ORIENTACION Y CONEXION

Juan C. Amblard

RESUMEN: destacamos aquí el concepto de conexión en relación con el de orientación, y mostramos geométricamente que los grupos $SO(n)$ y $GL^{+}(n,R)$ son conexos.

1. Una recta queda orientada cuando mediante una flecha se indica en ella un "sentido de recorrido positivo". Ligeramente menos simple es la noción de "plano orientado". Aquí la idea dinámica asociada es la de un "sentido de giro positivo", el cual puede indicarse por un par (ordenado) de flechas ortogonales, de igual longitud y origen, considerándose positivo el giro de 90 grados que lleva de la primera a la segunda. A su vez, en el espacio de tres dimensiones una orientación se representa por un movimiento helicoidal, de giro alrededor de un eje y traslación (simultánea) a lo largo de él. Este movimiento se puede caracterizar mediante tres flechas ortogonales, indicando las dos primeras (como en el caso del plano) un sentido de giro alrededor de la tercera, y ésta el sentido de la traslación. Convenimos en que dos movimientos helicoidales representan la misma orientación cuando sus correspondientes ternas (ordenadas) de flechas pueden obtenerse una de otra mediante un movimiento rígido, de traslación y rotación, sin deformaciones ni cambios bruscos de dirección.

Así, pues, una orientación queda determinada en cada caso (recta, plano, espacio) por la elección de una base de vectores (que podemos suponer ortonormales, o sea mutuamente ortogonales y de longitud uno). La orientación propiamente dicha puede entonces definirse (para concretar) como la familia de todas las bases que se obtienen por movimiento rígido de la base elegida. Si en ésta reemplazáramos un vector por su opuesto caeríamos en la "orientación opuesta". Esta es la única otra orientación posible, es decir, de cada tres bases hay (al menos) dos que pertenecen a la misma orientación. Esto es (trivial en la recta y) fácil de ver en el plano, pues por movimiento rígido se puede siempre llevar el primer vector de una base a coincidir con el primero de otra, no quedando entonces para los segundos vectores más remedio que coincidir o ser opuestos. Un argumento similar se aplica (inductivamente) al espacio de tres dimensiones, y aun a los de mayor dimensión si extendemos adecuadamente a éstos la noción de orientación. Pero antes convendrá extender otro tipo de nociones, de carácter geométrico, que nos ayudarán luego a definir la orientación.

2. Es bien sabido que los puntos (o bien las flechas que arrancan de un punto) de un plano pueden ponerse en correspondencia con los pares ordenados de números reales, y ello con el auxilio de un sistema de dos ejes cartesianos ortogonales (en cuya intersección u "origen" podemos considerar aplicadas las flechas). De un modo similar hay correspondencia entre las ternas ordenadas de reales y los puntos (o flechas que arrancan de un punto) de nuestro espacio ordinario de tres dimensiones. Es natural entonces considerar la familia $\mathbf{R}^n$ de todas las "n-tuplas" ordenadas $(x_1 \ldots x_n)$ de números reales como modelo de "espacio de n dimensiones", espacio que consideraremos preferentemente en su versión "vectorial", pensando a sus elementos como flechas o vectores aplicados en el origen $0 = (0,\ldots, 0)$. De acuerdo con esto las n-tuplas se suman y multiplican por números "componente a componente". O sea, dados $a \in \mathbf{R}$, $u = (x_1 \ldots x_n)$ y $v = (y_1 \ldots y_n)$, se pone $u + v = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$ y $au = (ax_1, \ldots, ax_n)$. También se define el "producto escalar" de u y v así: $(u,v) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$. En particular se tiene

$$(u, u)^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2} = \text{"longitud de u"}.$$

Estas operaciones en $\mathbf{R}^n$ tienen las mismas propiedades formales con las que ya estamos familiarizados en el caso del plano o el espacio ordinario. Por ejemplo, el producto escalar es (conmutativo y) "bilineal", o sea lineal en cada factor: $(u,av+bw) = a\ (u,v) + b\ (u,w)$. Con esto, los vectores v "ortogonales" a un u fijo, o sea tales que $(u,v) = 0$, forman un "subespacio" S de $\mathbf{R}^n$, es decir, $(av+bw) \in S$ cualesquiera sean $v,w \in S$ y $a,b \in \mathbf{R}$. Dicho S es el espacio "ortogonal" de u. Si u es de longitud uno se tiene $(u,(v-(v,u)u) = (u,v) - (v,u) = 0$, y por tanto todo $v \in \mathbf{R}^n$ se expresa en la forma $v = (v,u)\ u + w$, con $w \in S$ = ortogonal de u. Esta descomposición es igualmente válida dentro de un subespacio S cualquiera y puede hacerse de un modo reiterado, tomando en S el ortogonal S_1 de un $u_1 \in S$, luego en S_1 el ortogonal S_2 de un $u_2 \in S_1$, y así sucesivamente. Dichos u_i (tomados de longitud uno) resultan ortonormales, es decir, cumplen las relaciones

$$(u_i,u_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{si } i\neq j \end{cases}$$

Por tanto, si la "dimensión" de S es m, o sea si m es el número máximo de rectas ortogonales (dos a dos) que pueden trazarse en S, el proceso anterior tendrá que detenerse en el vector u_m, resultando $S_m = \{0\}$. Pero entonces, por descomposición reiterada, cada $u \in S$ se expresa en la forma $u = a_1u_1 + \ldots + a_mu_m$, con coeficientes a_i unívocamente determinados pues multiplicando miembro a miembro por u_i se obtiene $a_i = (u,u_i)$. Esto se describe diciendo que los $\{u_1 \ldots u_m\}$ forman una "base" (ortonormal) del subespacio S. Notemos que cualquier otra familia ortonormal $\{v_1 \ldots v_m\}$ en S se puede obtener mediante el mismo proceso y por tanto es también una base. Expresando cada v_j como combinación lineal de los u_i, o sea poniendo

$$v_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\ u_i$$ para cada j, se obtienen m^2 coeficientes a_{ij}, los cuales constituyen la llamada "matriz de cambio de base", indicada por:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix}$$

o bien, más sintéticamente, $A = \left(a_{ij}\right)$. Si $\{w_1 \dots w_m\}$ fuera una tercera base, siempre del mismo subespacio S, habría otra matriz de cambio $B = \left(b_{ij}\right)$ para pasar de los $\{v_i\}$ a los $\{w_i\}$, y se tendría

$$w_k = \sum_{j=1}^{m} b_{jk} v_j = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij} b_{jk} \right) u_i = \sum_{i=1}^{m} c_{ik} u_i \quad .$$

O sea que los elementos de la matriz $C = \left(c_{ik}\right)$ que permite pasar directamente de los $\{u_i\}$ a los $\{w_i\}$ están dados por $c_{ik} = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} b_{jk}$. Esto se expresa diciendo que C es el producto de A por B, o sea $C = A\,B$. En particular, si $w_i = u_i$ para todo i, resulta

$$AB = BA = I = \left(\delta_{ij}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = \text{"matriz identidad"},$$

lo cual se describe poniendo $B = A^{-1}$ = "inversa de A". Así pues, toda matriz de cambio de base es invertible.

Recordemos que a cada matriz $A = \left(a_{ij}\right)$ se asocia su "determinante" det A, que es el número obtenido sumando algebraicamente todos los productos del tipo $a_{1i_1} a_{2i_2} \dots a_{mi_m}$, con $(i_1 \dots i_m)$ = permutación de los índices 1, 2,..., m, afectando cada término con un signo + ó - según que dicha permutación sea par o impar. Por ejemplo, el determinante de la matriz identidad vale uno, y el de cualquier matriz $A = \left(a_{ij}\right)$ coincide con el de su "traspuesta" $A^t = \left(a^t_{ij}\right)$, con $a^t_{ij} = a_{ji}$, según se comprueba fácilmente. Y también se comprueba (no tan fácilmente) que el determinante de un producto es el producto de los determinantes. Resumiendo:

(*) $\det[\delta_{ij}] = 1$, $\det A^t = \det A$, y $\det(AB) = (\det A)(\det B)$.

Volvamos ahora al subespacio S de $\mathbf{R}^n$, con su base ortonormal $\{u_1 \ldots u_m\}$, y reconsideremos las expresiones $v_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}u_i$ con $1 \leq j \leq m$. De la bilinealidad del producto escalar resulta

$$(v_j, v_k) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}a_{ik} = \sum_{i=1}^{m} a^t_{ji}a_{ik} = b_{jk} \qquad ,$$

donde los b_{jk} son las componentes del producto de la traspuesta A^t por $A = [a_{ij}]$. Por tanto, la ortonormalidad de los v_j *equivale* a la condición $A^t A = I = [\delta_{ij}]$, la cual a su vez equivale a ser A^t la inversa de A , y esto a ser $A A^t = I$. Las matrices que cumplen estas condiciones equivalentes se llaman "ortogonales", y de dichas equivalencias se deduce fácilmente que la familia O(m) de tales matrices (de m x m elementos reales) es estable (o sea cerrada) respecto del producto y la inversión, es decir, que O(m) es un "grupo" (llamado precisamente "ortogonal"). Tomando determinante en $A^t A = I$ y teniendo en cuenta (*), resulta $(\det A)^2 = 1$, o sea $\det A = \pm 1$ para toda $A \in O(m)$. La subfamilia SO(m) de todas las $A \in O(m)$ con $\det A = +1$ es también claramente estable respecto del producto y la inversión, siendo entonces un "subgrupo" de O(m) (llamado "ortogonal especial"). A continuación veremos que el problema de orientar el espacio S está íntimamente ligado al de "conectar" entre sí los elementos del grupo SO(m).

3. En consonancia con la definición intuitiva que dimos en el espacio ordinario, diremos ahora que dos bases ortonormales (siempre ordenadas) $\{u_1 \ldots u_m\}$ y $\{v_1 \ldots v_m\}$ *del mismo subespacio* de $\mathbf{R}^n$ tienen (o determinan) en él la misma orientación, o que una se obtiene de la otra "por rotación" en dicho subespacio, si ambas pueden "conectarse" por medio de una base ortonormal "móvil" cuyos elementos $w_j(t) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}(t)u_i$ dependen con continuidad de una variable t que recorre cierto intervalo $[a,b] \subset \mathbf{R}$. Con

esto queremos decir que $w_j(a)$ es u_j y $w_j(b)$ es v_j para todo $j = 1, \ldots m$ y que las $a_{ij}(t)$ son funciones continuas de t en $[a,b]$.

De esto resulta que la matriz $A_t = [a_{ij}(t)]$ se va moviendo de una manera suave y continua dentro de $O(m)$, describiendo lo que podemos imaginar como un arco o curva. Pero entonces dicho arco debe estar completamente contenido en $SO(m)$, pues arranca de $A_a = I \in SO(m)$ y el $\det A_t$ no puede "saltar" de 1 a -1, por razones de continuidad. Viceversa, dado a priori un tal arco en $SO(m)$, descrito por una matriz $A_t = [a_{ij}(t)]$ que se mueve con continuidad a partir de $A_a = I$, las $w_j(t) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}(t)u_i$ definen una rotación de los u_i (aquí decimos "rotación" y no "movimiento rígido" pues pensando los vectores aplicados al origen evitamos la "traslación"). En resumen, dos bases tienen la misma orientación si y sólo si su matriz de cambio puede conectarse a la identidad por medio de un arco en $SO(m)$. Con esto, y en vista de la disyuntiva $\det A = \pm 1$ en $O(m)$, nuestro problema de "tercera (orientación) excluída" se reduce al de probar que $SO(m)$ es "conexo", o sea, que todos sus elementos se pueden conectar a la identidad (y por tanto entre sí) por medio de un arco (siempre contenido en $SO(m)$, naturalmente). En otras palabras, debemos probar que si $\{u_1 \ldots u_m\}$ y $\{v_1 \ldots v_m\}$ tienen matriz de cambio en $SO(m)$ sus orientaciones coinciden. Notemos que si fuera $u_1 = v_1$, dicha matriz sería del tipo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \ldots 0 \\ 0 & \\ \cdot & \begin{pmatrix} & \\ & B \end{pmatrix} \\ 0 & \end{pmatrix}$$

donde B es la que permite pasar de los $\{u_2 \ldots u_m\}$ a los $\{v_2 \ldots v_m\}$, siendo $\det B = \det A = 1$. O sea que la condición $u_1 = v_1$ implica que también $\{u_2 \ldots u_m\}$ y $\{v_2 \ldots v_m\}$ tienen matriz de cambio en SO, en este caso en $SO(m-1)$. Por tanto, usando inducción, todo consiste en probar que mediante rotación de los u_i podemos llevar u_1 a coincidir con cualquier vector v prefijado de longitud uno (todo dentro del subespacio en el que los

u_i forman base, naturalmente). Si v está en el plano de u_1 y u_2 , basta rotar estos dos dejando los $u_3 \ldots u_m$ fijos. Y si no, rotamos (con hipótesis inductiva) los $u_2 \ldots u_m$ hasta que u_2 caiga en el plano de u_1 y v (digamos que es precisamente para usar este argumento inductivo que hemos trabajado en subespacios en vez de hacerlo directamente en $\mathbb{R}^n$).

4. En fin, notemos que también el complemento de $SO(m)$ en $O(m)$ es conexo, pues si A y $B \in O/SO$ se tiene $A^{-1}B \in SO$, y AA_t va suavemente de A a B si A_t lo hace de I a $A^{-1}B$ (cuando t recorre cierto intervalo $[a,b]$). Esta descomposición de $O(m)$ en dos "componentes" conexas traduce la doble posibilidad de "tránsito" en el espacio correspondiente. Como en la recta, en todos ellos hay "mano y contramano", sólo que la naturaleza de esta disyuntiva se complica al crecer la dimensión (en el plano es un modo de girar, en el espacio una forma de "enroscarse"...).

Notemos también que en $\mathbb{R}^n$ se puede indicar objetivamente una orientación "privilegiada", a saber, la de la base "canónica" formada por las n-tuplas del tipo $(0 \ldots 0\ 1\ 0 \ldots 0)$, cosa imposible en los espacios en que no hay base distinguida.

Finalmente queremos señalar que hemos usado bases ortonormales para facilitar la exposición y probar la conexión de SO, pero en realidad la ortonormalidad nada tiene que ver con el concepto de orientación en sí. Para librarnos de ella notemos que cualquier base $\{u_1 \ldots u_n\}$ en R^n se puede "ortonormalizar" reemplazando u_1 por $e_1 = u_1/\|u_1\|$ (donde $\|\ \|$ indica la longitud del vector) y u_j por $e_j = \bar{u}_j/\|\bar{u}_j\|$ con $\bar{u}_j = u_j - \sum_{i=1}^{j-1} (u_j,e_i)e_i$, de donde resulta $(e_j,u_j) > 0$ y $u_j = \sum_{i=1}^{n} c_{ij}\, e_i$ con $c_{ij} = (e_i,u_j)$ si $i \leq j$ y $c_{ij} = 0$ si $i > j$. Por tanto la matriz $C = [c_{ij}]$ es "triangular", con $\det C = (e_1,u_1)(e_2,u_2)\ldots(e_n,u_n) > 0$. Notemos que la familia $GL^+(n,R)$ de todas las matrices n x n (reales) con determinante > 0 es estable bajo el producto y la inversión, o sea nuevamente un grupo (del cual $SO(n)$ es subgrupo). Dicho grupo GL^+ contiene a las matrices (trian gulares) del tipo $C_t = [(1-t)c_{ij} + t\,\delta_{ij}]$ con $t \in [0,1]$, las cuales conforman un arco que une $C = C_0$ con $I = C_1$. Además, si A y B son las matrices de cambio de $\{u_i\}$ y de $\{e_i\}$ respecto de la base canónica, se tiene $A = B\,C$ y por tanto $B \in SO(n)$ si $A \in GL^+$. Pero entonces, uniendo B con I mediante un arco en $SO(n)$ descrito por cierta B_t cuando t recorre $[0,1]$, la matriz $A_t = B_t C_t$ describe otro arco en $GL^+(n,R)$, uniendo A con I. Esto nos dice que GL^+ es conexo, lo cual a su vez significa que dos bases $\{u_1 \dots u_n\}$ y $\{v_1 \dots v_n\}$ de $\mathbf{R}^n$ (o de cualquier "espacio de vectores" de dimensión n) tienen matriz de cambio en $GL^+(n,R)$ si y sólo si existen n funciones $w_i(t)$ continuas en un intervalo $[a,b]$, tales que también $\{w_1(t) \dots w_n(t)\}$ es base del espacio en cuestión para todo $t \in [a,b]$, con $w_i(a) = u_i$ y $w_i(b) = v_i$ para todo $1 \leq i \leq n$. Cuando esta condición se cumple se dice que $\{u_1 \dots u_n\}$ y $\{v_1 \dots v_n\}$ tienen la misma orientación, quedando entonces la familia de todas las bases del espacio dividida en dos clases que representan las dos orientaciones posibles del mismo.

Facultad de Matemática, Astronomía y Física
Universidad Nacional de Córdoba.