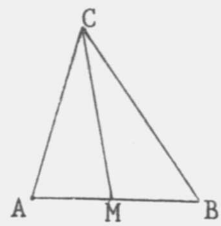
## PROBLEMAS

En la serie de problemas que aquí presentamos, los numerados del 5 al 9 corresponden a la Olimpíada Brasileña de Matemática y los siete problemas siguientes a la Olimpíada Nacional de Matemática de Chile, ambas realizadas en setiembre de 1990.

Invitamos a los lectores a enviarnos soluciones de los problemas propuestos.

1) En el triángulo $\stackrel{\triangle}{ABC}$ sea $\overline{CM}$ la bisectriz del ángulo $\hat{C}$. Probar que $\overline{BC} + \overline{AC} \geq 2\ CM$. Mostrar que $\overline{AM} = \overline{MB}$ si y solo si $\overline{AC} = \overline{BC}$




T. Godoy, FaMAF, U.N.C.

2) Sea r una recta paralela al segmento $\overline{AB}$. Sea C un punto arbitrario sobre r. Probar que el perímetro de $\stackrel{\triangle}{ABC}$ es mínimo cuando $\overline{AC} = \overline{BC}$.

T. Godoy, FaMAF, U.N.C.

3) Probar que entre todos los triángulos de igual área el de perímetro mínimo es el equilátero.

T. Godoy, FaMAF, U.N.C.

4) En un tablero 3 x 3 se intenta disponer los números naturales del 1 al 9 inclusive sin repetir ninguno de modo que la suma de cualquier fila sea la misma que la de cualquier columna. Probar que tal cosa es imposible.

T. Godoy, FaMAF, U.N.C.

5) Los lados del triángulo T de vértices (0,0), (3,0), (0,3) son espejos. Demuestre que una de las imágenes del triángulo $T_1$ de vértices (0,0), (0,1) y (2,0) es el triángulo de vértices (24,36), (24,37), (26,36).

6) Sea k un entero positivo tal que $\frac{k(k+1)}{3}$ es un cuadrado perfecto. Demuestre que $\frac{k}{3}$ y (k + 1) son cuadrados perfectos.

7) Una función f definida en el conjunto de los números enteros es tal que $f(x) = x - 10$ si $x > 100$ y $f(x) = f(x + 11)$ si $x \leq 100$. Determine el conjunto de valores de la función f.

8) Un juego es disputado por dos adversarios A y B, cada uno de los cuales dispone de diez fichas numeradas de 1 a 10. El tablero de juego consiste de dos filas de casilleros numerados de 1 a 1492 la primera, y de 1 a 1989 la segunda. En la n-ésima jugada (n = 1,2,3,...,10) A coloca su ficha número n en cualquier casillero vacío y B coloca enseguida su ficha número n en cualquier casillero vacío de la fila que no contiene la ficha número n de A. B gana el juego si, después de la décima jugada, ambas filas exhiben los números de las fichas en el mismo orden relativo. En caso contrario gana A. ¿Cuál de los jugadores tiene una estrategia vencedora?. Si cada jugador tuviera k fichas numeradas de 1 a k, ¿cuál de ellos tendría una estrategia

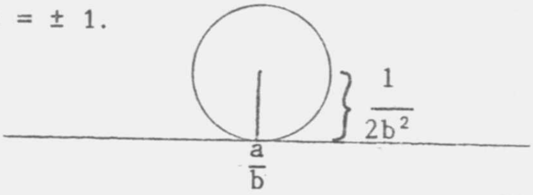
ganadora?. Si en la primera fila hubiera un casillero por cada racional, y en la segunda uno por cada entero, ¿cuál de ellos tendría una estrategia ganadora?

9) Un tetraedro es tal que el centro de la esfera circunscripta a él está dentro del tetraedro. Demuestre que al menos una de sus aristas tiene longitud mayor o igual a la longitud de la arista del tetraedro regular inscripto en la misma esfera.

10) Encuentre la suma de los 120 números 12.345, 12.354, 12.435,..., 54.321 que resultan de efectuar todas las permutaciones de los cinco dígitos 1,2,3,4,5.

11) Encuentre todos los números naturales n tales que $\dfrac{n+81}{2n-5}$ es un número natural.

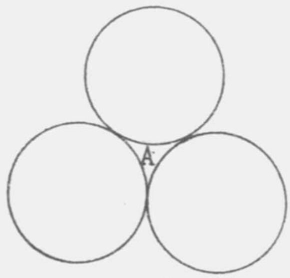
12) Sobre cada punto de la recta numérica de la forma a/b (donde a y b representan números enteros que no poseen divisores comunes) se dibuja una circunferencia tangente a la recta en ese punto, de radio $1/2b^2$. Demuestre que estas circunferencias no se cortan y, que las que corresponden a a/b y c/d son tangentes si y solamente si $ad - bc = \pm 1$.




13) Encontrar el número mínimo de cortes que es necesario

realizar para dividir completamente, en cubitos de 1 cm. de arista, un cubo de madera de 4 cm. de arista utilizando una sierra que permite solamente cortes horizontales y verticales, permitiéndose reordenar las piezas después de cada corte.

**14)** Encuentre el área A de la región delimitada por tres circunferencias de radio uno, tangentes como muestra la siguiente figura




**15)** Encuentre todos los pares (x,y) de números racionales que solucionan la ecuación $y^2 - (x - 1)x^2 = 0$.

**16)** Un niño recibe una cierta cantidad de dinero de su padre. Este dinero lo puede recibir de tres maneras diferentes:

i) Anticipo de 1 peso y el resto en cuotas mensuales de 39 pesos.

ii) Anticipo de 10 pesos y el resto en cuotas mensuales de 11 pesos.

iii) Anticipo de 2 pesos y el resto en cuotas mensuales de 7 pesos.

Determine el monto mínimo a recibir.