LA TECNICA DE RESOLUCION DE PROBLEMAS EN LA ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DE LA MATEMATICA

Carmen P. de Aranega - Ana Lía De Longhi

Jorge Vargas

Introducción:

Toda tarea áulica está implícita o explícitamente orientada por un conjunto de objetivos que el docente espera que sus alumnos alcancen al finalizar un determinado período de tiempo (una clase, una semana, un bimestre, un año, etc.). Estos objetivos son comportamientos (observables o interiorizados) relacionados con conceptos, generalizaciones, leyes, teorías, etc.

Para la concreción de los mismos el docente selecciona y organiza un conjunto de actividades a través de las cuales los alumnos interactuarán con el medio (el cual incluye los objetos materiales, los textos, los otros alumnos; el mismo docente, etc.). El docente de nivel primario, secundario y terciario, por lo general, explicita y sistematiza esta selección y organización en la llamada planificación (de un curso, de una unidad, de una clase). Es decir, establece con anticipación la forma en que regulará (de un modo general y específico) las interacciones del alumno con el medio durante la etapa posterior (llamada conducción del proceso de enseñanza aprendizaje) fijando también la manera en que concretará la evaluación del mencionado proceso).

Cuando el docente determina la forma general de regular las interacciones alumno-medio se dice que selecciona y organiza métodos didácticos. Cuando explicita formas más específicas de regulación de esas interacciones, elige y organiza técnicas didácticas.

Existen diferentes técnicas didácticas. En este trabajo nos referimos a la llamada técnica de resolución de problemas la cual consideramos de suma importancia en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática.

1- *DEFINICION*.

Consiste en un grupo de actividades seleccionadas y organizadas por el docente alrededor de una situación problemática, desconocida para el alumno y que estimula en los educandos un proceso activo creativo de estudio, semejante al que desarrollan los investigadores matemáticos.

Enfrentarse a una situación problemática implica estudiarla y tratar de solucionarla; lo cual, según G. Polya, significa "buscar concientemente alguna acción apropiada para lograr un propósito claramente concebido pero no inmediatamente alcanzable". (1)

2- *COMPORTAMIENTOS QUE SE DESARROLLAN A TRAVES DE SU APLICACION*

Al elegir esta técnica el docente trata de regular las interacciones del alumno con el medio, y que como resultado de ellas los estudiantes desarrollen un conjunto de comportamientos, entre los cuales podemos citar:

-*comprender* una situación problemática.

-*analizar* críticamente un problema, esto es identificar.

.el enunciado (datos-condiciones e incógnitas).

. los problemas accesorios

. las demostraciones.

---

(1) Polya, G. "Problemas", *Conceptos de Matemática*, Año IX, N° 35. (Julio, Agosto-Septiembre 1975) pág. 3.

. las conclusiones

. la validación de la solución.

-*construir* nuevos conocimientos y procedimientos matemáticos.

-*razonar* en forma lógica basándose en los datos del problemas o en conocimientos matemáticos previos.

-*validar* las conclusiones y procedimientos matemáticos.

-*desarrollar*

. actitudes de curiosidad hacia la matemática:

. actitudes de respeto hacia sí mismo y por los demás;

. un pensamiento intuitivo y a la vez racional

. un pensamiento crítico, creativo y original.

-*generalizar*

-*transferir* de manera adecuada conocimientos, procedimientos y generalizaciones a otras situaciones problemáticas.

-*autoregular* el aprendizaje de la Matemática.

3- *ETAPAS*

Desde el punto de vista de la técnica en sí, siguiendo la concepción de Polya y a los fines de una mayor comprensión del significado de la misma, conviene considerar las distintas etapas que ésta incluye: a) presentación del problema, b) comprensión de éste, c) investigación del mismo y d) validación de los conocimientos y procedimientos utilizados en su estudio (anteriores al problema y construidos a partir de él).

3.1) *Presentación del problema*:

En esta etapa, el docente pone en conocimiento de los alumnos el problema, escribiéndolo en la pizarra o entregando copias del mismo. (puede trabajar en grupos). Pasa luego a hacer una lectura conjunta del enunciado. Este debe reunir determinadas características:

. Estar redactado en forma clara y con lenguaje conocido por el alumno.

. Generar un proceso de investigación en el alumno que implique una operación significativa y no un pensamiento parcial.

. Ser incentivador para la mayoría de los alumnos provocando en ellos el deseo de analizarlo, estudiarlo y resolverlo.

. Respetar las estructuras previas de los alumnos (comportamientos y conocimientos) para que éste pueda comprenderlo, estudiarlo, resolverlo o demostrarlo.

. Incluir la hipótesis de trabajo, las incógnitas y todos los datos necesarios para su comprensión.

3.2) *Comprensión del problema*:

En esta etapa el alumno, orientado por el docente, debe realizar una serie de actividades que lo conducen a lograr una visión global y analítica del mismo. Estas actividades que pueden ser grupales o individuales son:

-Aclarar las dudas respecto a la redacción y al lenguaje empleado.

-Identificar los datos y sus relaciones, las incógnitas y las condiciones. En el caso de teoremas, por ejemplo, se identificarán las hipótesis (que equivale a la relación entre los datos) y la tesis (que es la incógnita).

3.3) *Investigación del problema*.

La etapa de investigación del problema puede a su vez subdividirse, siguiendo la propia concepción de Polya en tres sub-etapas:

-esbozo de un plan de trabajo.

-ejecución del plan.

-extracción de conclusiones.

3.3.1 *Esbozo del plan*

Una vez compendido el problema el alumno debe esbozar el plan de trabajo, es decir prever un conjunto de pasos ordenados que lo conducirán a encontrar la incógnita (en el caso de los problemas de encontrar o de los problemas prácticos) o demostrar la tesis (en el caso de los problemas de demostrar)

La definición de estos diferentes tipos de problemas se dará más adelante.

En este plan de trabajo se esquematizarán, tanto los caminos inductivos que podrán conducir (mediante el análisis de casos particulares significativos) a una posible vía de solución, como los caminos deductivos que permitirán verificar lógicamente esa solución convirtiendo (a través de una demostración) la conclusión exploratoria en una verdadera generalización.

3.3.2) *Ejecución del plan.*

Implica la concreción de cada uno de los pasos tanto en la búsqueda de la conclusión exploratoria como en la demostración de la misma. Esto incluye considerar cada paso desde varios puntos de vista, buscar los puntos de contacto con los conocimientos y las experiencias previas (contenidos y procedimientos), considerar las más adecuadas y emplearlas en la demostración.

3.3.3. *Extracción de conclusiones.*

Es la expresión de la incógnita (en los problemas de encontrar o en los prácticos) y la confirmación o negación de la tesis (en los problemas de demostrar).

3.4. *Validación de los conocimientos y procedimientos.*

Es la visión retrospectiva que incluye la revisión (tanto de los productos como de los procesos empleados en la demostración) y la verificación de la relación entre las partes; por ejemplo, datos (su relevancia o irrelevancia), condiciones y solución.

También implica considerar la posibilidad de aplicar la solución obtenida (en su doble aspecto: contenidos y procedimientos) a la solución de otros problemas

4. *METODO.*

Las actividades de enseñanza-aprendizaje utilizadas en la técnica de resolución de problemas es similar a las que utilizan los matemáticos en su labor cotidiana de investigación.

"Es decir, que existe un paralelismo entre: la forma en que se construye la Matemática y la forma en que los alumnos arman su estructura de conocimiento; el modo en que los matemáticos investigan problemas y el modo en que los alumnos los estudian; el razonamiento inductivo-deductivo que siguen los matemáticos cuando resuelven un problema y el que los estudiantes siguen en su proceso de análisis y resolución de situaciones nuevas; la forma en que los matemáticos infieren y generalizan y la que los jóvenes emplean al lograr inferencias y generalizaciones".(*)

Por lo tanto la resolución de problemas en cuanto regulación específica de las interacciones alumno-medio se engloba en una regulación más general: el método inductivo-deductivo-inductivo propio del método de la Matemática como Ciencia.

O sea que, la *metodología* de la técnica de resolución de problemas es *inductiva-deductiva-inductiva.* Se parte de la comprensión del problema (es decir, de su consideración general y de sus partes), la cual lleva a esbozar un plan de acción. Primero se investiga sobre posibles soluciones, llegando a *generalizaciones exploratorias*. Este proceso (muchas veces intuitivo) es inductivo, ya que se generaliza sobre la base de casos particulares; es decir, sobre la base de posibles diferentes vías de solución.

Luego se demuestran o confirman dichas generalizaciones o con

---

(*) Sánchez, C.; Aranega, C.P.; Pujadas, M.; "Sugerencias de un método para la enseñanza-aprendizaje de la matemática en la Escuela Media" IV Reunión de Educación en la Matemática - Salta - Agosto 1980.

conclusiones por un razonamiento *deductivo*, en tanto se intenta confirmar dicha generalización en diferentes casos particulares.

Finalmente, se comprueba la validez de los procedimientos y resultados, obtenidos deductivamente, y se revisan las falencias que puede haber en la deducción.

Se inicia luego un nuevo proceso *inductivo* de factibilidad de aplicación de los resultados comportamentales y conceptuales obtenidos por el alumno a nuevas situaciones particulares.

Si bien en las tres etapas se ponen en juego procesos cognotivos analíticos y sintéticos, se puede decir que en la inducción prima el análisis y en la deducción la síntesis.

Cabe también señalar que un problema puede despertar el interés para investigar temas que, si bien pueden no ajustarse a la solución de ese problema y no estar relacionados con la incógnita, resultan importantes en cuanto a relaciones nuevas que tienen que ver con la teoría de lo descubierto.

5- *LA TECNICA DE RESOLUCION DE PROBLEMAS Y LOS MOMENTOS DE CONDUCCION DE UNA CLASE:*

Didácticamente la clase tiene tres momentos bien conocidos: la apertura, el desarrollo y el cierre.

La *apertura* corresponde a la incentivación e introducción de la clase. Esta apertura cuando se aplica la técnica de resolución de problemas consiste en la presentación y comprensión del problema enunciado.

El *desarrollo de* la clase corresponde a la investigación del problema (con sus etapas correspondientes: esbozo del plan, ejecución y conclusiones).

El *cierre* consiste en la validación de los conocimientos y procedimientos empleados, aún cuando puede incluir también la presentación de nuevos problemas derivados de las conclusiones a que se arribó.

6- TIPOS DE PROBLEMAS

Cabe aquí indicar que los normalmente llamados "problemas" por algunos profesores de Matemática constituyen simples ejercicios que se resuelven por la aplicación automática de una fórmula, operación, ecuación u otro algoritmo. Cuando hablamos de problemas, por lo tanto descartamos este tipo de ejercitación.

Polya intenta una clasificación de problemas a partir de la cual distingue: problemas de encontrar, problemas de demostrar, caracterizando también lo que él llama problemas prácticos.

6.1. *Problemas de encontrar.*

Su propósito es encontrar la (o las) incógnita(s) a partir de los datos y sus relaciones.

Las incógnitas pueden ser de diverso tipo: un número, una figura, una construcción, un gráfico, una tabla, una curva, etc.

En los enunciados de este tipo de problemas deben estar claramente consignados:

. los datos

. la(s) incógnita(s)

. la(s) condición(es) que la(s) incógnita(s) tiene(n) que satisfacer. Estas se refieren a las relaciones existentes entre los datos y la(s) incógnita(s).

Ejemplo

Tema: Enteros

Autor: Cristián Sánchez

I Seminario-Taller de Matemática. Año 1977 (GECYT-U.N.C)

Problema:

"Con el objeto de guardar sus "artefactos" de pesca, mi suegro, decidió construir en el fondo de su casa una habitación y así, de paso, usar unos ladrillos y baldosas que habían sobrado de una construcción anterior.

Para el trabajo consiguió a un albañil del barrio, llamado Don Oscar, de gran reputación local.

Cuando Don Oscar vino a estudiar el terreno y discutir los detalles de la obra trajo consigo sus herramientas en una bolsa y comenzó con mi suegro la consabida conversación sobre precios de materiales y mano de obra, con los obvios ejercicios de memoria sobre los precios de los años 40, 50, 60 y 70, yo los escuchaba distraídamente mientras miraba a Larguirucho con los chicos.

Queriendo concretar los detalles de la obra, en un momento, oigo que mi suegro dice:

-¿Me presta su metro? Vamos a medir- y a Don Oscar responder algo que hizo perder audiencia a García Ferré.

-No tengo metro, solamente uso mi nivel y con él puedo medir cualquier cosa.

Naturalmente esto me sorprendió mucho y cuando ellos fueron para el fondo decidí analizar el nivel de Don Oscar. Para mi sorpresa, resultó ser un nivel común de madera, sin escala de ninguna naturaleza y sólo con una chapita de bronce para sujetar la ampolla de agua.

Con el metro, que mi suegro me hizo buscar ante la respuesta de Don Oscar, tomé las medidas del nivel que son 2x4x33,5 cm.

Quisiera ver si podemos descubrir cómo hace Don Oscar para medir cualquier distancia con su nivel".

Otros ejemplos son:

-Encontrar un número que sumado a su duplo resulte igual a 30.

-Entre todos los paralelogramos de perímetro 1 determina el o los de mayor área.

-Entre todos los paralelogramos de perímetro 1 determinar el (o los) de menor área.

-Entre todos los paralelogramos inscriptos en un triángulo equiláte ro determinar el de mayor área.

6.2. *Problemas de demostrar.*

Están dirigidos a probar o refutar de manera concluyente una afirmación (verdadera o falsa) incluída en el enunciado. Este debe tener:

.La(s) hipótesis (datos y sus relaciones).

.La tesis o conclusión (que es lo que se quiere probar).

El enunciado de este tipo de problema suele responder a la forma "Si... entonces" donde "Si" se refiere a la hipótesis y "enton ces" a la conclusión. O puede estar encabezado por los términos "Probar que...", "Demostrar que...", "Justificar que...

La respuesta al problema es afirmativa si se encuentra un eslabón lógico que relaciones la hipótesis y la tesis. En cambio, es negativa si la hipótesis no implica la conclusión. Usualmente esto se resuelve encontrando un ejemplo de un objeto u hecho que ve rifica la hipótesis y no verifica la tesis.

Ejemplo:

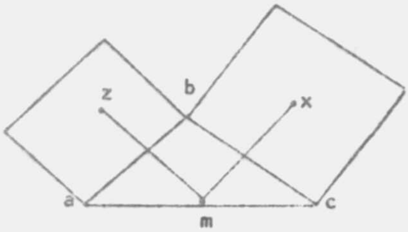
Tema: Transformaciones rígidas. Rotaciones.

Autores: Bazán, Norma. Boaglio, Laura. Brega, Teresita.

Curso de Matemática 1981. (GECYT - Sección Matemática - IMAF - UNC)

Problema:

"Si z y x son los centros de cuadrados adyacentes y exterio res a dos de los lados del $\overset{\Delta}{abc}$, y m es el punto medio del tercer lado, entonces el $\overset{\Delta}{zmx}$ es isósceles y el ángulo $\overset{\Delta}{zmx}$ es recto"



Una posible solución es:

La composición $T = M \circ X \circ Y$ de M rotación de centro m y antihora de 180°, X rotación antihoraria de centro x y 90°, Z rotación antihoraria de centro z y 90° es una traslación pues 180 + 90 + 90 = 360

Ahora T(a) = MZX(a) = a, en consecuencia T es la transformación identidad. Si z' = X(z) entonces M(z') = z; en consecuencia el triángulo z x z' es isósceles y el ángulo de vértice x, recto. Como M(z) = z', m es el punto medio del $\overline{Z\text{-}Z'}$ y se tiene que $\vec{mx}$ es perpendicular a $\vec{zm}$. y el triángulo zmx es isósceles.

Otros ejemplos son:

i) Probar que el cuadrado de perímetro 1, tiene la mayor área entre todos los paralelogramos de perímetro 1.

ii) Probar que para cualquier número natural n se tiene que $n^2 + 1 \geqslant 5$.

Es fácil probar la verdad de i); ii) es falso puesto que si n = 1, $1^2 + 1 = 2 < 5$ aunque $n^2 + 1 \geqslant 5$ si $n \geqslant 2$.

6.3. *Problemas prácticos.*

Están dirigidos a resolver situaciones surgidas de la realidad fáctica y su enunciado guarda la misma estructura que los problemas de encontrar o de demostrar. Las diferencias con estos últimos son las siguientes:

. por surgir de necesidades concretas de la realidad su solución requiere conocimientos de otras disciplinas.

. por la misma razón los datos, las condiciones y las incógnitas no son tan precisas como en los problemas específicamente matemáticos.

. la complejidad de variables intervinientes en el problema lleva muchas veces a trabajar concientemente con un número limitado de ellas.

Sin embargo, el tipo de razonamiento que se emplea para su estudio es el razonamiento matemático.

Ejemplo:

Tema: Esferas y Poliedros.

Autor: Dr. Cristián Sánchez

II Seminario-Taller de Matemática 1978 (CECYT-IMAF-UNC).

Problema:

"Mi amigo Carlos, que es botánico, me consultó sobre un problema:

¿Es posible tener una idea de las posibles configuraciones del grano de polen de cactus?

Carlos ha sacado fotos con el microscopio electrónico, que lucen como el dibujo adjunto, aunque naturalmente no son todos iguales".

Como el grano de polen es esférico vemos que hay que estudiar la esfera y los "dibujos" sobre ella, de la siguiente naturaleza.

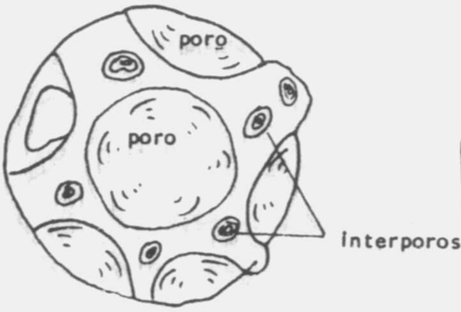
El "dibujo" está formado por un número finito de polígonos (que llamaremos caras) situados en relación mutua, de modo que que se cumple:

1- Dos polígonos del dibujo no tienen ningún punto interior común.

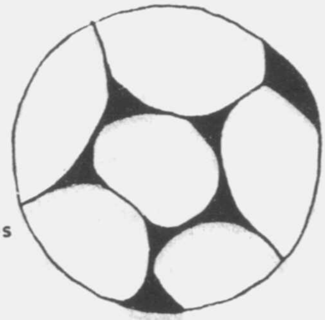
2- Para cada lado de un polígono existen dos y sólo dos polígonos que tienen en común ese lado.

3- Todo punto de la esfera está en algún polígono, (o su borde).

4- Dados dos vértices v_1 y v_2 se puede ir de uno al otro a través de una sucesión de lados encadenados.



Grano de Polen



Esquema

En consecuencia, un grano de polen desde el punto de vista matemático es un poliedro si pensamos a los poros o interporos como caras. Además de los dibujos se observa que

1) Todos los interporos son polígonos con un mismo número de lados, digamos n.
2) Todos los poros son polígonos con un mismo número de lados, digamos m.
3) Los poros tienen lados comunes tanto (A) poros como (B) interporos.
4) Los interporos no tienen lados en común con interporos.
5) Dos lados consecutivos de un poro, no pueden ser del tipo (A) o (B).
6) Todo vértice está en un único interporo.
7) Todo poro tiene un número par de lados. Esto es, m es par.
8) Hipótesis de regularidad: En cada vértice concurren el mismo número de lados.

Sean I = número de interporos

P = número de poros.

Por lo tanto: si C = número de caras del "grano de polen" se tiene que

$$C = I + P$$

Si L = número de lados del "grano de polen" se tiene que

$$2L = nI + mP$$

Si V = número de vértices del "grano de polen", por la hipótesis de regularidad, 5) y 6) se concluye que cada vértice pertenece a dos poros y un interporo, por lo tanto

$$3V = \text{número de caras} = nI + mP$$

Además, por 6) $V = nI$

Como resolver el problema es calcular n, m, I, P, necesitamos ecuaciones que los relacionen. Por lo observado experimentalmente nuestros poliedros satisfacen,

1.- Dos polígonos del dibujo no tienen ningún punto interior común.

2.- Para cada lado de un polígono existen dos y sólo dos polígonos que tienen en común ese lado.

3.- Todo punto de la esfera está en algún polígono, (o su borde).

4.- Dados dos vértices v_1 y v_2 se puede ir de uno al otro a través de una sucesión de lados encadenados.

Experimentalmente descubrimos la fórmula

$$V - L + C = 2$$

siendo:

V = número de vértices.

L = número de lados.

C = número de caras.

Debemos probarla:

A) Cortamos una cara arbitraria y la eliminamos.

B) Se extienden las otras caras sobre el plano sin desgarramientos ni adherencias.

Esto nos permitirá trabajar con más tranquilidad.

Tenemos ahora una red de polígonos en el plano.

Claramente, para esta red V y L son los mismos que en la original, pero C tiene una unidad menos, así que aquí debe valer:

$$V - L + C = 1$$

Nuestro problema se ha reducido a probar esto en el plano. Si llamamos $Q = V - L + C$, queremos ver que $Q = 1$.

C) Si en la red hay polígonos que no son triángulos, los dividimos en triángulos por algunas diagonales.

Cómo afecta esto a Q?

Es fácil ver que no lo cambia.

Esta es una clave importante:

Podemos probar la fórmula para una red de triángulos.

Esto nos dice, por otra parte, que puede haber "maneras" de alterar la red que tenemos, sin variar el Q.

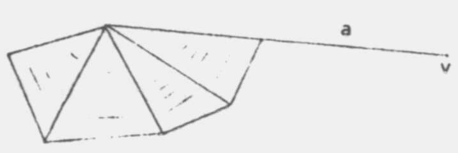
Busquemos algunas

1.- Aumentar una cara y un lado.

2.- Aumentar un vértice y un lado.

3.- Aumentar un vértice, una cara y dos lados.

Es fácil ver que las operaciones (1) y (3) son posibles; en cambio (2) no lo es, pues si bien Q queda inalterado con ella, la red resultante será de la forma:



Habiéndose agregado el lado a y el vértice v, y ese lado a no es lado de *ninguna* cara de la red, lo que contradice la propiedad (2°) de las redes (pero llevada al plano, eje!).

Esta es una idea importante, pues ahora podemos *sacar en vez de agregar*.

Tomamos la red y empezamos ahora a sacar hasta quedarnos con un solo triángulo.

Una vez en estas condiciones no podemos reducir más (pues en la esfera debemos tener al menos dos caras).

Contando para el triángulo vemos que:

$$Q = 3 - 3 + 1 = 1$$

Vemos entonces $Q = 1$ para cualquier red de triángulos y entonces para la esfera:

$$V - L + C = 2$$

Volvamos al grano de polen:

Aplicando la igualdad $V - L + C = 2$ y lo observado se deduce, que:

$$R)\ P(6 - m) + I\ (6 - n) = 12$$

$$S)\ P(2 - m) + I\ (2 + n) = 4$$

R nos dice que no podemos tener n y m ambas > 6.

Operando con estas dos ecuaciones se obtienen otras dos (sumando y restando).

$$P\ (4-m) + 4I = 8$$

$$2\ P + I\ (2-n) = 4$$

Ahora se pueden estudiar las soluciones teniendo en cuenta que debe cumplirse

$$n, m \geq 3 \qquad m = par$$

Por ejemplo:

<u>n = 3</u>

$m = 4 \Rightarrow P = 3,\ I = 2$ (prisma triangular)

$m = 6 \Rightarrow P = 4,\ I = 4$ (tetraedro con vértices cortados)

$m = 8 \Rightarrow P = 6,\ I = 8$ (cubo con vértices cortados)

$m = 10 \Rightarrow P = 12,\ I = 20$ (dodecaedro con vértices cortados)

El lector queda amablemente invitado al festín poliedral que continúa.

6.4. *Comentarios de la clasificación*

Esta clasificación resulta de utilidad para el docente de nivel secundario y terciario en cuanto le permite clarificarse acerca de qué comportamientos espera del alumno cuando le presenta el enunciado de un problema.

Cabe sin embargo señalar algunos puntos:

-los problemas de demostrar requieren comportamientos inductivos-deductivos-inductivos que son sólo posibles cuando la estructura del pensamiento puede sobrepasar el plano de los objetos concretos para entrar en el plano de los objetos abstractos, de las proposiciones y las formalizaciones y esto por lo general empieza a gestarse entre los 12 ó 13 años para continuar a lo largo de la pubertad, la adolescencia y la adultez.

-para un matemático todo problema es de demostrar en cuanto -obtenido un determinado resultado que satisface los datos de un problema de encontrar o de resolver- se plantea la demostración que pruebe o valide la conclusión obtenida.

-los problemas prácticos responden en general a necesidades fácticas muy complejas y, por ende, el nivel y cantidad de conocimientos re-

-queridos para su solución (tanto matemáticos cuanto de otras disciplinas) es elevado; de ahí que por lo general, son profesionales (matemáticos, físicos, ingenieros) quienes contribuyen a su solución actuando en forma interdisciplinaria (con otros especialistas). Sin embargo algunas situaciones fácticas pueden simplificarse tal que se pueden plantear a los alumnos secundarios. La condición es sin embargo que su resolución (que será en realidad un redescubrimiento del resultado) implique un razonamiento matemático (inductivo-deductivo-inductivo), en el que se apliquen conocimientos matemáticos previos y se construyan nuevos conocimientos matemáticos, como en el caso del ejemplo de página 12.

-en el estudio de cualquiera de los tres tipos de problemas muchas veces se recurre a estudiar e inclusive a resolver otro problema (que Polya llama "auxiliar") el cual (sea por el procedimiento que se emplea para su estudio o sea por la conclusión a que con él se arriba) contribuye como un elemento importante para la consideración de algún aspecto del problema que se está investigando.

7 - *USOS DE LA TECNICA*.

El uso de esta técnica de enseñanza-aprendizaje de la Matemática y el tipo de problemas que se empleen depende de algunas condiciones como:

-los objetivos generales y específicos de la asignatura, la unidad o la clase;

-el tema;

-la etapa evolutiva de pensamiento en que se encuentren los alumnos,
-las características y experiencias previas del grupo y el grado de familiaridad con la técnica,
-el conocimiento y entrenamiento del docente en el uso de la misma.
-el tiempo y los recursos disponibles.

Consideramos obviamente que esta técnica debe combinarse con otras a lo largo del proceso de enseñanza-aprendizaje y el empleo de la misma debe ser paulatino. También debe ser paulatina la introducción de los problemas de demostrar los cuales, como dijimos, requieren un razonamiento formal que recién se empieza a estructurar al inicio de la escuela secundaria.

El tiempo que requiere su utilización es mayor comparado con el que insume el uso de otras técnicas (exposición dialogada, por ejemplo), ya que es-sin lugar a dudas-más costoso en tiempo inducir y deducir, sobre la base de las propias experiencias, que seguir el razonamiento inductivo-deductivo hecho por otro (en el pizarrón o en un texto). Sin embargo, la diferencia de los resultados a favor del primer caso es indiscutible. Por otra parte, una vez que el alumno ha trabajado varias veces la técnica (es decir ha construído y puesto en juego los procesos inductivos y deductivos de pensamiento) el tiempo que requiere su empleo disminuye, con lo cual empiezan a hacerse visibles (tanto para el alumno como para el docente) los frutos de la técnica. A medida que avanza en la pubertad y en la adolescencia las modificaciones internas del alumno, producto de nuevas estructuras cognitivas, acortan también el tiempo que requiere de él el estudio y la investigación de problemas (sean de encontrar, prácticos o de demostrar).

La experiencia del docente en esta técnica es también un aspecto que vale la pena considerar. Por lo general, los profesores no han sido formados en esta técnica ni han construído sus conocimientos como alumno del profesorado a través de su uso. No descartamos la existencia de excepciones. En las materias metodológico-didácticas puede haberse informado acerca de la técnica. Nuestra experiencia nos muestra que no siempre esta información es correcta y que el concepto de técnica de resolución de problemas suele confundirse con el de ejercicios de rutina, de aplicación o problemas tipo. Y, cuando la emplea en el profesorado en sus prácticas docentes.lo que hace en realidad es hacer que los alumnos resuélvan ejercicios que en el fondo no son sino simples aplicaciones, más o menos mecánicas, de algunos conocimientos adquiridos a través de clases de exposición dialogada. De ahí que para nosotros es importante que el docente resuélva problemas, pruebe y demuestre propiedades, corolarios, teoremas por sí mismo para poder así entender la esencia misma de esta técnica. Este hecho le permitirá, a su vez, evaluar las dificultades con que se enfrentarán sus alumnos.

Bibliografía

1) Aranega C. Peme de - Vargas J. . Didáctica de la Matemática para la escuela Media. En preparación.
2) Bloom-Hasting y otros. Teoría y Evaluación del Aprendizaje. Vol. III. Ed. Troquel. Bs.As.
3) Courant - Robins. ¿Qué es la matemática?. Ed. Aguilar - Madrid.
4) Mills, L.C. y Dean P.M., Problem - Solving. Methods in Science Teaching. Columbia University. Nueva York 1160. (Traducción y adaptación con el título de "Introducción a la Resolución de problemas").
5) Piaget, J. Introducción a la epistemología genética I. El pensamiento matemático. Ed. Paidós.
6) Piaget. J. Tratado de lógica y conocimiento científico. Ed. Paidós.
7) Polya, G. "Problemas en los problemas". Conceptos de Matemática. Año X. N° 38. (Abril, Mayo, Junio 1986) pág. 7.

8) Polya, G., "Problemas", Conceptos de Matemática. Año IX, N° 35 (Julio, Agosto, Septiembre 1975) pág. 3.

9) Polya G. "La enseñanza y el aprendizaje". Conceptos de Matemática, Año XIII, N° 49 (Enero, Febrero, Marzo 1979). Pag. 10.

10) Polya, G. Como plantear y resolver problemas. Serie de Matemática. Ed. Trillas.

11) Sanchez, C., Aranega, C.P., Pujadas, M. Sugerencias de un método para la enseñanza-aprendizaje de la matemática en la Escuela Media. IV Reunión de Educación en la Matemática. Salta, Agosto, 1980.

12) Tirao J. . El Plano. Ed. DOCENCIA (S.A.) (Trabajo de CINAE). Bs. As., 1979.

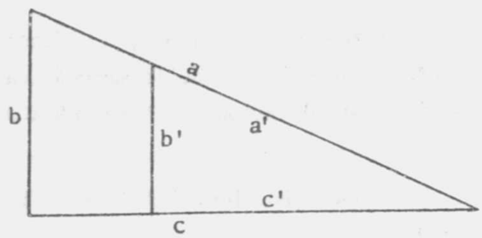
13) Universidad Nacional de Córdoba, IMAF - GECYT - Informes, clases y guías de evaluación de "Seminario Taller de Matemática" I (1977), II (1978), III(1979), IV (1981) y "Curso de Matemática" I (1979), II (1980), III (1981), IV (1982).

14) Aranega, C.P. de. La Matemática y la Educación del adolescente. Revista de Educación Matemática. UMA., Facultad de Matemática, Astronomía y Física - U.N.C., Vol. 2 N° 1. 1983.

Facultad de Matemática, Astronomía y Física.
Universidad Nacional de Córdoba.

GENERALIZACION DEL TEOREMA DE PITAGORAS

Con la notación de la figura se tiene: $aa' = bb' + cc'$.

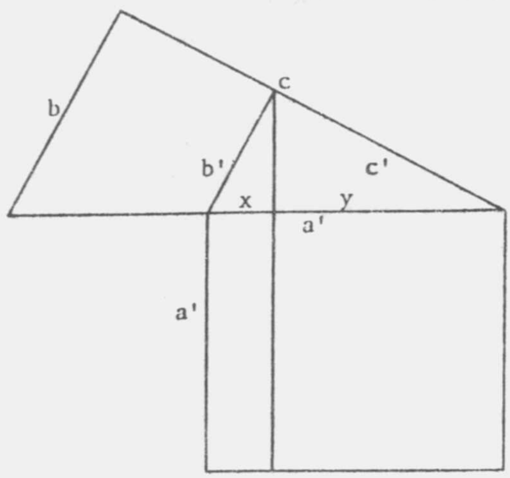


<u>Demostración</u>: Observando la figura siguiente se tiene por semejanza de triángulos

$$\frac{x}{b'} = \frac{b}{a} \qquad \text{o sea} \qquad x.a = b.b'$$

$$\frac{y}{c'} = \frac{c}{a} \qquad \text{o sea} \qquad y.a = c.c'$$

Sumando resulta $a.a' = a.(x+y) = b.b' + c.c'$. QED



(Enzo Gentile)