NUMEROS COMPLEJOS Y TRANSFORMACIONES GEOMETRICAS PLANAS ELEMENTALES[1]

Felix E. Herrera

La aplicación de los números complejos en la Matemática del ciclo secundario se agota, de hecho, con la solución general de la ecuación de 2do. grado en una incógnita. Es de lamentar que esto ocurra porque ellos podrían aplicarse con provecho, por ejemplo, en el estudio de un tema tan importante como el de las transformaciones geométricas planas.

Propósito de esta colaboración es mostrar de qué modo podría llevarse a cabo tal aplicacción a nivel de 4to. año de la escuela media.

Ello es factible porque el único conocimiento "*extra*" que se requiere es el de los teoremas de adición de las funciones trigonométricas seno y coseno, conocimiento logrado sólo en 5to. año.

La resistencia de parte de algunos docentes a pedir "*actos de fe*" a sus alumnos respecto de la validez de teoremas no demostrados, puede obviarse en este caso mediante una demostración "ad-hoc", cosa fácil de hacer.

1. Introducción

En lo que seguirá supondremos conocidas:

A) Toda la técnica operatoria elemental con números

[1] El lector puede hallar material vinculado con el de esta nota en REM No 1 Vol. 3 año 1987 (J. Boggino, R. Miatello, Geometría hiperbólica I) y REM No 1 Vol. 2 año 1983 (E. Gentile, Números Complejos)

complejos, en particular, la propiedad distributiva de la operación de conjugación respecto de la suma, producto y cociente.

B) Las correspondencias biyectivas existentes entre el conjunto $\mathbb{C}$ de los números complejos y el conjunto $\mathbb{R}^2$ de los puntos de un plano coordenado, por una parte, y entre $\mathbb{C}$ y el conjunto de los vectores libres del plano, por otra.

En virtud de tales correspondencias, las expresiones: "*número complejo z*", "*punto z del plano*" y "*vector z*", se considerarán expresiones sinónimas o equivalentes.

Con referencia a la forma trigonométrica:

$$z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$$

utilizaremos en ella el símbolo global, no descomponible en partes:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta \qquad (1)$$

Así en particular, será:

$$e^{io} = 1;\ e^{2i\pi} = 1;\ e^{\pm i\pi} = -1;\ e^{i\pi/2} = i, \ldots \qquad (2)$$

La notación simbólica (1) tiene la ventaja de que aceptando (o demostrando) la validez de las fórmulas

$$\cos(\theta_1 + \theta_2) = \cos\theta_1 \cos\theta_2 - \operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2$$

$$\operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2) = \operatorname{sen}\theta_1 \cos\theta_2 + \cos\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2$$

resulta de inmediato que:

$$e^{i\theta_1} \cdot e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1+\theta_2)} \qquad (3)$$

y por inducción, la obvia generalización a cualquier número finito de factores.

Finalmente, vale la pena observar que siendo $\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1$, el complejo $e^{i\theta}$ es siempre "*unimodular*".

2. Transformaciones puntuales del plano en general

Una transformación puntual del plano en sí mismo es cualquier "*funciòn o aplicacioh*" f, con dominio en el conjunto $\mathbb{R}^2$ de los puntos z del plano y con "*valores*" en este mismo conjunto. Si f asigna al punto z el punto z', es decir, si z' = f(z), z', se dice el "*transformado o punto imagen*" de z, y éste, el "*punto modelo o preimagen*" de z'. Esta terminología se extenderá a conjuntos de puntos en el plano, por ejemplo, al conjunto de los puntos de una recta.

Si un cierto punto z tiene la propiedad de ser transformado de sí mismo, es decir, si f(z) = z, diremos que z es un punto "*fijo o unido*" de la transformación.

Introduciendo en el plano un cierto sistema cartesiano ortogonal, las coordenadas (x',y') del punto imagen z' se expresarán en términos de las coordenadas (x,y) del punto modelo z mediante un sistema de dos ecuaciones $x' = F(x,y)$, $y' = G(x,y)$, donde F y G designan dos funciones conocidas de las coordenadas del punto z.

Las transformaciones más sencillas son las que se representan por dos ecuaciones del tipo:

$$(1) \qquad x' = ax + by + c; \; y' = dx + ey + f$$

donde a,b,c,,..., f, designan constantes reales arbitrarias tales que $\Delta = ae - bd \neq 0$. Como lo veremos más adelante, esta condición se impone para que la transformación (1) sea biyectiva.

Las transformaciones (1) con $\Delta \neq 0$ se denominan habitualmente "*afinidades*" o "*transformaciones afines*"

3. Forma compleja de una afinidad

Multiplicando la segunda de las ecuaciones (1) de la sección precedente por i y sumándola con la primera, obtenemos:

$$x' + iy' = (a + id)x + (b + i\,e)\,y + (c + if).$$

Teniendo en cuenta que

$x = (z + \bar{z})/2$, $y = (z-\bar{z})/2i = -\,i\,(z-\bar{z})/2$, con

$z' = x' + i\,y'$, resulta:

$z' = (a + id)(z + \bar{z})/2 - (b + i\,e)\,i\,(z - \bar{z})/2 + (c + if)$

o bien:

$$z' = \frac{1}{2}\,[(a+e) + i(d-b)]z + \frac{1}{2}\,[(a-e) + i(d+b)]\bar{z} + (c+if)$$

Poniendo finalmente:

(1) $\alpha = \frac{1}{2}[(a+e) + i(d-b)]$; $\beta = \frac{1}{2}[(a-e) + i(d+b)]$; $\gamma = c + if$,

la igualdad precedente adopta la forma:

$$(2) \qquad z' = \alpha z + \beta\bar{z} + \gamma$$

que constituye la "*forma compleja*" de una afinidad.

La igualdad (2) expresa z' en términos de z. Recíprocamente, para expresar z en función de z', empecemos por aplicar la operación de conjugación a ambos miembros de la (2). Obtenemos:

$$\bar{z}' = \bar{\alpha}\,\bar{z} + \bar{\beta}z + \bar{\gamma}$$

Multiplicando esta igualdad por $-\beta$, (2) por $\bar{\alpha}$ y sumando los resultados obtenidos, logramos la igualdad:

o bien, puesto que $\alpha \neq 0$ implica $\bar{\alpha} \neq 0$:

$$(8) \qquad \frac{w}{\bar{w}} = \frac{\beta}{\bar{\alpha}}$$

El 2do. miembro de esta ecuación es un complejo unimodular, pues, de la condición $H = 0$ se sigue que $|\alpha|^2=|\beta|^2$, esto es, $|\alpha| = |\beta|$. Consecuentemente, llamando $e^{i\delta}$ a dicho complejo constante, (8) se escribe, con $\beta = \bar{\alpha}e^{i\delta}$:

$$w = \bar{w}e^{i\delta}$$

Tomando los argumentos de ambos miembros, resulta:

$$\arg w = \arg \bar{w} + \delta = - \arg w + \delta$$

vale decir: $$\arg w = \frac{1}{2}\,\delta.$$

Teniendo en cuenta que un complejo de argumento constante $\frac{1}{2}\,\delta$ es necesariamente de la forma $w = t\, e^{i\delta/2}$, con t variable real tal que $-\infty < t < \infty$, concluimos que los puntos w que satisfacen (7) son los puntos de una recta que pasa por el origen. Como consecuencia, (6) representa la paralela a dicha recta que pasa por el punto $z' = \gamma$.

Hemos probado así que cuando $H = 0$ pero $\alpha \neq 0$, la imagen del plano por la transformación (2) degenera en una recta. La correspondencia deja de ser biyectiva.

Una situación aún más "*patológica*" se origina cuando $H = 0$ y $\alpha = 0$.

En tal caso es también $\beta = 0$, y (2) nos dice que la imagen del plano es un único punto, a saber: el punto $z' = \gamma$.

4. Propiedades fundamentales de las afinidades.

Las propiedades más importantes de una afinidad son:

i) Las afinidades transforman rectas del plano en rectas.

En efecto, una recta cualquiera del plano tiene una ecuación de la forma:

$$(1) \qquad z = z_o + z_1 t,$$

con $z_1 \neq 0$ y t parámetro real variable en el intervalo $-\infty<t<\infty$.

Reemplazando (1) en la ecuación $z' = \alpha z + \beta\bar{z} + \gamma$, (ver (2) sección 3) resulta:

$$z' = \alpha(z_o + z_1 t) + \beta(\bar{z}_o + \bar{z}_1 t) + \gamma$$

o:

$$(2) \qquad z' = (\alpha z_o + \beta\bar{z}_o + \gamma) + (\alpha z_1 + \beta\bar{z}_1)t = w_o + w_1 t$$

Con $w_o = \alpha z_o + \beta\bar{z}_o + \gamma$ y $w_1 = \alpha z_1 + \beta\bar{z}_1$. La (2) representa una recta porque $w_1 \neq 0$, pues, si fuese $\alpha z_1 + \beta\bar{z}_1 = 0$, valdría la igualdad $\alpha z_1 = -\beta\bar{z}_1$, es decir, sería $|\alpha||z_1| = |\beta||\bar{z}_1|$, y como $|z_1| = |\bar{z}_1| \neq 0$, tendríamos que $|\alpha|^2 = |\beta|^2$, ó H = 0, en contra de la hipótesis.

ii) Las afinidades preservan la razón simple de tres puntos alineados.

La razón simple de tres puntos diferentes y alineados z_1, z_2 y z_3, es, por definición el cociente:

$$(3) \qquad (z_1 z_2 z_3) = \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}$$

Ahora bien, como según la propiedad i), los correspondientes puntos imágenes z', z' y z'se encuentran también alineados, tiene sentido considerar su razón simple $(z'z'z')$. Tendremos por lo tanto:

$$(z'z'z') = \frac{z'_3 - z'_1}{z'_3 - z'_2} = \frac{\alpha(z_3 - z_1) + \beta(\bar{z}_3 - \bar{z}_1)}{\alpha(z_3 - z_2) + \beta(\bar{z}_3 - \bar{z}_2)}$$

$$= \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} \cdot \frac{\alpha + \beta[(\bar{z}_3 - \bar{z}_1):(z_3 - z_1)]}{\alpha + \beta[(\bar{z}_3 - \bar{z}_2):(z_3 - z_2)]}$$

Observando ahora que para un par cualquiera de puntos diferentes z_o, z de una misma recta, el cociente $(\bar{z} - \bar{z}_o):(z - z_o)$, con $z - z_o = re^{i\delta}$, toma el valor constante $e^{-2i\delta}$, la 2da. fracción de la última igualdad vale 1, y consecuentemente:

$$(z'\ z'\ z') = (z_1 z_2 z_3)$$

iii) <u>Las afinidades preservan el paralelismo.</u>

Sean a y b dos rectas paralelas, a' y b' sus correspondientes rectas imágenes. Si a' y b' fuesen secantes, su punto de intersección z' procedería de un cierto punto z que debe pertenecer tanto a la recta a como a la recta b, las cuales no serían entonces paralelas.

Las afinidades no preservan, en general, los ángulos. Así por ej. la afinidad:

$$z' = (1 - \frac{1}{2} i)\ z + \frac{1}{2} i\bar{z}$$

transforma las rectas $z = t$ y $z = it$ que forman un ángulo de 90^o, en las rectas $z' = t$ y $z' = (1 + it)$, que forman un ángulo de 45^o.

5. **Afinidades particulares. Semejanzas y congruencias**

La transformación del plano en sí mismo definida por la ecuación $z' = f(z) = \alpha z + \beta\bar{z} + \gamma$ se dice una "*semejanza*", si para cualquier par de puntos z_1 y z_2, éstos, y sus transformados, satisfacen la ecuación:

$$(1) \qquad |z' - z'| = k\,|z_1 - z_2|$$

En esta ecuación k denota una constante real positiva que se denomina "*razón de semejanza*". En particular, si $k = 1$, la transformación se dice una "*congruencia*".

Las semejanzas, llamadas también "*similitudes*", constituyen las transformaciones geométricas planas más simples y las de mayor interés en la escuela secundaria.

Vale la pena por eso averiguar bajo qué condiciones una afinidad representa una semejanza.

Con tal propósito observemos que si z_1 y z_2 son dos puntos diferentes arbitrarios del plano y si $z_1 - z_2 = re^{i\delta}$, entonces

$$\frac{\bar{z}_1 - \bar{z}_2}{z_1 - z_2} = e^{-2i\delta}$$

Dada la afinidad $z' = \alpha z + \beta\bar{z} + \gamma$,

$$z' - z' = \alpha(z_1 - z_2) + \beta(\bar{z}_1 - \bar{z}_2) = (z_1 - z_2)\,[\alpha + \beta(\bar{z}_1 - \bar{z}_2):(z_1 - z_2)]$$

vale decir:

$$\rho = \frac{z'_1 - z'_2}{z_1 - z_2} = \alpha + \beta e^{-2i\delta}$$

La afinidad dada representará una semejanza de razón

$k > 0$, si y sólo si:

(2) $$|\rho| = |\alpha + \beta e^{-2i\delta}| = k.$$

Se ve de inmediato que son condiciones suficientes para que se satisfaga esta igualdad que:

i) $|\alpha| = k;\ \beta = 0$ ó ii) $\alpha = 0;\ |\beta| = k$.

Probaremos a continuación que estas condiciones son también necesarias. Tenemos en efecto:

$$|\rho|^2 = (\alpha + \beta e^{-2i\delta})(\bar{\alpha} + \bar{\beta} e^{2i\delta})$$
$$= |\alpha|^2 + |\beta|^2 + (\alpha\bar{\beta} e^{2i\delta} + \bar{\alpha}\beta e^{-2i\delta})$$

Para que se cumpla (2) debe ser,

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 + (\alpha\bar{\beta} e^{2i\delta} + \bar{\alpha}\beta e^{-2i\delta}) = k^2,$$

cualquiera sea el argumento del complejo $z_1 - z_2$.

Tomando sucesivamente los ángulos $\delta = 0;\ \frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{4}$ y recordando las igualdades (2) de la sección 1, resultan para α y β las condiciones:

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 + (\alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta) = k^2$$

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 - (\alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta) = k^2$$

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 + 2(\alpha\bar{\beta} - \bar{\alpha}\beta) = k^2$$

De las dos primeras se sigue que:

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = k^2;\quad \alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta = 0$$

y de la tercera:

$$\alpha\bar{\beta} - \bar{\alpha}\beta = 0$$

Finalmente, de ésta y de la $2^{da.}$ de las precedentes, inferimos:

$$\alpha\bar{\beta} = 0.$$

Esta condición, asociada con la 1ra. nos da como alternativas únicas las dos siguientes: $|\alpha| = k$, $\beta = 0$ ó $\alpha = 0$, $|\beta| = k$. Arribamos así a la importante conclusión que enunciamos a continuación:

Una afinidad representa una semejanza de razón k si y sólo si sus coeficientes son tales que:

i) $|\alpha| = k$, $\beta = 0$ ó ii) $\alpha = 0$, $|\beta| = k$.

En otras palabras, cualquier semejanza de razón k tiene necesariamente una y sólo una de las dos formas siguientes:

i) $f(z) = \alpha z + \gamma$; con $|\alpha| = k$;

ó ii) $g(z) = \beta\bar{z} + \gamma$; con $|\beta| = k$.

6. Casos particulares de semejanzas

A) Semejanzas directas. Son las que tienen la forma $f(z) = \alpha z + \gamma$. Se llaman así porque conservan, en valor y signo, el ángulo de dos rectas.

Para probarlo, sean a y b dos rectas no paralelas, a′ y b′ las correspondientes rectas imágenes, z_o el punto de intersección de a′ y b′ y z′ su correspondiente punto imagen, obviamente intersección de a y b. Sean además, $z_1 \neq z_o$ un punto cualquiera de a y $z_2 \neq z_o$ un punto cualquiera de b.

Si z' y z' son los correspondientes puntos imágenes, por ser $z' - z' = \alpha(z - z_o)$; tenemos:

$$\arg\,(z' - z') = \arg\,\alpha + \arg\,(z_1 - z_o)$$

$$\arg\,(z' - z') = \arg\,\alpha + \arg\,(z_2 - z_o)$$

Por lo tanto:

$$\arg\,(z' - z') - \arg\,(z' - z') =$$

$$= \arg\,(z_1 - z_o) - \arg\,(z_2 - z_o).$$

Si a y b son paralelas, el resultado se sigue de la propiedad general de la afinidad de conservar el paralelismo.

Las semejanzas directas, salvo en dos casos particulares que pronto indicaremos, poseen siempre un único punto fijo que se denomina el "*centro*" de la transformación. En efecto, si z_o es un punto fijo de $f(z) = \alpha z + \gamma$, debe ser $\alpha z_o + \gamma = z_o$, de donde, bajo la hipótesis $\alpha \neq 1$, se sigue que:

(1) $$z_o = \frac{\gamma}{1 - \alpha}.$$

En este caso, restando miembro a miembro las igualdades $z' = \alpha z + \gamma$; $z_o = \alpha z_o + \gamma$, la transformación puede escribirse en la forma:

(2) $$z' - z_o = \alpha(z - z_o)$$

que pone en evidencia el carácter de punto fijo de z.

En el caso excluído $\alpha = 1$, la semejanza directa toma la forma:

(3) $$z' = z + \gamma,$$

que en el supuesto que $\gamma \neq 0$ representa una sencilla transformación llamada "*traslación*" de "*parámetro*" o "*vector*" γ. Bajo el efecto de una tal transformación, la imagen z' de cualquier punto z se obtiene por un "*deslizamiento*" del plano sobre sí mismo como si fuera un todo rígido.

Es obvio que siendo $\gamma \neq 0$, una traslación no puede tener puntos fijos. Si en cambio es $\gamma = 0$, tenemos la llamada transformación "*identidad*" para la cual cada punto del plano es punto fijo.

Volviendo a las semejanzas con centro, son importantes:

A_1) Las rotaciones que se obtienen cuando $\alpha = e^{i\varphi}$, esto es cuando α es un complejo unimodular. Utilizando (2), una rotación puede representarse así:

$$z' - z_o = e^{i\varphi}(z - z_o) \tag{4}$$

De (4) se ve que $|z' - z_o| = |z - z_o|$, y además, que $\arg(z' - z_o) = \varphi + \arg(z - z_o)$ Por lo tanto, en una rotación de centro z_o, los puntos correspondientes z y z', equidistan del centro y el ángulo polar del vector que une el punto imagen z' con el centro, se obtiene sumando al ángulo polar del vector que une el punto modelo z con el centro, un ángulo de giro fijo φ.

Las rotaciones y traslaciones son claramente "*congruencias*". Un caso especial de rotación se logra cuando $\varphi = \pi$. En tal caso, siendo $e^{i\pi} = -1$, (2) toma la forma:

$$z' - z_o = -(z - z_o) \tag{5}$$

que nos dice que el vector $z' - z_o$ es el opuesto del vector $z - z_o$. Por consiguiente, puntos correspondientes z y z' se encuentran siempre alineados con el centro, el cual, de acuerdo con (1), es el punto $z_o = \frac{1}{2}\gamma$.

La rotación especial dada por (5) se denomina "*simetría central de centro z_o*".

A_2) <u>Las homotecias</u>: son las semejanzas directas que resultan cuando $\alpha = \pm k$, donde k denota la razón de semejanza que suponemos $\neq 1$.

Utilizando (2), las homotecias se representan en la forma:

$$(6) \qquad z' - z_o = \pm k\,(z - z_o).$$

De acuerdo con esta igualdad, el vector $z' - z_o$ es para todo z, un múltiplo constante del vector $z - z_o$ por lo cual dos puntos correspondientes z y z' se encuentran siempre alineados con el centro, de un mismo lado respecto de éste o de lados opuestos según que en (6) el signo sea + o -, respectivamente. En la 1ra. alternativa es costumbre hablar de una homotecia "*directa*" y en la 2da. de una homotecia "*inversa*" aunque corresponde aclarar que, respecto de estas denominaciones, nos encontramos en presencia de homonimias, pues, aun una homotecia "*inversa*" sigue siendo una semejanza "*directa*" en el sentido de la definición dada inicialmente.

La palabra de origen griego "*homotecia*", alude al hecho que dos figuras F y F' tales que F' sea la imagen homotética de F, "*están similarmente dispuestas respecto del centro*".

Las semejanzas centrales tienen la propiedad de que el "*haz de rectas de centro z_o*", es decir, el conjunto de todas las rectas que pasan por z_o, se transforma globalmente en sí mismo. En efecto, una recta cualquiera que pasa por z_o tiene una ecuación de la forma $z = z_o + at$, donde a denota un complejo no nulo y t un parámetro variable en $\mathbb{R}$. Reemplazando esta ecuación en (2), resulta la ecuación $z' = z_o + \alpha$ at, la cual, por ser α a $\neq 0$, representa una recta del haz.

B) <u>Semejanzas inversas</u>. Son las que poseen la forma $z' = \beta\bar{z} + \gamma$. Se denominan así porque aunque conservan el valor absoluto de los ángulos, invierten su signo. En efecto, con las mismas denominaciones y supuestos de la parte pertinente en A), tenemos:

$$\arg(z' - z') = \arg\beta + \arg(\bar{z}_1 - \bar{z}_o) = \arg\beta - \arg(z_1 - z_o)$$

$$\arg(z' - z') = \arg\beta - \arg(z_2 - z_o)$$

Por lo tanto:

$$\arg(z' - z') - \arg(z' - z') =$$

$$- [\arg(z_1 - z_o) - \arg(z_2 - z_o)].$$

Las semejanzas inversas más interesantes, por lo menos desde un punto de vista elemental, son:

B_1) <u>Las simetrías axiales</u>, llamadas también "*reflexiones sobre una recta*". Se obtienen de la ecuación general de una semejanza inversa cuando β es un complejo unimodular $e^{i\varphi}$ y la constante compleja γ, tiene, una forma particular. Una simetría axial, que evidentemente es una *congruencia*, tendrá pues la forma:

(7) $$z' = e^{i\varphi}\,\bar{z} + \gamma.$$

Para mayor comodidad en el estudio de esta transformación, la escribimos, recordando que $e^{-i\pi} = -1$, en la forma:

$$(3) \qquad \bar{\alpha}z' - \beta\bar{z}' = (|\alpha|^2 - |\beta|^2)z + (\bar{\alpha}\gamma - \beta\bar{\gamma})$$

de la cual, bajo la hipótesis de que sea

$$(4) \qquad H = |\alpha|^2 - |\beta|^2 \neq 0,$$

se sigue que:

$$z = \frac{\bar{\alpha}}{H} z' - \frac{\beta}{H} \bar{z}' - \frac{1}{H} (\bar{\alpha}\gamma - \beta\bar{\gamma})$$

Poniendo $\alpha' = \frac{\bar{\alpha}}{H}$; $\beta' = \frac{-\beta}{H}$, $\gamma' = \frac{-1}{H} (\bar{\alpha}\gamma - \beta\bar{\gamma})$, la igualdad que precede se escribe

$$(5) \qquad z = \alpha' z' + \beta' \bar{z}' + \gamma'$$

es decir, en la misma forma que (2).

La condición $H \neq 0$ asegura, que cada punto imagen z' proceda de un único punto modelo z, vale decir que la correspondencia (2) sea biyectiva.

De acuerdo con (1) de la sección (2) y con la definición (4) de H, un sencillo cálculo prueba que $\Delta = H$. Queda así justificada la observación hecha respecto de Δ al final de la sección precedente.

Puesta en evidencia la significación de la no anulación de H, vale la pena averiguar qué ocurre cuando $H = 0$. En tal supuesto, (2) sigue determinando de modo unívoco el punto imagen z' como función de z, pero según (3), todos los puntos imágenes z' satisfacen la ecuación:

$$(6) \qquad \bar{\alpha}z' - \beta\bar{z}' = \bar{\alpha}\gamma - \beta\bar{\gamma}$$

Probaremos que bajo la hipótesis adicional $\alpha \neq 0$, (6) representa una recta. Por de pronto, se ve que el punto $z' = \gamma$ satisface la ecuación. Luego, haciendo el cambio de variable $z' = w + \gamma$, (6) toma la forma:

$$(7) \qquad \bar{\alpha}w - \beta\bar{w} = 0$$

$$z' = -e^{i(\varphi-\pi)}\bar{z} + \gamma.$$

Definiendo el ángulo λ mediante la igualdad $\lambda = \varphi - \frac{\pi}{2}$, (7) adopta en definitiva la forma

(8) $$z' = -e^{2i\lambda}\bar{z} + \gamma$$

Averigüemos si (8) tiene puntos fijos. Planteamos la ecuación

$$z = -e^{2i\lambda}\bar{z} + \gamma, \quad \text{ó:}$$

(9) $$ze^{-i\lambda} + \bar{z}e^{i\lambda} = \gamma e^{-i\lambda}.$$

El primer miembro de (9) es un número real, es suma de un complejo y su conjugado. Por lo tanto, la ecuación tendrá soluciones si y sólo si la constante compleja γ es tal que el producto $\gamma e^{-i\lambda}$ es un número real. Poniendo $\gamma e^{-i\lambda} = 2p$, con p real, (9) se escribe:

(10) $$ze^{-i\lambda} + \bar{z}e^{i\lambda} = 2p.$$

En (10) podemos, sin pérdida de generalidad, suponer $p \geq 0$, pues, si fuese $p < 0$, escribiendo $p_1 = -p$, con $p_1 > 0$, la ecuación podría escribirse:

$$ze^{-i(\lambda+\pi)} + \bar{z}e^{i(\lambda+\pi)} = 2p_1.$$

que sólo se diferencia de (10) por el reemplazo de λ por $\lambda + \pi$.

(10) representa una recta porque siendo el primer miembro real y de primer grado en z y $\bar{z}$, y éstas, a su vez, de primer grado en x e y, (10) en definitiva es una ecuación de 1er. grado en las variables x e y. Más precisamente, la

recta pasa por el punto $z = pe^{i\lambda}$ y es normal al vector de posición de z_o. En efecto, es inmediato que z_o satisface la ecuación. Por otra parte, como el vector

$$z_1 = e^{i(\lambda+\frac{\pi}{2})} = ie^{i\lambda}$$

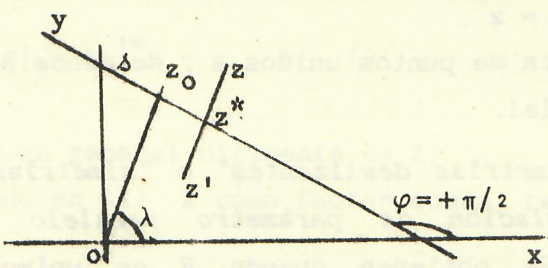
es perpendicular al vector z_0, la recta Δ precedentemente aludida tendrá la ecuación:

$$(11) \qquad z = z_o + ie^{i\lambda}t, \text{ con } t \in \mathbb{R}.$$

Formando la ecuación conjugada $\bar{z} = \bar{z}_o - ie^{-i\lambda}t$, multiplicándola por $e^{i\lambda}$ y sumándola con (10) previamente multiplicada por $e^{-i\lambda}$, obtenemos (10), lo que prueba la coincidencia de ésta con (11).

La transformación tiene pues una recta Δ de puntos fijos. Observando que $|z_o - 0| = |z_o| = p$, el parámetro p no sólo representa la distancia del punto z_o al origen, sino, adicionalmente, la distancia de z_o a la recta Δ, porque el vector z_o es perpendicular a Δ. Por otra parte, si $z_o \neq 0$, de la definición de z_o se sigue que λ es el ángulo polar del vector z_o.

(10) es por lo tanto la "*forma normal*" compleja de la recta Δ de puntos fijos de la transformación.



Veamos ahora cuáles son las características principales de la transformación en estudio. Ella es "*involutoria*", esto es, si z' es la imagen de z, recíprocamente es z la imagen de z'. En efecto sea z" la imagen de z'. Según (8) con $\gamma = 2pe^{i\lambda}$, será:

$$z'e^{-i\lambda} + \bar{z}e^{i\lambda} = 2p; \qquad z''e^{-i\lambda} + \bar{z}'e^{i\lambda} = 2p.$$

Tomando conjugados en ambos miembros de la $1^{ra.}$ igualdad y restando del resultado obtenido la segunda, resulta $(z'- z'')e^{-i\lambda} = 0$, y como para todo λ es $e^{-i\lambda} \neq 0$, se concluye que $z'' = z$.

Vale la pena destacar que las rectas perpendiculares a la recta Δ se transforman globalmente en ellas mismas. Pues, si z^* denota un punto cualquiera de Δ, la perpendicular por z^* a Δ tiene por ecuación:

$$(12) \qquad z = z^* + e^{i\lambda}t: \quad t \in \mathbb{R}.$$

Reemplazando en (8) y teniendo en cuenta que por ser z^* punto fijo es $z^* = - \bar{z}^* e^{2i\lambda} + \gamma$, obtenemos:

$$z' = z^* - e^{i\lambda} t$$

ecuación que nos dice que el correspondiente z' de z es un punto de la recta (12). Se observa además que $z' - z^* = - (z - z^*)$, es decir, z y z' equidistan de Δ y están situados de lados opuestos respecto de Δ, salvo en el caso que sea $z = z^*$.

La recta de puntos unidos Δ, se denomina el "*eje*" de la simetría axial.

B_2) Las "*simetrías deslizantes*" o "*simetrías compuestas con una traslación de parámetro paralelo al eje de simetría*". Se obtienen cuando β es unimodular y la constante compleja γ es, tal que $\gamma e^{-i\lambda} = 2p + ih$, con $h \neq 0$. Será pues $\gamma = (2p + ih)e^{i\lambda}$. Reemplazando este valor de γ en (8), obtenemos:

(13) $z' = (-e^{2i\lambda}\bar{z} + 2pe^{i\lambda}) + ihe^{i\lambda}.$

Con las substituciones:

(14) $w = -e^{2i\lambda}\bar{z} + 2pe^{i\lambda}$; (15) $z' = w + ihe^{i\lambda}$,

resulta (13) la composición de las transformaciones (14) y (15). La primera representa una simetría axial, y la segunda, una traslación paralela al eje de dicha simetría. Por efecto de esta traslación paralela al eje, una simetría deslizante carece de puntos fijos.

Con las traslaciones, las rotaciones, las simètrias axiales y las simetrias deslizantes, se agotan todas las congruencias posibles del plano.

7. El caso mas general de semejanza.

Sobre la base de los resultados de las secciones anteriores, estamos en condiciones de probar que:

La semejanza mas general es la composiciòn de una congruencia y de una homotecia.

En efecto, poniendo según el caso, $\alpha = ke^{i\varphi}$ ó $\beta = ke^{i\varphi}$, de acuerdo con el resultado final de la sección 5, cualquier semejanza de razón k, será de la forma:

(1) $z' = ke^{i\varphi}z + \gamma$ ó (2) $z' = ke^{i\varphi}\bar{z} + \gamma$,

donde $k > 0$ y en general diferente de 1.

Sacando en (1) k como factor común, resulta:

(3) $z' = k(e^{i\varphi}z + \frac{\gamma}{k})$.

La substitución:

$$(4) \qquad w = e^{i\psi} z + \frac{\gamma}{k}.$$

transforma (3) en:

$$(5) \qquad z' = kw$$

Teniendo en cuenta que (4), según (3) y (4) de la sección 6 representa una traslación o una rotación, vale decir, congruencias, el resultado queda probado para las semejanzas del tipo (1). Un razonamiento análogo aplicado a las semejanzas de tipo (2) completa la demostración.

8. **Afinidades en general. Clasificación**

El análisis de la sección precedente nos dice que hay tres tipos de semejanzas, a saber:

i) <u>semejanzas sin puntos fijos</u>,

ii) <u>semejanzas con un único punto fijo y</u>

iii) <u>semejanzas con una recta de puntos fijos.</u>

Las traslaciones y las simetrías deslizantes pertenecen al tipo i); las rotaciones y homotecias al tipo ii) y las simetrías axiales al tipo iii).

Nos proponemos demostrar que la misma clasificación es válida entre las afinidades. En efecto, sea la afinidad:

$$(1) \qquad z' = \alpha z + \beta \bar{z} + \gamma.$$

Mediante la substitución:

$$(2) \qquad w = \alpha z + \beta \bar{z},$$

(1) toma la forma $z' = w + \gamma$, composición de (2) y de la traslación de parámetro γ.

Es obvio que (2) tiene siempre al punto $z = 0$ como punto fijo. Probaremos que según sea $|\alpha - 1| \neq |\beta|$ ó $|a-1| = |\beta|$, (2) tiene, respectivamente, un único punto fijo, o infinitos puntos fijos. Para demostrarlo, sea z_o un punto fijo de (2). Será entonces:

$$(3) \qquad (\alpha - 1)z_o + \beta\bar{z}_o = 0,$$

la cual, por conjugación nos da la ecuación:

$$(4) \qquad \bar{\beta}z_o + (\bar{\alpha} - 1)\bar{z}_o = 0.$$

(3) y (4) forman un sistema S de dos ecuaciones algebraicas de 1er. grado en las incógnitas z_o y $\bar{z}_o$. Eliminando $\bar{z}_o$, resulta la ecuación $(|\alpha - 1|^2 - |\beta|^2)z_o = 0)$, la que, si $|\alpha - 1| \neq |\beta|$, tiene a $z_o = 0$ como única solución, se sigue que si $|\alpha - 1| = |\beta|$, (2) tendrá por lo menos un segundo punto unido $z_1 \neq 0$. En tal supuesto, cada punto de la recta

$$(5) \qquad z = z_1 \, t$$

es punto fijo de la transformación (2) porque siendo la imagen de (5) la recta $w = \alpha z_1 t + \beta\bar{z}_1 t = (\alpha z_1 + \beta z_1) = z_1 t$, $\forall t$ es: $w = z$.

No queda empero, excluida a priori, la posibilidad de la existencia de algún punto fijo z_2 no perteneciente a la recta (5). Si tal cosa ocurre, por el mismo razonamiento anterior todos los puntos de la recta $z = z_2 t$ son también puntos fijos y si z^* es un punto arbitrario del plano, toda recta que pase por z y que sea secante con las precedentes, también será una recta de puntos fijos. Como consecuencia, z^* será punto fijo y la (2) es entonces la transformación idéntica. En tal caso $\alpha = 1$ y $\beta = 0$.

En resumen: Cuando $|\alpha - 1| \neq |b|$, (2) tiene un único punto fijo: el origen; cuando $|\alpha - 1| = |\beta|$, pero $\beta \neq 0$, existe una recta de puntos unidos y solamente ellos lo son; finalmente, cuando se cumple la igualdad anterior, pero $\beta = 0$, (2) es la transformaciòn idèntica.

Veamos ahora cómo repercuten estos resultados en (1). En el 1er. caso, cualquiera sea el valor de γ, (1) tiene un único punto fijo z_o y la afinidad se dice "*central*" de "*centro*" z_o. Por ejemplo, la afinidad $z' = z + i\bar{z} + 1$ es central, con centro $z_o = -i$.

En toda afinidad central, el haz de rectas $z = z_o + at$, con a complejo arbitrario no nulo y $t \in \mathbb{R}$, es globalmente fijo pues la imagen de cualquier recta del haz es la recta $w = (\alpha z_o + \beta\bar{z}_o) + (\alpha a + \beta\bar{a})t = z_o + (\alpha a + \beta\bar{a})t$ que pertenece al haz porque siendo $|\alpha|^2 - |\beta|^2 \neq 0$, la igualdad $\alpha a + \beta\bar{a} = 0$ sólo puede satisfacerse para $a = 0$. En esta transformación puede ocurrir que cada recta del haz se transforma en sí misma. Esto sucederá, si existe un h real no nulo tal que $\forall a$ sea $\alpha a + \beta\bar{a} = ha$, ó, $(\alpha - h)a + \beta\bar{a} = 0$. Como consecuencia, debe ser $\alpha = h$ y $\beta = 0$, es decir, la transformación es una homotecia de razón $|h|$.

En el 2do. caso, como $|\alpha - 1| = |\beta|$ implica, la existencia de un ángulo λ tal que $\beta = (\alpha - 1)e^{2i\lambda}$, la condición $(\alpha - 1)z + \beta\bar{z} + \gamma = 0$ para que z sea punto fijo, puede llevarse a la forma

$$z + e^{2i\lambda}\bar{z} = \frac{\gamma}{1-\alpha}, \quad \text{ó:}$$

$$e^{-i\lambda}z + e^{i\lambda}\bar{z} = \frac{\gamma}{1-\alpha}e^{-i\lambda}. \tag{6}$$

por lo que, para que existan soluciones debe ser:

$\frac{\gamma}{1-\alpha} e^{-i\lambda} = 2p$, con p real, ó:

$$(7) \qquad \gamma = 2p(1-\alpha)e^{i\lambda}.$$

Por lo tanto, el vector γ debe tener la misma dirección que el vector $c = (1 - \alpha)e^{i\lambda}$. En tal supuesto, la ecuación (6) se escribe:

$$e^{-i\lambda}z + e^{i\lambda}\bar{z} = 2p$$

ecuación que representa la recta: $z = (p+it)e^{i\lambda}$.

Por consiguiente, si γ tiene la forma (7), la transformación (1) posee una recta de puntos fijos. (1) se dice entonces una "*afinidad homolbgica*" o una "*homologìa afìn*" o "*axial*". La recta de puntos fijos se denomina el "*eje*" de la homología.

Probaremos a continuación que si en una homología axial el eje no es paralelo al vector c, cada recta paralela a c, se transforma globalmente en sí misma. Para probarlo, sea la recta de ecuación $z = z^* + et$, donde z^* denota su punto intersección con el eje de la homología. Su imagen será la recta:

$$(8) \quad z' = \alpha(z^* + ct) + \beta(\bar{z}^* + \bar{c}t) + \gamma = z^* + (\alpha c + \beta\bar{c})t.$$

Teniendo en cuenta que en virtud de la definición de c es:

$\alpha c + \beta\bar{c} = (1 - \alpha)e^{i\lambda} + (\alpha - 1)e^{2i\lambda}(1 - \bar{\alpha})e^{i\lambda} = (\alpha + \bar{\alpha} - 1)c$,

(8) adopta la forma $z' = z^* + c\,\tau$, donde hemos puesto $\tau = \alpha + \bar{\alpha} - 1$ = parámetro real. Este resultado prueba nuestra afirmación.

Importante consecuencia del resultado precedente es que:

$(z'z\,z^*) = (z' - z^*):(z - z^*) = (\alpha + \bar{\alpha} - 1) =$ constante, es decir: <u>cuando en una homologia axial la dirección del vector c no coincide con la dirección del eje, cualquier recta que une dos puntos correspondientes z y z' corta al eje en un punto z^* tal que la razon' simple $(z'z\,z^*)$ permanece constante.</u>

La dirección de c se llama la "*dirección*" de la homologia axial. Por ej., en una simetría axial, su "*dirección*" como homología es la de la normal al eje y $(z'z\,z^*) = -1$.

<u>Ejemplo</u>: Sea la afinidad $z' = iz + (1 - i)\bar{z} + 2(1 + i)$. La relación $\beta = (\alpha-1)e^{2i\lambda}$ se traduce en la igualdad $1-i = (i-1)e^{2i\lambda}$, que nos da $\lambda = \frac{\pi}{2}$, $e^{i\lambda} = i$. El vector c vale en este caso $c = (1-i)i = 1+i$ cuya dirección coincide con la de la constante γ. Tenemos pues una afinidad homológica. El eje de la homología es la recta $z = (1+it)i = i-t$, es decir, la recta $x = -t$, $y = 1$, paralela al eje coordenado real.

En el caso general, la dirección de γ no coincidirá con la de c, pero descomponiendo en tal caso a γ en dos componentes, una según la dirección de c, y otra según la dirección del vector $ie^{i\lambda}$, es decir, escribiendo $\gamma = 2p_1(1-\alpha)e^{i\lambda} + hie^{i\lambda}$, la (1) adopta la forma:

$$z' = [\alpha z + \beta\bar{z} + 2p_1(1-\alpha)e^{i\lambda}] + hie^{i\lambda},$$

que interpretamos como composición de: i) una homología afín y ii) una traslación paralela al eje de la i). Por efecto de esta traslación, (1) carece de puntos fijos.Por analogía con las simetrías deslizantes, hablaremos en este caso de "homologías deslizantes"

En síntesis: descartando las traslaciones, toda afinidad es: 1) una afinidad central, ó; 2) una afinidad axial, ó; 3) una afinidad deslizante.

Terminaremos proponiendo la solución de un ejercicio y de un problema.

Ejercicio: Probar que para una semejanza cualquiera, la constante H de la sección 3, representa el cociente de las áreas de dos triángulos T y T′ tales que T′ es la imagen de T.

La afirmación tiene en verdad validez mucho más general. Ver por ej. Rey Pastor, Santaló, Balanzat; Geometría Analítica, Cap. 6, Editorial Kapelusz, B. Aires.

Problema. Utilizando la fórmula (2) de la sección 5, determinar para una afinidad dada, los valores máximo y mínimo de $|\rho|$. Encontrar luego condiciones para que: i) el segmento imagen de cualquier segmento del plano, sea siempre una "dilatación" del segmento modelo, ii) sea siempre una "contracción", iii) existe por lo menos una dirección privilegiada para la cual sea $|\rho| = 1$.

Importante nota aclaratoria. Concluído este trabajo, por una gentileza del Prof. Dr. Luis A. Santaló, tomé conocimiento de la existencia de un trabajo de contenido similar al de éste, publicado por el Prof. Dr. Enzo Gentile en el Vol. 1, No 1 de esta misma Revista.

No obstante la coincidencia en la forma de obtener algunos resultados, por otra parte bien conocidos, la confrontación de ambas colaboraciones pone en evidencia los distintos enfoques con que fueron abordados los temas en estudio.