Rightarrow s^k \equiv \pmod b$, y dado que en general $s^k r_0 \equiv r_k \pmod b$ se concluye que

$$r_0 \equiv r_k \pmod b \qquad \text{o sea } r_0 = r_k$$

se trata de un desarrollo periódico puro.

B2. Si $(b,s) = d > 1$ entonces podemos escribir $b = u.v$ tales que $(v,s) = 1$ y u divide a una potencia de s, digamos $u.t = s^m$, por lo tanto

$$\frac{a}{b} = \frac{t.a}{t.b} = \frac{t.a}{s^m.v} = \frac{1}{s^m}\left(\frac{t.a}{v}\right)$$

La fracción $\frac{t.a}{v}$ admite, según B1, desarrollo periódico puro, por lo tanto la fracción $\frac{a}{b}$ admite un desarrollo periódico mixto.

Es el caso, por ejemplo, de $\frac{3}{70} = 0.\overline{0428751.}$

Veamos un ejemplo exótico. Sea $s = 16$ y denotemos los símbolos (dígitos) en esta base por: 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9, A,B,C,D,E,F. (A = 10, B = 11, . . . , F = 15).

Hallemos el desarrollo en base 16 de la fracción $\frac{AB}{1E}$.

Como no sabemos operar con rapidez en base 16, reducimos el problema a base 10. La fracción dada es

$$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{1e}} = \frac{10.16+11}{16 + 14} = \frac{171}{30} = 5 + \frac{21}{30}.$$

Se tiene

$$\begin{aligned} 21 &= 30.0 + 21 \\ 16.21 &= 30.11 + 6 \\ 16.6 &= 30.3 + 6 \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\frac{21}{30} = \frac{11}{16} + \frac{6}{16^2} + \frac{6}{16^3} + \ldots = 0,\mathrm{B}\overline{3}$$

y

$$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{1E}} = 5,\mathrm{B}\overline{3}$$

como era fácil de prever.

C. <u>Longitud del período.</u> Supongamos que $(S,b) = 1$, entonces el período mínimo o primitivo en el desarrolo de $\frac{a}{b}$ en base s, corresponde al menor $j \in \mathbb{N}$, tal que $s^j \equiv 1 \pmod{b}$. Notemos que con la condición $(a,b) = 1$ siempre existe tal j. Esto es cierto simplemente por el carácter de los restos en la división por b.

Podemos repetir el razonamiento: los números $s, s^2, s^3, \ldots$ no pueden tener restos distintos en la división por b dado que hay sólo b restos distintos !! Por lo tanto, existen $i < j$ tales que s^j y s^i poseen el mismo resto en la división por b, o sea $s^j \equiv s^i \pmod{b}$ o equivalentementente $s^i.(s^{j-1} - 1) \equiv 0 \pmod{b}$.

Dado que $(s,b) = 1$ concluímos que $s^{j-1} \equiv 1 \pmod b$ con $j - 1 > 0$. Podemos invocar un teorema clásico de la Teoría Elemental de Números, el llamado Teorema de Euler-Fermat. Debemos antes recordar la definición de la función de Euler $\phi: N \to \mathbb{N}$;

$$\phi(1) = 1,\ \phi(n) = \#\ \{i \mid 1 \le i < n,\ (i,n) = 1\},\ n > 1.$$

Por ejemplo, $\phi(p) = p - 1$, si p es primo, $\phi(4) = 2$, $\phi(6) = 2$, $\phi(8) = 4, \ldots$

Podemos ahora enunciar el Teorema de Euler-Fermat:

$$\forall b \in \mathbb{N},\ \forall s \in \mathbb{N},\ (s,b) = 1 \Rightarrow s^{\phi(b)} \equiv 1 \pmod b$$

En particular si $b = p$ es primo se obtiene el Teorema de Fermat

$$\forall s \in \mathbb{N},\ p \nmid s \Rightarrow s^{p-1} \equiv \pmod p$$

Por ejemplo en el caso $\frac{1}{7}$ en base 12. Debemos hallar la menor potencia de 12 congruente con 1, módulo 7. Se tiene

$$12^1 \equiv 5,\ \ 12^2 \equiv 60 \equiv 4,\ \ 12^3 \equiv 48 \equiv 6,\ \ 12^4 \equiv 72 \equiv 2,\ \ 12^5 \equiv 3,$$
$$12^6 \equiv 36 \equiv 1 \qquad \pmod 7$$

La longitud del período es, en efecto, 6 como lo señalamos anteriormente.

La importancia que reviste el Teorema de Euler-Fermat, a nuestros fines, es que nos provee una cota superior para la longitud del período del desarrollo.

Más aún, podemos decir que si la longitud del mínimo período de $\frac{a}{b}$ es t entonces t divide a $\phi(b)$. En efecto, escribamos $\phi(b) = t.q+r$ con $0 \leq r < b$.
Entonces

$$1 \equiv s^{\phi(b)} = s^{t.q}.s^{r} \equiv (s^{t})q.s^{r} \equiv s^{r}(\mathrm{mod}\ b)$$

con lo que a/b admite período r < b. Como b era mínimo debe ser r = 0 y nuestra conclusión se satisface. En definitiva, el período tiene longitud un divisor de $\phi(b)$.

Notar que $\phi(b) \leq b - 1$, y que $\phi(b) = b - 1$ si y sólo si b es un número primo. Un caso interesante ocurre precisamente cuando b = p es un número primo.

Se tiene el siguiente problema abierto, ya planteado por Gauss en sus Disquisitiones Arithmeticas:

Problema. ¿Para qué primos p la fracción $\frac{1}{p}$ posee período mínimo igual a p - 1?

Esto es equivalente a encontrar todos los primos p para los cuales la mínima potencia $j \geq 1$ para la cual $10^{j} \equiv 1$ (mod p) es exactamente p - 1.

Es sabido que los restos 1,...,p - 1, módulo p forman un grupo respecto del producto (reduciendo módulo p). Este grupo es cíclico, es decir, existe un resto r con la propiedad que $r, r^{2},\ldots,r^{s-1}$ constituyen todos los restos no nulos módulo p. Los elementos r con esta propiedad se denominan raíces primitivas módulo p. El problema anterior se formula entonces así: ¿Para que primos p es 10 raíz primitiva módulo p? El problema permanece abierto y no se sabe si existen infinitos primos con esa propiedad.

Por ejemplo 7 tiene esa propiedad.

Veamos que pasa con $p = 11$. Dado que $10^2 = 100 \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 11)$ el período de $\frac{1}{11}$ tiene longitud 2. En efecto, $\frac{1}{11} = 0,\overline{09}$.

Analicemos el caso $p = 13$. Se tienen las congruencias $10^6 \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 13)$. En efecto, por un conocido criterio de divisibilidad por 13 el número $999.999 = 10^6 - 1$ es divisible por 13. Por lo tanto, el período de 1/13 tiene longitud un divisor de 6, que podrá ser 2,3 ó 6. Ahora notemos que $10^2 \equiv 9$, $10^3 \equiv 90 \equiv 12 \ (\mathrm{mod}\ 13)$. Por lo tanto, el período tiene longitud 6. A manera de verificación efectuando ahora la división resulta

$$\frac{1}{13} = 0,\overline{076923}.$$

Los números primos menores de 100 con período máximo son únicamente los siguientes: 7,17,19,23,29,47,59,61 y 97.

Digamos que una condición necesaria, pero no suficiente, para que un primo p posea la propiedad de período máximo es que

$$10^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \ (\mathrm{mod}\ p)$$

El primo $p = 73$ muestra en efecto que la condición no es suficiente:

$$10^4 \equiv -1 \pmod{73} \Rightarrow 10^8 \equiv 1 \pmod{73} \Rightarrow 10^{36} \equiv -1 \pmod{73}$$

y el período de 1/73 es un divisor de 8, pero es obviamente 8 (¿por qué?) sin calcular 1/73.

Observación: Si s es 10 y la longitud del período de $1/p$, p primo, es L, entonces se verifica que

$$10^L \equiv 1 \pmod{p}$$

o sea p divide a $10^L - 1 \equiv 99\ldots9$, L nueves. Por lo tanto si suponemos que $p \neq 3$, p divide a $9.11\ldots1$(L unos), o sea

$$p \mid 11\ldots1 \text{ (L unos)}$$

Por lo tanto si el número formado por L dígitos iguales a 1 es primo resulta $p = 11\ldots1$ (L unos). En este caso el desarrollo de $1/p$ es

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{11\ldots1} = \frac{9}{99\ldots9} = 0,\overline{00\ldots09}$$

y la longitud del período es L.

Si con U_n indicamos el número natural formado por n dígitos iguales a 1, observamos que los que son primos producen desarrollos periódicos de longitud exactamente igual a n. Los valores conocidos de n para los que U_n es primo son 2, 19, 23, 317. No se sabe si existen infinitos primos de esta forma.

(Ejercicio: Probar que, si U_n es un primo, entonces n es primo).

D. Permutando los dígitos del período. Sean $a, b \in \mathbb{N}$, $(a,b) = 1$. Sea $s \in \mathbb{N}$, $s > 1$ como antes y sea $t \in \mathbb{N}$, $(t,b) = 1$. Ya vimos que para obtener el desarrollo en base s debemos efectuar las divisiones

$$\begin{aligned}
a &= q_0.b + r_0 \quad , && 0 \le r_0 < b \\
sr_0 &= q_1.b + r_1 \quad , && 0 \le r_1 < b \\
sr_1 &= q_2.b + r_2 \quad , && 0 \le r_2 < b \\
&\dots && \dots \\
sr_{j-1} &= q_j.b + r_j \quad , && 0 \le r_j < b
\end{aligned}$$

Supongamos $r_0 = r_k$ y r_k es la primera repetición de r_0 y supongamos además que aparezcan todos los restos $1, 2, \dots, b - 1$. Si multiplicamos la fracción $\frac{a}{b}$ por t, con $(t,b) = 1$, sabemos que los restos de la sucesión $t.r_0, \dots, t.r_k$ son una permutación de $r_0, \dots, r_k$.
Supongamos entonces $t.r_0 \equiv r_k (\mathrm{mod}\ b)$, o sea,

$$t.a = (q_0 t).b + t.r_0 = q_0'.b + r_k$$

Prosiguiendo el desarrollo se tiene

$$s.r_k = q_{k+1}.b + r_{k+1}$$

o sea lo mismo que en (1) pero comenzando en $s.r_k$. Se sigue entonces que el período en $\frac{s.t}{b}$ es una permutación cíclica del período de $\frac{a}{b}$. Por ejemplo:

$$\frac{1}{7} = 0,\overline{142857}, \qquad \frac{2}{7} = 0,\overline{285714}$$

$$\frac{3}{7} = 0,\overline{428571}, \qquad \frac{4}{7} = 0,\overline{571428}$$

$$\frac{5}{7} = 0,\overline{714285}, \qquad \frac{6}{7} = 0,\overline{857142}$$

Veamos el ejemplo de un primo que no posee período máximo. Sea $p = 13$. Hallemos el desarrollo decimal de $1/13$. Se tiene

$$\begin{aligned} 1 &= 13.0 + 1 \\ 10.1 &= 13.0 + 10 \\ 10.10 &= 13.7 + 9 \\ 10.9 &= 13.6 + 12 \\ 10.12 &= 13.9 + 3 \\ 10.3 &= 13.2 + 4 \\ 10.4 &= 13.3 + 1 \end{aligned}$$

Los restos que aparecen son 1,3,4,9,10,12. Notemos que dentro del grupo $\mathbb{Z}_{13}^{*}$ de restos módulo 13, los restos anteriores constituyen un subgrupo, por lo tanto multiplicando por cualquiera de ellos a la fracción 1/13, se repite el período 076923, o sus permutaciones cíclicas:

$$\frac{1}{13} = 0,\overline{076923} \qquad \frac{10}{13} = 0,\overline{769230}$$

$$\frac{9}{13} = 0,\overline{692307} \qquad \frac{12}{13} = 0,\overline{923076}$$

$$\frac{3}{13} = 0,\overline{230769} \qquad \frac{4}{13} = 0,\overline{307692}$$

Si ahora multiplicamos, por ejemplo, por 2 resulta:

$$\begin{aligned} 2 &= 13.0 + 2 \\ 10.2 &= 13.1 + 7 \\ 10.7 &= 13.5 + 5 \end{aligned}$$

$$10.5 = 13.3 + 11$$
$$10.11 = 13.8 + 6$$
$$10.6 = 13.4 + 8$$
$$10.8 = 13.6 + 2$$

Los restos que aparecen son el complemento de los restos anteriores en el grupo, $\mathbb{Z}_{13}^{*} = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$. Más precisamente constituyen, utilizando la terminología de la teoría de grupos, una coclase módulo el subgrupo $\{1,3,4,9,10,12\}$. Se tienen los desarrollos

$$\frac{2}{13} = \overline{0,153846} \qquad \frac{7}{13} = \overline{0,538461}$$

$$\frac{5}{13} = \overline{0,384615} \qquad \frac{11}{13} = \overline{0,846153}$$

$$\frac{6}{13} = \overline{0,461538} \qquad \frac{8}{13} = \overline{0,615384}$$

En conclusión, hay dos clases de períodos. En general habrá tantas clases como índice tenga el subgrupo de restos asociado al desarrollo de $1/p$.

Dejamos a cargo del lector entender, formalizar esta situación y dar ejemplos.

Veamos una aplicación interesante al cálculo del período. Sabiendo que el período de $1/59$ tiene longitud 58, vamos a determinarlo, sin efectuar la inmensa división, sino ir calculando períodos de fracciones del tipo $\frac{a}{59}$ y "emparchando" trozos de períodos. Vamos a utilizar una calculadora de bolsillo que sólo da 6 cifras decimales correctas.

$$\frac{1}{59} = 0,016949...$$

Se trata ahora de buscar un múltiplo de 1/59 que dé período 0,949..., o sea, se trata de determinar a tal que a.0,0169... = 0,949... Procediendo en forma aproximada (olvidando los...) calculamos

$$a = \frac{0,949}{0,0169}\ 56,15...$$

Utilizamos a = 56 y obtenemos

$$\frac{56}{59} = 0,949152...$$

Ahora repetimos lo mismo con 0,152.

Procediendo de esta forma resulta, en resumen:

$$\frac{1}{59} = 0,016949$$
$$\frac{56}{59} = \quad\quad 949152$$
$$\frac{9}{59} = \quad\quad\quad 152542$$
$$\frac{32}{59} = \quad\quad\quad\quad 542372$$
$$\frac{22}{59} = \quad\quad\quad\quad\quad 372881$$
$$\frac{52}{59} = \quad\quad\quad\quad\quad\quad 881355$$
$$\frac{21}{59} = \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad 355932$$
$$\frac{55}{59} = \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad 932203$$
$$\frac{12}{59} = \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad 203389$$
$$\frac{23}{59} = \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad 389830$$
$$\frac{49}{59} = \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad 830508$$
$$\frac{30}{59} = \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad 508474$$

$\frac{28}{59} = 474576$

$\frac{34}{59} = \quad 576271$

$\frac{16}{59} = \quad\quad 271186$

$\frac{11}{59} = \quad\quad\quad 186440$

$\frac{26}{59} = \quad\quad\quad\quad 44067$

$\frac{4}{59} = \quad\quad\quad\quad\quad 067796$

$\frac{47}{59} = \quad\quad\quad\quad\quad\quad 796610$

$\frac{36}{59} = \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad 610169$

y el proceso concluye. Resulta:

$$\frac{1}{59} = 0,01694919525 \quad 4237288135 \quad 5932203389 \quad 8305084745 \quad 7627118644 \quad 06779661\ldots$$

(**NOTA**: en la fracción 26/59 la calculadora nos dió 0,440678, y como el 8 era de redondeo, no lo tuvimos en cuenta).

E. Partición del período. Sea p un primo y consideremos el período de $\frac{1}{p}$. Si L es la longitud del período y L = e.f, podemos partir el período en e partes de longitud f. Los números formados suman un múltiplo de 999...9, f nueves. Veamos algunos ejemplos:

1. $\frac{1}{7} = \overline{0,142857}$, L = 6 = 2.3 = 3.2. Se observa:

$$142 + 857 = 999$$

$$14 + 28 + 57 = 99$$

2. $\frac{1}{17} = 0,\overline{0588235294117647}$, $L = 16 = 2.8 = 4.4 = 4.2$

$$05882352 + 94117647 = 99999999$$

$$0588 + 2352 + 9411 + 7647 = 199998 = 29999$$

$$05 + 88 + 23 + 52 + 94 + 11 + 76 + 47 = 396 = 4.99$$

3. $\frac{1}{13} = 0,076923$, $L = 6 = 2.3 = 3.2$

$$076 + 923 = 999$$

$$07 + 69 + 23 = 99$$

Veamos el hilo de una demostración con el ejemplo de p = 17. Se tiene

$1 = 17.0 + 1$

$10.1 = 17.0 + 10$

$10.10 = 17.5 + 15$

$10.15 = 17.8 + 14$

$10.14 = 17.8 + 4$

$10.4 = 17.2 + 6$

$10.6 = 17.3 + 9$

$10.9 = 17.5 + 5$

$10.5 = 17.2 + 16$

$$10^3.1=17(0.10^7+5.10^6+8.10^5+8.10^4+2.10^3+3.10^2+5.10+2)+16$$

$10.16 = 17.9 + 7$

$10.7 = 17.4 + 2$

$$10.2 = 17.1 + 3$$

$$10.3 = 17.1 + 13$$

$$10.10 = 17.7 + 11$$

$$10.11 = 17.6 + 8$$

$$10.8 = 17.4 + 12$$

$$10.12 = 17.7 + 1$$

$$10^3.16=17.(9.10^7+4.10^6+1.10^5+1.10^4+7.10^3+6.10^2+4.10 +7)+16$$

Por lo tanto, sumando resulta:

$$10^3.17 = 17.(S_1 + S_2) + 17$$

$$10^3 - 1 = S_1 + S_2$$

donde S_1 y S_2 denotan, respectivamente, la primera y la segunda mitad del período. Análogamente

$$1 = 17.0 + 1$$

$$10.1 = 17.0 + 10$$

$$10.10 = 17.5 + 15$$

$$10.15 = 17.8 + 14$$

$$10.14 = 17.8 + 4$$

$$10^4.1 = 17.(0.10^3 + 5.10^2 + 8.10 + 8) + 4$$

$$10.4 = 17.2 + 6$$

$$10.6 = 17.3 + 9$$

$$10.9 = 17.5 + 5$$

$10.5 = 17.2 + 16$

$$10^4.4 = 17.(2.10^3 + 3.10^2 + 5.10 + 2) + 16$$

$10.16 = 17.9 + 7$

$10.7 = 17.4 + 2$

$10.2 = 17.1 + 3$

$10.3 = 17.1 + 13$

$$10^4.16 = 17.(9.10^3 + 4.10^2 + 1.10 + 1) + 13$$

$10.13 = 17.7 + 11$

$10.11 = 17.6 + 8$

$10.8 = 17.4 + 12$

$10.12 = 17.7 + 1$

$$10^4.13 = 17.(7.10^3 + 6.10^2 + 4.10 + 7) + 1$$

Sumando resulta

$$10^4(1 + 4 + 16 + 13) = 17.S + (4 + 16 + 13 + 1)$$

Por lo tanto $17.S = 2.17.(10^4 - 1)$ o sea $S = 2.9999$.

EJERCICIOS

1. Hallar las fracciones irreducibles representadas por los desarrollos

i. $(0,123)_7$, ii. $(0,112)_4$, iii. $(0,013)_7$, iv. $(0,013)_6$,
v. $(0,17)_{11}$, vi. $(0,ABC)_{16}$, vii. $(0,A)_{16}$ viii. $(0,FEA)_{16}$

2. ¿En qué base s el desarrollo de $\frac{11}{210}$ es finito?

3. Hallar los desarrollos en base 12 de las siguientes fracciones

$$\frac{1}{17}, \quad \frac{7}{12}, \quad \frac{11}{30}, \quad \frac{1}{75}$$

4. ¿Para qué primos p el desarrollo decimal de 1/p tiene períodos de longitudes: 1,2,3,4,5,6?

(Sol. caso 6. Se trata de hallar los primos p tales que $10^6 \equiv 1 (\mathrm{mod}\ p)$, o sea, tales que $10^3 \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ p)$. Como $10^3 - 1 = 11.91$ y 11 no tiene período de longitud 6, quedan 7 y 13. Pero estos sí tienen período de longitud 6. O sea la respuesta es 7 y 13).

5. Determinar la longitud de los períodos de las fracciones 1/p, p primo < 100.

(Consultar textos en teoría de números y profundizar la teoría de índices, elementos primitivos, etc.).

6. Hallar los desarrollos en base s de $(s - 1)^{-1}$ y $(s + 1)^{-1}$.

7. Hallar el desarrollo en base 3 de $(s - 1)^{-2}$.

(Sugerencia: Procediendo como es habitual

$$
\begin{aligned}
1 &= (s - 1)^2.0 + 1 \\
b &= (s - 1)^2.0 + b \\
s^2 &= (s^2 - 2s + 1).1 + 2s - 1 \\
2s^2 - s &= (s^2 - 2s + 1).2 + 3s - 1 \\
\dots &= \quad \dots \\
is^2 - (i - 1)s &= (s^2 - 2s + 1).i + (i + 1)s - i
\end{aligned}
$$

Se debe preservar la condición $(i + 1)s - 1 < s^2 - 2s + 1$. Esto ocurre si y sólo si $i < s - 2$, o sea $i + 1 < s - 1$. Para $i = s - 2$ se tiene

$$(s - 2 + 1)s - s + 2 - (s^2 - 2s + 1) = 1$$

lo cual significa que en el paso $s - 2$

$$(s - 2)s^2 - (s - 3) = (s^2 - 2s + 1)\ (s - 1) + 1,$$

o sea el desarrollo se saltea $s - 2$ y repite el proceso. En definitiva el desarrollo de $(s - 1)^2$ es

$$\frac{1}{(s-1)^2} = 0,\overline{12\dots(s-3)(s-1)}\ ).$$