EL PROBLEMA DEL VAGABUNDO

Casilda Rupérez
José Raúl Martínez

Un vagabundo recorre una cuadra, de esquina a esquina, sobre la Avenida Colón. Independientemente de cómo llega a cada esquina, opta recorrer otra cuadra o volver hacía atrás con igual chance.

Una persona que observa al vagabundo se pregunta: *¿Si partió de Colón y General Paz, cuál es la chance de que llegue a Colón y San Martín, antes que a Colón y Jujuy?*.

Este problema, como veremos enseguida, lo podemos encuadrar matemáticamente dentro del llamado "Recorrido aleatorio". El modelo más simple de Recorrido Aleatorio puede describirse mediante el movimiento de una partícula que se desplaza por etapas o pasos a lo largo de una recta. En cada paso recorre una distancia unidad hacía la derecha o hacía la izquierda con probabilidades p y q respectivamente siendo $q = 1-p$ y $0 < p < 1$.

Además se supone que cada paso se da en cada unidad de tiempo, es decir que el n-ésimo paso se efectúa instantáneamente en el tiempo n .

El lector ya habrá imaginado cómo encuadrar el problema dentro de este modelo.

Podemos pensar a la Avenida Colón y su continuación Avenida Olmos como una recta, que denotaremos con R; a las esquinas de Colón y Gral Paz, Colón y San Martín y Colón y Jujuy como puntos b , 0 y c de dicha recta.

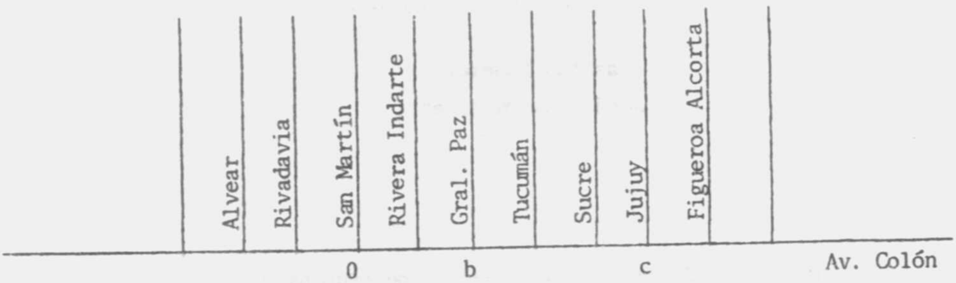

Figura 1

E interpretar igual chance como $p = q = \frac{1}{2}$; etapa o paso: el recorrido de una cuadra y unidad de tiempo: digamos 5 minutos, el tiempo que tarda en cubrir una etapa.

En estos términos la pregunta del comienzo será equivalente a la siguiente: ¿Cuál es la probabilidad de que el vagabundo partiendo de b llegue a 0 antes que a c?.

La solución al problema la daremos en forma general, es decir para cualquiera p y q con $0 < p < 1$ y $p + q = 1$.

Vamos a suponer que $b \geq 1$ y $c \geq 2$ (Caso contrario, la respuesta es inmediata).

Para cada $1 < j < c-1$, llamaremos p_j a la probabilidad de alcanzar 0 antes que c partiendo de j .

Con esta definición nuestro problema consiste en hallar p_b . Antes de detenernos a computar p_b , tratemos de describir p_j en general. *Partiendo de j, en una unidad de tiempo, podemos estar en j + 1 con probabilidad p y de allí alcanzar 0 antes que c o bien estar en j - 1 con probabilidad q y de allí alcanzar 0 antes que c .*

Es decir:

$$p_j = p.p_{j+1} + q.p_{j-1} \qquad (1)$$

Esto para cualquier $1 < j < c-1$

Observemos que: estando en 0, llegar a 0 antes que a c es el evento "cierto" luego $p_o = 1$; y estando en c, llegar a 0 antes que a c es el evento "imposible" luego $p_c = 0$.

Luego (1) vale para $1 \leq j \leq c-1$.

Recordando que $p + q = 1$, la ecuación (1) puede ser escrita

$$(p+q)p_j = p.p_{j+1} + q\, p_{j-1}$$

O equivalentemente

$$p_{j+1} - p_j = \frac{q}{p} (p_j - p_{j-1}) \qquad (2)$$

Apliquemos la relación anterior a $j = 1$

$$p_2 - p_1 = \frac{q}{p} (p_1 - p_o)$$

Ahora la apliquemos para $j = 2$, nos queda:

$$p_3 - p_2 = \frac{q}{p} (p_2 - p_1)$$

Reemplacemos $p_2 - p_1$, por su igual anterior, en esta última ecuación

$$p_3 - p_2 = (\frac{q}{p})^2 (p_1 - p_o)$$

Repitiendo el procedimiento anterior para $j = 3$ se tiene:

$$p_4 - p_3 = \frac{q}{p} (p_3 - p_2)$$
$$= (\frac{q}{p})^3 (p_1 - p_o)$$

En general para $j = k$ con $1 \leq k \leq c-1$ resulta:

$$p_{k+1} - p_k = (\frac{q}{p})^k (p_1 - p_o)$$

O equivalentemente

$$p_k - p_{k+1} = (\frac{q}{p})^k (p_o - p_1) \qquad (3)$$

Observemos que para $k = 0$ (3) sigue valiendo, entonces (3) vale para $0 \leq k \leq c-1$.

Sumando sobre k ambos miembros de (3) resulta:

$$(p_o-p_1) + (p_1-p_2) + \ldots + (p_{c-2}-p_{c-1}) + (p_{c-1}-p_c) = (p_o-p_1) \sum_{k=o}^{c-1} (\tfrac{q}{p})^k$$

Simplificando términos semejantes se tiene:

$$p_o-p_c = (p_o-p_1) \sum_{k=o}^{c-1} (\tfrac{q}{p})^k$$

Como $p_o = 1$ y $p_c = 0$ resulta:

$$1 = (p_o-p_1) \sum_{k=o}^{c-1} (\tfrac{q}{p})^k \qquad (4)$$

A esta altura es necesario hacer la siguiente suposición:

$\frac{q}{p} \neq 1$. Entonces (4) resulta:

$$1 = (p_o-p_1) \frac{1-(\frac{q}{p})^c}{1-(\frac{q}{p})}$$

Despejando $p_o - p_1$ se tiene:

$$p_o - p_1 = \frac{1}{\dfrac{1-(\frac{q}{p})^c}{1-(\frac{q}{p})}} \qquad (5)$$

Ya que $p_c = 0$, podemos escribir para cada $0 \leq j \leq c$

$$p_j = p_j - p_c = \sum_{i=j}^{c-1} (p_i-p_{i+1}) = \sum_{i=j}^{c-1} (p_o-p_1) (\tfrac{q}{p})^i$$

La última igualdad sigue de (3).

Por lo tanto

$$p_j = (p_o-p_1) \frac{(\frac{q}{p})^j - (\frac{q}{p})^c}{1-(\frac{q}{p})}$$

Reemplazando (p_o-p_1) por su igual de (5) tenemos:

$$p_j = \frac{(\frac{q}{p})^j - (\frac{q}{p})^c}{1 - (\frac{q}{p})^c} \qquad (6)$$

para $0 \leq j \leq c$ y $\frac{q}{p} \neq 1$.

Ahora si $\frac{q}{p} = 1$, (3) se escribe

$$p_k - p_{k+1} = p_o - p_1$$

Sumando sobre k ambos miembros de esta última igualdad y simplificando términos semejantes tenemos:

$$p_o - p_c = c(p_o - p_1)$$

Como $p_o = 1$ y $p_c = 0$ resulta:

$$p_o - p_1 = \frac{1}{c} \qquad (7)$$

Como antes para cada $0 \leq j \leq c$

$$p_j = p_j - p_c = \sum_{i=j}^{c-1} (p_i - p_{i+1}) = \sum_{i=j}^{c-1} (p_o - p_1) = (c-j)\,(p_o - p_1)$$

Por lo tanto de (7)

$$p_j = \frac{c - j}{c} \qquad (8)$$

Luego (6) y (8) nos dan una completa descripción de p_j. Como b es un punto interior del intervalo $[0, c]$ y habíamos dicho que en nuestro problema $p = q = \frac{1}{2}$, se tiene:

$$p_b = \frac{c - b}{c}$$

Reemplazando b por 2 y c por 5 (Ver figura 1) resulta:

La probabilidad de que el vagabundo llegue a Colón y San Martín, antes que a Colón y Jujuy, habiendo partido de Colón y Gral. Paz igual a $\frac{3}{5}$.

es decir

$$p_2 = \frac{3}{5}$$

Una pregunta que surge inmediatamente es la siguiente:
¿Cuál será la probabilidad de llegar a c antes que a 0 partiendo de b?

Llamemos q_b a dicha probabilidad.

Como se habrá advertido, el cómputo de q_b puede hacerse siguiendo un razonamiento similar al que se utilizó para determinar p_b. Sólo debe tenerse en cuenta que $q_o = 0$ y $q_c = 1$.

Si $\frac{q}{p} \neq 1$ resulta

$$q_b = \frac{1 - (\frac{q}{p})^b}{1 - (\frac{q}{p})^c} \qquad (9)$$

y si $\frac{q}{p} = 1$

$$q_b = \frac{b}{c} \qquad (10)$$

(Observemos que en nuestro problema $q_2 = \frac{2}{5}$).

Dejamos como ejercicio para el lector la verificación de (9) y (10).

No es difícil ver que

$$p_j + q_j = 1 \qquad \text{para} \qquad 0 \leq j \leq c$$

Esta última relación es muy interesante pues nos dice que partiendo del interior del intervalo [0, c], la probabilidad de alcanzar la frontera (0 ó c) es 1.

Es decir que el vagabundo partiendo de la esquina de Colón y Gral. Paz llegará a las esquinas de Colón y San Martín ó Colón y Jujuy "casi seguramente" (es decir con probabilidad 1).

El lector podrá decir que el vagabundo puede, bajo las condiciones del planteo del problema, caminar de una esquina a otra indefinidamente. Y tendrá razón. Lo que sucede es que tal posibilidad lógica tiene probabilidad cero de ocurrir, es decir no ocurrirá "casi nunca".

Son muchas las preguntas que se pueden formular relacionadas con el problema inicial, como por ejemplo:

¿Cuál es la probabilidad de que en un intervalo finito de tiempo llegue el vagabundo a Colón y San Martín, habiendo partido de Colón y Gral Paz?.

¿Cuál es la probabilidad de que llegue a la esquina de Colón y San Martín, habiendo partido de Colón y Gral. Paz?.

¿Cuál es la probabilidad de que el vagabundo llegue a una esquina determinada?.

¿Cuánto tiempo permanece el vagabundo caminando entre las esquinas de Colón y San Martín y Colón y Tucumán?

Sus respuestas necesitan de la introducción de algunos otros conceptos tales como: variables aleatorios, sucesión de variables aleatorios, Propiedad de Markov.

Uno de los problemas clásicos de la Teoría de Probabilidad "La ruina de un jugador", tiene su solución dentro del modelo de "Recorrido Aleatorio".

Dicho problema consiste: dos jugadores A y B se enfrentan en una serie de partidas. A tiene probabilidad p de ganar en cada partida y B probabilidad q (q = 1-p). Se supone que los resultados de las partidas son independientes (por ejemplo el juego puede consistir en lanzar repetidamente una moneda). En cada partida el perdedor paga, digamos, 1 austral al vencedor.

Ahora bien, si A tiene a australes y B dispone de b australes al comenzar el torneo y si el juego prosigue hasta que uno de ellos se arruine, ¿cuál es la probabilidad de que se arruine A ?

Este problema fue desarrollado por Fermat y Pascal (Oeuvres de Fermat) y resuelto en general por Montmort (Essai d'Analyse sur les jeux de Hasard 1714).

Para terminar quisiéramos mencionar que, eliminando algunas características accidentales, es posible generalizar el modelo de Camino Aleatorio, llegando a los conceptos de Cadena y Procesos de Markov. Modelos generales que permiten englobar un conjunto más amplio de aplicaciones, tales como: Procesos de contagio, estudios de genética, de sociología, de una masa de gas, etc.

Bibliografía: Introducción a la Teoría de Probabilidades y sus Aplicaciones. W. Feller, Vol I. Editorial Limusa.

"Probability and Statistics". Meyer Dwass. W.A. Benjamin, Inc. N. York - 1970.

Facultad de Matemática, Astronomía y Física.
Universidad Nacional de Córdoba.