SERIES GEOMETRICAS: ALGUNAS APLICACIONES

María Isabel Viggiani Rocha

En el Vol.4 No.2, el Dr. Roberto Miatello proponía que un problema (que detallaré más en a)) sea respondido de 2 maneras diferentes. Una de esas maneras es una aplicación de la serie geométrica y eso me motivó a escribir esta nota breve.

Recordemos: dada una serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ si esta converge hacia s este número s se llamará la suma de la serie y escribimos $s = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ Así es que para las series convergentes se usa el mismo símbolo para designar la serie y su suma.

La serie geométrica es: $\sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} = 1 + q + q^2 + \ldots$ con $q \pm 0$. Si la serie es $\sum_{k=1}^{\infty} a\, q^{k-1}$, con a y $q \neq 0$, se denomina <u>serie geométrica de término inicial a y razón q</u>. Si $|q| \geq 1$ la serie diverge, en tanto que si $|q| < 1$ converge a $s = a/(1-q)$, observándose además que $\lim_{m\to\infty} q^n = 0$.

Son estos resultados los que usaré en las distintas aplicaciones que paso a detallar:

a) Dos estaciones A y B se encuentran a 120 km de distancia. En el mismo instante en que un tren parte de A hacia B a 40 km/h, otro tren parte de B hacia A a 20 km/h, por la misma vía. En el instante de partida, una mosca parte del primer tren hacia el segundo a 100 km/h. Al alcanzarlo, invierte de inmediato el vuelo hacia el primero y así sucesivamente continúa volando entre los trenes hasta el eventual choque. Cuál es la distancia total recorrida por la mosca? ¿Puede hallar la respuesta de dos maneras diferentes?

a1) Considerando un sistema de ejes coordenados (tiempo, espacio) con origen de coordenadas el momento y punto de partida, tenemos:

$y = 40\ t$ tren de A a B

$y = -20t + 120$ tren de B a A

de donde $40\ t = -20t + 120$ y $t = 2$ (momento del choque).

Por lo tanto, la distancia recorrida por la mosca será: $d = 100\ km/h.2h = 200\ km$.

a2) Si $y = 40\ t$, $y = -20t + 120$ e $y-y_0 = \pm 100\ (t-t_0)$, (siendo t_0, y_0) punto de encuentro de la mosca con algún tren, + si va de A a B y - si va de B a A) son las ecuaciones correspondientes al movimiento de los dos trenes y la mosca, y buscamos los sucesivos puntos de encuentro, obtenemos:

(1,100); (10/7,400/7); (12/7,600/7); (90/49,3600/49); (94/49,4000/49);(670/343,26800/343); (678/343,27600/343);...

Observamos que la diferencia de tiempos entre dos encuentros, es decir, los tiempos de cada trayecto serán:

$t_2-t_1 = 10/7- 1 = 3/7$; $3/7 = 3/7.1 = 3/7.(2/7)^0$

$t_3-t_2 = 2/7$; $2/7 = 2/7.1 = 2/7.(2/7)^0$

$t_4-t_3 = 6/49$; $6/49 = 3/7.2/7 = 3/7.(2/7)^1$

$t_5-t_4 = 4/49$; $4/49 = 2/7.2/7 = 2/7.(2/7)^1$

$t_6-t_5 = 12/343$; $12/343 = 3/7.4/49 = 3/7.(2/7)^2$

$t_7-t_6 = 8/343$; $8/343 = 2/7.4/49 = 2/7.(2/7)^2$

y así sucesivamente.

Estas diferencias en el m-ésimo encuentro pueden ser denotados como: $(3/7).(2/7)^{m-1}$ con $m \geq 1$; si va del 2° tren al 1° y como $(2/7).(2/7)^{m-1} = (2/7)^{m}$, $m \geq 1$; si va del 1° tren al 2°.

Por lo tanto, y es evidente, la mosca finalizará su recorrido cuando la diferencia de tiempos sea nula es decir, si $\lim_{m\to\infty} (2/7)\ m-1 = 0$. El total del tiempo empleado en todos los viajes de la mosca será:

$$t = 1 + 3/7.(2/7)^{0} + 2/7.(2/7)^{0} + 3/7.(2/7)^{1} +$$
$$+ 2/7.(2/7)^{1} +\ldots =$$
$$= 1 + 5/7.(1 + 2/7 + (2/7)^{2} + \ldots) =$$
$$= 1 + 5/7.1/(1-(2/7)) = 2 \text{ (pues } 2/7 < 1) \Rightarrow d = 200 \text{ km.}$$

Concluímos entonces que la mosca recorre una distancia finita (200 km) en una suma infinita de tiempos $(1 + 5/7 \sum^{\infty} (2/7)^{i-1}$ que representa un tiempo finito (2 horas).

b) Se suelta una pelota de una altura de 4 m. Supóngase que cuando se la suelta de una altura a_n rebota siempre $(3/4)_{a_{n-1}}$. Hallar la distancia total recorrida por la pelota.

En la primera caída recorrerá 4 m, en el primer rebote ascenderá y descenderá cada vez 4. 3/4 m = 3 m, en el segundo rebote ascenderá y descenderá cada vez (4.3/4). $3/4 = 4\ (3/4)^{2}$ y así sucesivamente, finalizando en el m-ésimo rebote, cuando (igual que la mosca): $\lim_{m\to\infty} (3/4)^{m-1} = 0$, es decir, después de infinitos rebotes. Por lo tanto, la distancia recorrida por la pelota desde su lanzamiento hasta su reposo será:

$d = 4 + 2\ (4.3/4 + 4\ .\ (3/4)^2 + \ldots) =$

$= 4 + 2\ .\ 4\ .\ 3/4\ (1 + 3/4 + (3/4)^2 + \ldots) =$

$= 4 + 6\ .\ 1/(1 - (3/4)) = 28$ (pues $3/4 < 1$)

distancia = 2m.m.m.

c) Un célebre teorema de Arquímedes (Arquímedes de Siracusa, 287-212 a.C.) dice que: "El área de un segmento parabólico es 2/3 del área del rectángulo que tiene por base la cuerda que lo limita y circunscripto al mismo segmento".

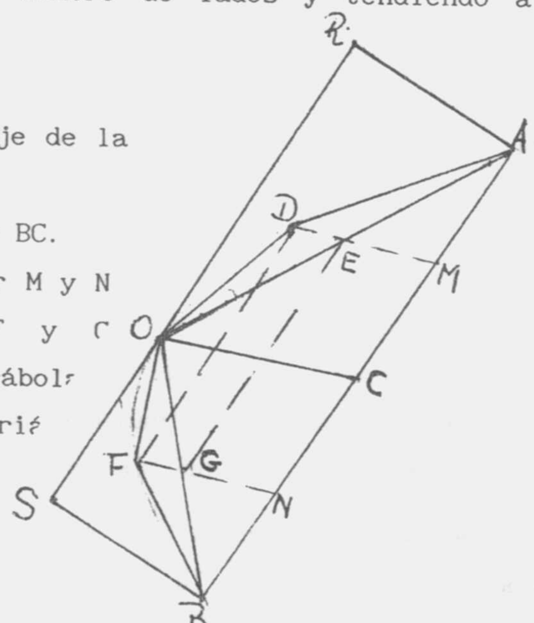
Este teorema lo demuestra Arquímedes usando el método griego de exhaución con el cual, dada una región cuya área quiere determinarse, se inscribe en ella una región poligonal que se aproxime a la dada y cuya área sea de fácil cálculo. Luego elige otra región poligonal que dé una aproximación mejor (de mayor número de lados) y se continúa el proceso, aumentando el número de lados y tendiendo a llenar la región dada.

AB cuerda.

OC segmento paralelo al eje de la parábola y que biseca a AB.

M y N puntos medios de AC y BC.

Trazando paralelas a OC por M y N se obtienen D y E, F y G intersecciones con la parábol[a] los lados OA y OB (del tri[ángulo] AOB) respectivamente.



Arquímedes prueba que área ADO = 1/4 área AOC,

área OFB = 1/4 área BOC; es

decir que el área de estos triángulos, construídos sobre los lados AOB, es 1/4 área de AOB (S = área de AOB).

Usando el método de exhaución, observa que cada vez la nueva área es la anterior aumentada en 1/4 la de los triángulos construídos en el paso anterior. Area del segmento parabólico $= S + 1/4.S + 1/4\ (1/4.S) + \ldots =$

$= S/(1 - (1/4)) =$ (pues $1/4 < 1$)

$= 4/3\ S = 2/3$ área ARSB.

d) Una curva muy singular es la Copo de nieve (su nombre deriva de su parecido con los cristales de nieve). Fue concebida en función de un proceso de trazado en etapas múltiples:

*etapa 1: se inicia con un triángulo equilátero de lado igual a la unidad.

*etapa 2: se divide cada uno de los lados en 3 partes iguales y en cada tercio medio se construye un triángulo equilátero dirigido hacia afuera, suprimiendo las partes comunes a los triángulos viejo y nuevo.

*etapas sucesivas: se repite el procedimiento de la etapa 2.

Su singularidad se debe a que, en cada etapa del trazado, su longitud es 4/3 de la longitud en la etapa anterior:

l = long $C_n = 3 + \sum_{i=2}^{\infty} (4/3)^{i-2}$, de donde, si n crece tanto como se quiera,

$l = 3 + \sum_{i=2}^{\infty} (4/3)^{i-2} = 3 + \sum_{i=2}^{\infty} (4/3)^{j-1}$ y como $4/3 > 1$, esta serie diverge.

Es decir ¡**longitud infinita**!

En cambio si consideramos el área encerrada por la curva, ésta es, a partir de C_3, 4/9 del área en la etapa anterior:

A = área $C_n = 3 + \sqrt{3/4}\ (1 + 1/3 \sum_{i=2}^{\infty} (4/9)^{i-2}$, de donde si n crece tanto como se quiera:

$A = \sqrt{3/4}\ (1 + 1/3 \sum_{i=2}^{\infty}(4/9)^{i-2}) = \sqrt{3/4}\ (1 + 1/3$

$\sum_{j=1}^{\infty} (4/9)^{j-1}) = \sqrt{3/4}\ (1 + 1/3\ .1/(1 - (4/9))) = 2\sqrt{3/5}$

(pues $4/9 < 1$).

Es decir, ¡**área finita**! y no sólo finita, sino que su valor es apenas 8/5 del área C_1, lo que significa que es sólo un 60% mayor que el área inicial.

e) Expresar un número decimal periódico como un cociente entre números enteros.

Sea $\alpha = K,\ a_1 a_2 \ldots a_m\ b_1\ b_2 \ldots b_n$ donde K representa la parte entera; a_i con $i = 1, \ldots, m$ los distintos dígitos que componen el anteperíodo (número que no se repite) y b_j con $j = 1, \ldots, n$ los distintos dígitos del período (número que se repite indefinidamente).

Como α puede ser positivo, nulo o negativo y los a_i, b_j son números no negativos, podemos escribir:

$\alpha = K,\ a_1\ a_2 \ldots a_m \pm (b_1 b_2 \ldots b_n,\ b_1 b_2 \ldots b_n)/10^{m+n}$, con signo + si $\alpha \geq 0$ y signo - si $\alpha < 0$.

$$\alpha = K, a_1 a_2 \ldots a_m \pm ((b_1 b_2 \ldots b_n)/10^{m+n} + (b_1 b_2 \ldots b_n)/10^{m+2n} + + b_1 b_2 \ldots b_n)/10^{m+3n} + \ldots) =$$

$$\alpha = K, a_1 a_2 \ldots a_m \pm ((b_1 b_2 \ldots b_n)/10^{m+n} \sum_{i=1}^{\infty} (1/10^n)^{i-1}) =$$

$$= K, a_1 a_2 \ldots a_m \pm ((b_1 b_2 \ldots b_n)/10^{m+n} . 1/(1-(1/10)^n))$$

(pues $1/10^n < 1$)

$$= K, a_1 a_2 \ldots a_m \pm (b_1 b_2 \ldots b_n)/(10^m (10^{n-1})),$$ de donde:

$$\alpha = ((10^n-1)(10^m K \pm a_1 a_2 \ldots a_n) \pm b_1 b_2 \ldots b_n)/(10^m (10^{n-1})).$$

Ejemplos: * 1,24123 = (999 (100.1 +24) + 123)/(100.999) = 123999/99900.

* -0,234234... = -234/999, en este ejemplo m = 0 pues es una expresión decimal periódica pura (sin anteperíodo).

f) El inverso de un número entero (diferente de -1 y 0) es igual a la suma de la serie geométrica a partir del 2° término , cuya razón es el inverso del número consecutivo:

$$1/n = \sum_{i=2}^{\infty} (1/(n+1))\ i-1 = \sum_{i=2}^{\infty} (1/(n+1))^j$$

$\forall n \neq -1, 0, \quad n \varepsilon Z$.

$$\sum_{j=1}^{\infty} (1/n+1))^j = (1/(n+1)).(1 + 1/(n+1) + 1/(n+1)^2 + \ldots) =$$

$$= 1/(n+1).1/(1-1/(n+1)) = 1/n.$$ (pues 1 (n+1) < 1).

g) En la introducción recordamos que:

$$\sum_{i=1}^{\infty} x^{i-1} = 1 + x + x^2 + \ldots = 1/(1 - x) \qquad \text{si } |x| < 1,$$

de donde si se sustituye x por x^2 obtenemos:

$1/(1 - x^2) = 1 + x^2 + x^4 + \ldots$ con $|x| < 1$,

si se sustituye x por -x obtenemos:

$1/(1 + x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots$ con $|x| < 1$,

si en esta última se sustituye x por x^2 obtenemos:

$1/(1+ x^2) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots$ con $|x| < 1$, o

si en la segunda se sustituye x por 2x obtenemos:

$1/(1 - 4x^2) = 1 + 4x^2 + 16x^4 + \ldots$ con $|x| < 1/2$.

Este procedimiento puede ser aplicado a cualquier sustitución deseada.

h) La última aplicación de la serie geométrica será la referida a una de las famosas paradojas de Zenón (Zenón de Elea, 495-435 a.C) **Paradoja del corredor**: un corredor no puede alcanzar nunca la meta porque siempre ha de recorrer la mitad de la distancia que le falta antes de alcanzar la meta. Esto muestra que el corredor deber recorrer infinitas distancias y eso le tomará una eternidad. Así resulta una paradoja pues el resultado obtenido del razonamiento está en contradicción con la intuición física. Esta y otra de sus paradojas pueden interpretarse como un intento de mostrar que el movimiento es ilusorio. Pero con la creación de la teoría de las series infinitas se invalida la objeción de Zenón pues la suma de infinitas distancias le tomará un tiempo finito, como en el ejemplo a).

Si l es la distancia entre el punto de partida y el de llegada, la suma de las infinitas distancias recorridas (d_i) determinará que el corredor sí podrá alcanzar la meta:

$$\begin{aligned}\sum^{\infty} d_i &= 1(1/2 + 1/4 + 1/8 + \ldots) = \\ &= 1/2.(1 + 1/2 + 1/4 + \ldots)= \\ &= 1/2 \,.\, 1/(1-(1/2)) = 1 \qquad \text{(pues } 1/2 < 1\text{)}.\end{aligned}$$

O bien considerando que siempre corre a una misma velocidad y que la primera mitad es recorrida en un tiempo t, la carrera debería ser terminada en 2t. Apoyándonos en los tiempos de cada intervalo:

$$t + t/2 + t/4 + \ldots = t/(1-(1/2)) = 2t \qquad (\text{pues } 1/2 < 1).$$

Daremos ahora un ejemplo que justifica considerablemente el punto de vista de Zenón: Si la velocidad del corredor decrece gradualmente, tal que para recorrer 1/2 lo hace en t, 1/4 en t/2 ,...,$1/2^n$ en t/n, el corredor no alcanzará la meta en un tiempo finito:

$t + t/2 + t/3 + t/4 + \ldots = t. \sum_{i=1}^{\infty} 1/i$; siendo esta serie la **serie armónica**, de la cual bien conocemos que es divergente.

* * * * *

BIBLIOGRAFIA

* APOSTOL, Tom M. Calculus, introducción con vectores y geometría analítica Vol. 1 - Ed. Revert S.A., 1965.
* BERS, L.-Karal, F. Cálculo - Ed. Interamericana, 1978.
* TRICOMI, Francesco Esercizi e Complementi di Analisi Matematica, Parte 1 - C.E.D.A.M., 1951.

MARIA ISABEL VIGGIANI ROCHA
UNIVERSIDAD NACIONAL DE TUCUMAN