

SOLUCION AL PROBLEMA 7 VOLUMEN 1 N° 3

¿En qué proporción quedan divididos el área y el volumen de una esfera de radio 1 por el plano de una de las caras del cubo inscripto?

Solución enviada por M.I. Viggiani Rocha (U.N. de Tucumán)

Como el cubo está inscripto en la esfera de radio $r = 1$, la longitud de cualquiera de sus diagonales es $D = 2r = 2$. Si d es la longitud de la diagonal de cualquier cara y L la longitud de un lado, tenemos que $d = \sqrt{2}L$ y $D = \sqrt{L^2 + 2L^2} = \sqrt{3}L$, de donde $L = 2/\sqrt{3}$. Entonces la altura del casquete es $h = (2r-L)/2 = (\sqrt{3}-1)/\sqrt{3}$.

Denotamos por A_E , V_E , A_C , V_C el área y el volumen de la esfera y del casquete respectivamente.

Luego, utilizando fórmulas conocidas obtenemos que

$$A_E = 4\pi r^2 = 4\pi, \quad V_E = \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{4}{3} \pi,$$

$$A_C = 2\pi r h = 2\pi(\sqrt{3}-1)/\sqrt{3}, \quad V_C = 2\pi(3\sqrt{3}-4)/9\sqrt{3}.$$

Resulta finalmente que

$$\frac{A_C}{A_E} = \frac{3-\sqrt{3}}{6} \quad \text{y} \quad \frac{V_C}{V_E} = \frac{9-4\sqrt{3}}{18}$$