LA GEOMETRIA CARTESIANA

Elsa Malisani

Introducción:

La Matemática había alcanzado su máximo esplendor en la Escuela de Alejandrina de Grecia, pero tras la decadencia de la Edad Antigua se produce una profunda crisis en el ámbito científico (Cfr. MALISANI, 1989). Los pueblos medievales de Occidente no se preocupaban por el desarrollo de la Matemática, sino que sólo se limitaban a estudiar y a transmitir los conocimientos existentes, sin aportar ideas nuevas. De este modo, comenzó a perderse el interés por las demostraciones extensas, por las discusiones demasiado complicadas y se terminó por reducir todo el saber a resúmenes cada vez más breves, los cuales en lugar de ser fáciles de aprender resultaban de lectura cada vez más incomprensible (Cfr. GEYMONAT, 1954: 27).

Los árabes fueron los únicos que realizaron importantes aportes en el campo de la Geometría, con la creación de la Trigonometría; además, habían logrado numerosos conocimientos en Algebra para resolver problemas prácticos.

Es así como la Matemática por perfecta que fuese después de la época griega, debía esperar más de un milenio -hasta los siglos XVI y XVII- antes de alcanzar un nuevo grado de desarrollo.

El objetivo de este trabajo es realizar una breve reseña sobre la construcción de la Geometría cartesiana. En la primera parte presentamos el Renacimiento de la Matemática; en la segunda, mostramos las características generales de la época cartesiana y a sus principales representantes con los valiosos aportes realizados; y en la tercera, exponemos los descubrimientos más importantes de la época post-cartesiana (siglo XVIII).

El renacimiento de la Matemática.

Durante los siglos XV y XVI, del mismo modo que en las artes, se produce el Renacimiento de la Matemática y con él reaparece el interés por las obras de Arquímedes, sobre todo por aquéllas referidas a cálculos de áreas y de volúmenes.

En estos trabajos, Arquímedes había demostrado sus resultados sobre cuadraturas y cubicaciones mediante el método de exhaución. Aunque los razonamientos expuestos son impecables desde el punto de vista lógico, este método no es constructivo pues oculta el hilo conductor de sus argumentaciones. Por consiguiente, a los mismos seguidores de Arquímedes les resulta difícil poder desarrollar las demostraciones más allá del punto alcanzado por el autor o resolver nuevos problemas aplicando este método (Cfr. MALISANI, 1989). Paulatinamente, el interés por estas obras va desapareciendo y los admiradores de Arquímedes se convierten en opositores; de esta manera, el método de exhaución es reemplazado por un método intuitivo, que se basa más sobre la intuición que sobre el raciocinio e implica graves renuncias en lo que atañe al rigor. Pero esta "ligereza científica" se transforma en un factor eficaz de progreso, ya que impulsa al matemático hacia la resolución de nuevos problemas (cfr. GEYMONAT, 1954: 31-32).

En este período renacentista, los italianos Tartaglia, Cardano y Ferrari llevan a cabo importantes trabajos en Algebra y Trigonometría que completan y perfeccionan los estudios realizados por los árabes. Algunos autores sostienen que Viète (o Vièta), famoso matemático francés, es el primero en aplicar el Algebra a la Geometría, anticipándose de este modo a la Geometrtía analítica. Además, colabora con los matemáticos italianos efectuando investigaciones en el campo de la Geometría que permiten estructurar la Trigonometría.

La Epoca Cartesiana.

Podemos decir que, en el siglo, XVII, se manifiesta claramente la confianza en la <u>razon humana</u>, porque la ciencia se concibe como una construcción esencialmente humana, como una conquista gradual del hombre; y en esta "humanización de la ciencia" intervienen Galileo, Bacon y Descartes. "El ideal de Galileo, Descartes, etc. es el de unir íntima y definitivamente la concepción de la ciencia de la antigüedad con la del arte de la Edad Media, es decir, edificar un saber fundado sobre nuevas técnicas racionales, válidas ya no sólo en el campo de las ideas abstractas sino en el campo mucho más rico de las experiencias concretas" (GEYMONAT, 1954: 34).

Según esta concepción de la ciencia, ¿qué es lo que ocurre con la Matemática, con la ciencia perfecta de los griegos?

Desde el punto de vista histórico, la confienza en el valor cognoscitivo de la Matemática podía sostenerse en sus comienzos, sobre un postulado metafísico-religioso que poseía máxima eficacia práctica en tiempos de Galileo. Se trata del postulado según el cual Dios en el acto creador, impuso al universo un sistema de leyes concebidas matemáticamente (Cfr. GEYMONAT, 1954: ,37). Con los nuevos descubrimientos de la Geometría analitica y del Analisis infinitesimal surgen nuevos métodos que no poseen el rigor lógico de la Geometría de Euclides, pero que resultan muy útiles en la teorización de los fenómenos naturales.

De este modo, la Matemática va perdiendo poco a poco el carácter absoluto que le atribuyeron los griegos y comienza a utilizarse como auxiliar en el estudio de la naturaleza, buscando su propia justificación en la amplitud de las aplicaciones logradas. Estas nuevas ideas no son aceptadas por todos los matemáticos de la época, porque existen todavía muchos partidarios de la concepción clásica; pero lo interesante es que empieza a vislumbrarse un nuevo camino. Es por esto que:"...conviene considerar al siglo XVII en Occidente como un siglo Clásico en artes y en literatura, pero como el verdadero renacimiento de las matemáticas, iniciado en el dominio del pensamiento después del siglo XVI..." (LE LIONNAIS, 1948: 251).

- Descartes

Descartes es uno de los grandes representantes del siglo XVII porque realiza contribuciones valiosas en todas las ciencias y, en particular, en la Matemática. Según Ullmo (Ullmo, 1948: 357 "Lo que Descartes aporta de válido, de irremplazable, de definitivo, es el impulso del pensamiento, la confianza en la razon y el rechazo de la autoridad esterilizante, en el método propiamente dicho, es el doble ritmo complementario del análisis que resuelve la complejidad y de la síntesis que restituye la diversidad".

El método cartesiano establece que el conocimiento se efectúa por intuición directa y que el criterio de verdad es la evidencia (por ejemplo, los postulados y los axiomas son ciertos porque son evidentes por sí mismos), por consiguiente, la razón debe dirigirse de lo simple a lo complejo. Es, decir, la complejidad debe ser resuelta a partir del analisis para poder llegar a un sistema de elementos donde lo complejo se reduzca a algo simple -sintesis- y de este modo, la razón se eleve progresivamente hacia objetos cada vez más complicados. Este método constituye un procedimiento para demostrar una verdad ya encontrada, más que un procedimiento para descubrir una verdad.

Es interesante observar que los principios del método cartesiano se contraponen con el silogismo aristotélico. En el siglo XVII, la lógica formal se presenta, según los investigadores, como una carga de supuestos metafísicos, estéril para resolver nuevos problemas, sobre todo aquéllos dirigidos a aumentar el poderío del hombre sobre la naturaleza (véase nota 1).

El espíritu de síntesis, de sistema que Descartes manifiesta en toda su filosofía, también lo expresa en la Matemática cuando logra realizar (simultáneamente con Fermat, pero trabajando en forma independiente) una íntima vinculación,entre,el Algebra y la Geometría y de ella surge: la Geometria Analitica.

La característica esencial de la Geometría Analítica es traducir las propiedades de las figuras al lenguaje del Algebra. Es decir, las figuras, antes de pensarlas como susceptibles de ser medidas exactamente, son desintegradas en agrupaciones de puntos -análisis- y luego son reducidas a órdenes de puntos que se suceden unos a otros con sujeción a determinada regla -síntesis-. Esta regla (ecuación) establece una relación entre la posición de cada punto de la sucesión y su distancia respecto de los ejes coordenados, los cuales constituyen un sistema elegido arbitrariamente (Cfr. CASSIRER, 1965: 4622-465).

Resulta importante destacar que: "... para Descartes, el Algebra precede lógicamente a todas las otras ramas de las

Matemáticas y no está condicionada de ningún modo por la naturaleza de los problemas a los cuales se aplica. (...) El Algebra no es una ciencia, es un método que nos enseña a razonar en cantidades abstractas e indeterminadas, (...) es el método de la ciencia universal" (GERMAIN, 1948: 248).

Para Descartes, el método está ante todo, por lo tanto, no se preocupa por la belleza, la armonía y la pureza que exigieron los griegos en la construcción de la Matemática. De este modo, rompe clara y abiertamente con el ideal griego y con ello abre nuevas perspectivas a la Matemática del futuro. "Después del ideal de la ciencia contemplativa, viene el ideal de la ciencia constructiva" (GERMAIN, 1948: 248).

-Fermat

Este matemático, a diferencia de Descartes, se mantiene fiel a la tradición griega y continúa los estudios sobre cónicas realizados por Apolonio. Estos estudios le permiten vislumbrar -antes incluso que Descartes- el principio de la Geometría analítica: clasificar las curcvas planas según su grado. Es decir, considera que una ecuación de primer grado en el plano representa una recta, que una ecuación de segundo grado refiere a una cónica, etc. y a partir de allí deduce consecuencias relativas a lugares geométricos.

Es interesante señalar también que, aunque los griegos no habían comprendido el principio de la Geometría analítica (pues desconocían las leyes del Algebra), utilizaban frecuentemente las ordenadas con respecto a dos, o inclusive más, ejes del plano para estudiar figuras particulares, como las cónicas. Pero, mientras los ejes utilizados por los griegos estaban estrechamente relacionados con la figura en cuestión, el sistema de coordenadas que emplean Descartes y Fermat se fija en forma arbitraria, independientemente de la figura (Cfr. BOURBAKI, 1969: 177).

- La Geometría Analítica y el Cálculo Infinitesimal

Otro de los grandes acontecimientos de la época cartesiana es la invención del cálculo infinitesimal, realizada por Newton y Leibniz. Según Germain (GERMAIN, 1948: 249) es "el gran paso del infinito", iniciándose de este modo una larga serie de descubrimientos en Análisis, fruto de un trabajo matemático llevado a cabo sobre problemas de Mecánica y de Física (Véase nota 2).

Con el advenimiento del cálculo infinitesimal se rompe el equilibrio entre la intuición matemática y el rigor lógico, porque se produce un avance brusco de la intuición y la validez de las nuevas ideas no se puede justificar con rigor.

Si consideramos que la Geometría analítica fusiona el Algebra y la Geometría y que el cálculo infinitesimal determina el nacimiento del Análisis ¿Estos dos descubrimientos marcan dos épocas diferentes en el siglo XVII?

Este es un problema histórico, que continúa siendo objeto de muchas controversias. Algunos autores sostienen que con el Cálculo infinitesimal no se incorpora ninguna idea muy innovadora, capaz de justificar el surgimiento de una nueva época; sino que, por el contrario, los descubrimientos de la Geometría analítica y del Cálculo infinitesimal derivan del mismo espíritu de sistema, del mismo espíritu de síntesis que manifiesta Descartes, pero la Geometría realiza con combinaciones finitas aquéllo que el Análisis efectúa con combinaciones infinitas.

A este respecto, Germain (GERMAIN, 1948:250) dice:"... no creemos que esta síntesis infinitesimal proceda de un espíritu diferente al del Algebra cartesiana. Este nuevo cálculo no contiene ningún principio contrario a los establecidos por Descartes(...). Basta transcribir estas teorías nacientes -refiriéndose al cálculo diferencial y al problema de las tangentes- en términos finitos de derivadas para darse cuenta que el cálculo de derivadas no es más que una rama del Algebra y que el problema de las tangentes de las curvas planas no es más que el segundo capítulo de la Geometría cartesiana (...). Con los desarrollos en serie -haciendo mención a la serie de Taylor- registramos un nuevo capítulo del Análisis matemático, una ampliación del Algebra".

A partir de las características del siglo XVII presentadas en esta breve reseña, podemos observar que aparece, claramente, un enfoque unificador en la construcción de la Matemática, derivado del espíritu de síntesis Cartesiano. Según Trejo (TREJO, 1977: 439): "Este espíritu unificador, germen de la tendencia general de la Matemática moderna, tiene... su más alta expresión en la Geometría analítica de Descartes y Fermat".

El siglo XVIII

En este siglo continúa el auge de las Ciencias de la Naturaleza y los iluministas consideran que la tarea fundamental del hombre es el onocimiento de la naturaleza y su dominio efectivo. Por consiguiente, la confianza del científico en la razón es de tipo operativo, basada en los innumerables éxitos que el hombre ha logrado cada vez que ha sustituido un comportamiento dogmático por un comportamimento racional (Cfr. GEYMONAT, 1954: 42-43).

La concepción iluminista también se manifiesta en la Matemática, pues para los estudiosos de la época esta ciencia es el instrumento indispensable, mediante el cual se pueden descubrir los secretos de la naturaleza; por lo tanto, ellos se ocupan solamente de aquellas ramas de la Matemática que poseen aplicación práctica.

De acuerdo con esta tendencia, los matemáticos son astrónomos (Laplace, Gauss, etc.) o físicos Lagrange, Fourier, D'Alembert, etc.) y sólo accidentalmente matemáticos; entonces no se preocupan por la perfección lógica en la construcción de sus teorías, sino que sólo les interesa la "eficacia" de las mismas en sus aplicaciones. De este modo, se produce una declinación del método axiomático, pues las exposiciones deductivas carecen de rigor lógico y la intuición alcanza un "status matemático": se rompe el acuerdo perfecto entre intuición y rigor lógico. Según Bourbaki (BOURBAKI, 1969: 35), la noción de demostración parece disiparse cada vez más a lo largo del siglo y esto ocurre cuando, paradójicamente, se proclama con más fuerza la "verdad absoluta" de la Matemática.

Debido a las características de este siglo, la Matemática adquiere un desarrollo asombroso y el perfeccionamiento de los medios de cálculo constituye un problema fundamental. Es así como surgen teorías que sobrepasan netamente las concepciones del Algebra elemental, pero que proceden del espíritu cartesiano: la teoría de los determinantes, el cálculo de matrices y el cálculo vectorial facilitan las operaciones en la Geometría analítica (Cfr. GERMAIN, 1948: 252).

Como la Mecánica adquiere gran importancia en este período, los matemáticcos realizan un estudio general de los desplazamientos. "A las dos nociones de la teoría de los desplazamientos que aparecen en los griegos -la de movimiento y la de "simetría" de una figura- viene a sumarse una tercera en los siglos XVII y XVIII con el problema de cambios de ejes rectangulares que es sustancialmente equivalente a esta teoría. Euler consagra varios trabajos a este tema, preocupándose sobre todo por obtener representaciones paramétricas manejables para las fórmulas de cambios de ejes" (BOURBAKI, 1961: 180). Más específicamente, Euler establece el carácter lineal de las fórmulas de transformación de coordenadas y fundamenta sobre él la clasificación de las curvas planas y de las superficies según su grado (el mismo resulta invariante debido a la linealidad de las fórmulas). De este modo, Euler logra sistematizar la <u>Geometria</u> <u>analitica</u> plana y espacial.

Por otra parte, Lagrange consagra toda una memoria, célebre durante mucho tiempo, a problemas típicamente lineales y multilineales de la Geometría analítica del espacio.

La <u>Geometria</u> <u>proyectiva</u> de dos y tres dimensiones habia sido creada por Desargues en el siglo XVII. Pero estas ideas habían caído en el olvido, eclipsadas por los constantes progresos de la Geometría analítica, y recién a fines del siglo XVIII vuelven a resurgir con Monge. El objeto de la Geometría proyectiva es hallar y estudiar las propiedades geométricas invariantes respecto de las proyecciones.

Desargues, interesado por los esfuerzos de los pintores del Renacimiento que deseaban entender la perspectiva, había efectuado un profundo estudio de las cónicas: elipse, parábola e hipérbola. Había identificado las propiedades invariantes por la proyección de una circunferencia y de esta manera, reducía las propiedades de las cónicas a las de la circunferencia, mediante una proyección. En los razonamientos de Desargues surge por primera vez la importante proposición que concibe a las paralelas como un sistema de rectas concurrentes, cuyo punto de intersección se encuentra en el infinito (Cfr. PAPP, 1975: 121-122).

Durante todo este período, los matemáticos han estado preocupados por acumular nuevos resultados y por construir nuevas teorías y no han tomado en cuenta la legitimidad de los métodos utilizados, ni la certeza de los resultados obtenidos. Es por esto que, a pesar de los numerosos trabajos realizados, los matemáticos de fines del siglo XVIII creen encontrar obstruido el camino a seguir. "Los sabios sienten que es necesario hallar otra cosa, estudiar conceptos nuevos, emplear procedimientos nuevos. La aparición de elementos nuevos va a señalar justamente el comienzo de la"epoca moderna" (siglo XIX) (GERMAIN, 1948: 252).

NOTAS

(1) El método cartesiano se encuentra desarrollado con más detalles en: BRUNSCHVICG, 1948: 562-564; GEYMONAT, 1954: 41-42; GEYMONAT, 1979-81: 133-136; PAPP, 1975: 110-114; ULLMO, 1948: 357-358.

(2) Una reseña sobre la evolución del cálculo infinitesimal se puede hallar en: BOURBAKI, 1969: 228-274; BRUNET, 1948: 258-269; PAPP, 1975: 123-137; TORANZOS, 1949: 19-20.

Referencias bibliográficas

BOURBAKI, Nicolás
1969. Elements d'histoire des mathematiques (París: Hermann).
Elementos de historia de las matemáticas, traducido por Jesús Hernández (Madrid: Alianza, 1976, 2da. ed.).

BRUNET, Pierre
1948. Ojeadas sobre el pensamiento matemático de Newton. Recopilado por Le Lionnais, Francois, Les grands courants de la pensee mathematique (París: Cahiers du Sud). Las grandes corrientes del pensamiento matemático, traducido por Néstor Míguez (Buenos Aires: Eudeba, 1976, 3ra. ed.).

BRUNSCHVICG, León
1948. Doble aspecto de la filosofía matemática. Recopilado por Le Lionnais, Francois, op. cit.

CASSIRER, Ernest
1965. El problema del conocimiento (México: Fondo de Cultura Económica, tom. I, 2a. ed. en español).

GERMAIN, Paul
1948., Las grandes líneas de la evolución de las Matematicas. Recopilado por Le Lionnais, Francois, op. cit.

GEYMONAT, Ludovico
1954. Il pensiero scientifico (Milán: Aldo Garzanti). El pensamiento cientifico, traducido por José Babini (Buenos Aires: Eudeba, 1972, 6a. ed.).

GEYMONAT, Ludovico
1979-81. Storia della filosofia - Storia del pensiero filosofico (Milán: Ludovico Geymonat y Garzanti, Vol. II). Historia de la filosofia y de la ciencia, traducido por Juana Bignozzi (Barcelona: Crítica, 1985, vol. II).

LE LIONNAIS, Francois
1948. Les grands courants de la pensee mathematique (París: Cahiers du Sud). Las grandes corrientes del pensamiento matematico, traducido por Néstor Míguez (Buenos Aires: Eudeba, 1976, 3a. ed.)

MALISANI, Elsa
1989. La Geometría griega. Rev. de Educación Matemática, 4 (2) (En prensa)

PAPP, Desiderio
1975. Ideas revolucionarias en la ciencia (Chile: Edit. Universitaria, tom. I).

TORANZOS, Fausto ,
1949., Introducción a la Epistemología y Fundamentación matematica (Buenos Aires: Espasa).

TREJO, César ,
1977. Matematica elemental moderna, Estructura y método (Buenos Aires: Eudeba, 4a. ed.).

ULLMO, Jean ,
1948., La posición moderna del debate: Espíritu geométrico y espiritu de fineza. Recopilado por Le Lionnais, Francois, op. cit.