En Geometría Euclideana hay problemas no resueltos.

Paquetes de Círculos en un cuadrado.

Jorge Vargas

Sea S un cuadrado de lado s. Un <u>paquete</u> de círculos en S es un número finito de círculos contenidos en S tal que el interior de cualquier par de ellos son disjuntos. Formalmente si $C_1,\ldots,C_N$ son círculos contenidos en S, $C_1,\ldots,C_N$ forman un paquete si $D_i \cap D_j = \phi$ $(i \neq j)$ donde $D_j = C_j$-circunferencia determinada por C_j.

<u>Problema:</u> Si $C_1,\ldots,C_N$ tienen el mismo radio r. ¿Cuáles son posibles valores para r, N en función de S?.

Denotemos por $x_1,\ldots,x_N$ los centros de $C_1,\ldots,C_N$ respectivamente. Entonces la condición $D_i \cap D_j = 0$ implica

$$(x) \qquad d(x_i, x_j) \geq 2r \text{ si } i \neq j$$

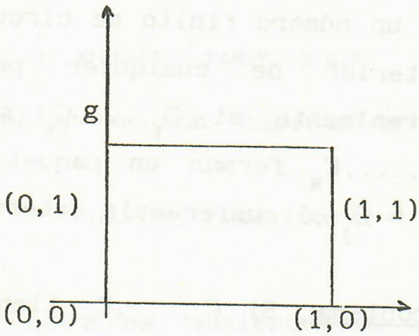
La condición de que $C_1,\ldots,C_N$ están enteramente contenidos en S implica que (**) $x_1,\ldots,x_N$ están en un cuadrado de lado S-2r.

Recíprocamente, si $X_1,\ldots,X_N$ estan en S, $d(x_i, x_j) \geq m > 0$ $(i \neq j)$, entonces S contiene N-círculos $C_1,\ldots,C_N$ de centro $x_1,\ldots,x_N$ y radio r que constituyen un paquete en S si

$$\frac{r}{s} = \frac{m}{2(m+1)}.$$

Ahora mostramos como construir un paquete 10 círculos en un cuadrado.

En un cuadrado de lado unidad, dibujado como en fig. 1, dibujamos para cada x entre $\sqrt{2}-1$ y 1/2 10 puntos $P_1(x),...,P_{10}(x)$ de la manera siguiente:



$P_2(x) = (0,0)$, $P_4(x) = (0,1)$
$P_0(x)$, $P_1(x)$, $P_3(x)$, $P_6(x)$, $P_7(x)$, $P_8(x)$ están en el borde,
$P_5(x)$ en el interior de modo que las ocho distancias
$d(P_0(x), P_1(x))$; $d(P_1(x), P_2(x))$, $d(P_2(x), P_3(x))$, $d(P_3(x), P_5(x))$, $d(P_4(x), P_5(x))$, $d(P_5(x), P_6(x))$, $d(P_6(x), P_7(x))$, $d(P_7(x), P_8(x))$, sean iguales a x. Sea $P_9(x)$ el centro de la circunferencia circunscripta del triángulo $P_1(x)$, $P_5(x)$ $P_8(x)$.

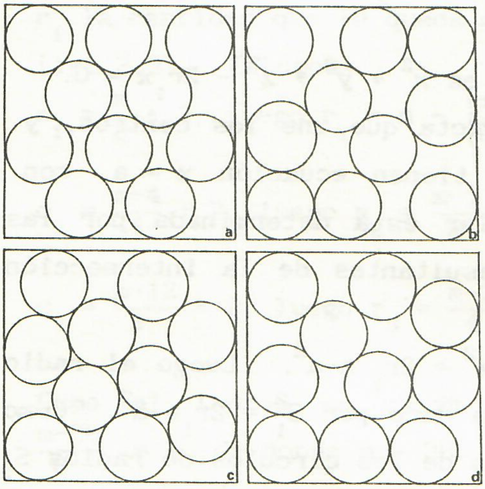
El radio de dicha circunferencia es un número y(x). Es fácil verificar que y(x) es una función de crecimiento de x, $y(x) > x$ si $x = \sqrt{2}-1$, $y(x) < x$ si $x = \frac{1}{2}$.

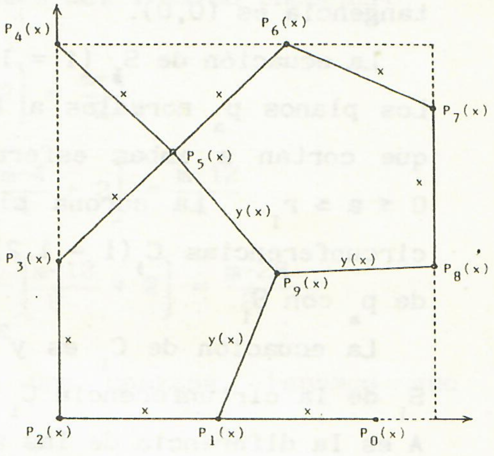
Por el teorema de Bolzano, la ecuación $y(x) = x$ tiene una única solución m en el intervalo $\sqrt{2}-1$, $\frac{1}{2}$, $m \sim 0,42119$.

Sea $x_i = P_i(m)$ $i = 0, 1,...,9$. Estos diez puntos son centros de 10 círculos de radio $r = \frac{1}{2}m$ que forman el paquete d en un cuadrado de lado $S = 1 + m$.

Conjetura: (Valette Guy - 1988).

Para cualquier paquete de círculos en un cuadrado se tiene que $N \leq 10$.





FACULTAD DE MATEMATICA, ASTRONOMIA Y FISICA
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CORDOBA.

SOLUCIONES ENVIADAS

Problema 9.Vol.1 N°3.

Sean S_1 y S_2 dos esferas tangentes (la primera interior a la segunda). Sea P un plano normal a la recta determinada por los centros y el punto de tangencia y tal que corte a ambas. Sobre dicho plano las esferas determinan una corona circular. Sea a el área de esta corona y A_1, A_2 las áreas de los casquetes de S_1 y S_2, respectivamente, que contienen al punto de tangencia. Demostrar que $A_1 + A = A_2$

La siguiente solución fue enviada por M.I.Viggiani Rocha (U.N.de Tucumán).