GEOMETRIA HIPERBOLICA II

Areas, fórmulas trigonométricas y congruencia de triángulos

J.O. Boggino y R.J. Miatello

En esta nota continuamos el estudio de la geometría hiperbólica iniciado en la nota anterior Geometría Hiperbólica I (GHI), ya publicada en ésta Revista. En ese trabajo se demostraron diversas propiedades de las transformaciones de Möbius y se determinaron las rectas hiperbólicas.

En la presente, estudiamos en primer lugar el área hiperbólica de algunas regiones. Como caso particular (ver lema 1.3) establecemos que el área de un triángulo, y por ende la de un polígono, está determinada por sus ángulos; resultado curioso en extremo si el lector está predispuesto a dejarse guiar por la intuición formada sobre la geometría euclidiana.

En la segunda sección (ver 2.1, 2.2, 2.3) se encuentran fórmulas trigonométricas análogas a las de la geometría euclidiana, en estas intervienen las funciones hiperbólicas cosh, senh, además de las trigonométricas. Finalmente el teorema de congruencia de triángulos marca nuevamente la notable diferencia con la geometría euclidea, al concluir que dos triángulos que tienen sus ángulos respectivamente iguales son congruentes.

Utilizaremos las notaciones y resultados de Geometría Hiperbólica I. Recordamos que $\mathbf{C}$ y $\mathbf{E}$ son los conjuntos de números complejos y reales respectivamente.

$I = \{ti \mid t \in \mathbb{E}\}$, $I^+ = \{ti \mid t > 0\}$ y $H = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$. Al conjunto de transformaciones de Möbius $A(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, con $a,b,c,d \in \mathbb{E}$ y $ad - bc = 1$ lo denotamos por G. Estos son movimientos rígidos del semiplano superior H.

1. *Circunferencias y Polígonos.*

Consideremos la circunferencia hiperbólica

$$C(z_o, r) = \{z \in H \mid d(z, z_o) = r\}$$

Sea $A_\theta(z) = \frac{z\cos\theta + \operatorname{sen}\theta}{-z\operatorname{sen}\theta + \cos\theta}$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$. Como $A_\theta \in G$ y $A_\theta(i) = i$ $d(i, A_\theta(z)) = d(A_\theta(i), A_\theta(z)) = d(i,z)$, es decir $A_\theta(C(i,r)) \subset C(i,r)$. De igual forma $A_{-\theta}(C(i,r)) \subset C(i,r)$, o $C(i,r) \subset A_\theta(C(i,r))$. Luego

$$A_\theta(C(i,r)) = C(i,r).$$

Lemma 1.1. Si $z \in H$ y $z \neq i$, existe θ, $0 \leqslant \theta < \pi$ tal que $A_\theta(z) = si$, $s > 1$.

Demostración: Si $z \in H$ y $z \neq i$, existe θ, $0 \leqslant \theta < \pi$ tal que $A_\theta(z) \in I^+$ (ver nota posterior a la prueba del lema 1.10, GHI). Es claro que $A_\theta(z) \neq i$. Si $\operatorname{Im} A_\theta(z) > 1$, la prueba termina. Suponemos $A_\theta(z) = ti$, $t < 1$. Sea $\beta = \frac{\pi}{2}$, luego $A_\beta \circ A_\theta(z) = t^{-1}i$ y $t^{-1} > 1$. Además $A_\beta \circ A_\theta = A_{\beta+\theta}$, completando así la demostración.

Por el lema anterior $C(i,r) = \{z \mid z = A_\theta(si) = \frac{si\cos\theta + \operatorname{sen}\theta}{-si\operatorname{sen}\theta + \cos\theta}$, $0 \leqslant \theta < \pi\}$, para $s = e^r$. Sea $B(z) = \frac{z + si}{-siz + 1}$; se verifica que $B(tg(\theta - \pi)) = A_\theta(si)$, si $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ y $B(tg\,\theta) = A_\theta(si)$, si $0 \leqslant \theta < \frac{\pi}{2}$. Luego.

$$C(i,r) = \{z \mid z = B(tg\,\theta) \mid -\tfrac{\pi}{2} < \theta < \tfrac{\pi}{2}\} \cup \{\tfrac{i}{s}\}$$

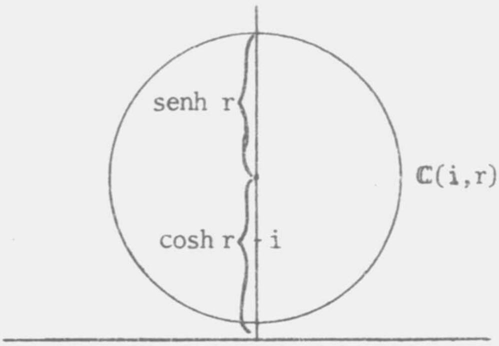
(notar que si bien B es una transformación de Möbius, $B \notin G$).

Por otro lado $\mathbb{E} = \{y = tg\,\theta \mid -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\}$, así $C(i,r) = B(\mathbb{E}) \cup \{\frac{i}{s}\}$

$B(\mathbb{E})$ es una circunferencia perpendicular a I, sus puntos verificarán una ecuación de la forma $x^2 + (y - y_o)^2 = \rho^2$. Como $i(y_o + \rho)$, $i(y_o - \rho)$ pertenecen a $C(i,r)$, tenemos que $y_o + \rho = e^r$, $y_o + \rho = e^{-r}$, de donde $y_o = \cosh r$, $\rho = \operatorname{senh} r$. Luego

$$C(i,r) = \{z = x + iy \mid x^2 + (y - \cosh r)^2 = \operatorname{senh}^2 r\}$$

Recordamos: $\cosh r = \dfrac{e^r + e^{-r}}{2}$ y $\operatorname{senh} r = \dfrac{e^r - e^{-r}}{2}$



Ejercicio: Si $z = a + ib$, pruebe que la ecuación de $C(z,r)$ es

$$(x - a)^2 + (y - b\cosh r)^2 = b^2 \operatorname{senh}^2 r.$$

Lema 1.2: La longitud hiperbólica de $C(z,r)$ es $2\pi \operatorname{senh} r$ y el área hiperbólica del círculo limitado es $2\pi(\cosh r - 1)$.

Demostración: Sea $A \in G$ tal que $A(z) = i$ (ver demostración lema 1.10(b) G.H.I.). Se tiene que $A(C(z,r) = C(i,r)$, luego es suficiente calcular la longitud hiperbólica de $C(i,r)$.

Sea $\sigma(t) = \operatorname{senh} r . \cos t + i(\cosh r + \operatorname{senh} r . \operatorname{sen} t)$, $-\pi \leqslant t \leqslant \pi$. De la ecuación de $C(i,r)$ se sigue que la curva $\sigma(t)$ recorre $C(i,r)$. Así,

$$\ell(\sigma) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(\operatorname{senh}^2 r\,(\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t))^{1/2}}{\cosh r + \operatorname{senh} r \operatorname{sen} t}\, dt = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dt}{\operatorname{cotgh} r + \operatorname{sen} t}$$

donde $\operatorname{cotgh} r = \dfrac{\cosh r}{\operatorname{senh} r}$ (igualmente usaremos $\operatorname{tgh} r = \dfrac{\operatorname{senh} r}{\cosh r}$). Sea $u = \operatorname{tg}\left(\frac{t}{2}\right)$, luego $du = \frac{1}{2}(1 + u^2)dt$ y $\operatorname{sen} t = \frac{2u}{1+u^2}$; de allí que

$$\ell(\sigma) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2\,du}{(1+u^2)(\operatorname{cotgh} r + \frac{2u}{1+u^2})} = \frac{2}{\operatorname{cotgh} r} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{u^2+2u \operatorname{tgh} r+1}$$

$$= 2 \operatorname{tgh} r \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{(u+\operatorname{tgh} r)^2 + (1-\operatorname{tgh}^2 r)} .$$

Sea $v = \dfrac{u + \operatorname{tgh} r}{\sqrt{1 - \operatorname{tgh}^2 r}}$, $dv = \dfrac{du}{\sqrt{1 - \operatorname{tgh}^2 r}}$; con este cambio de variables completamos el cálculo.

$$\ell(\sigma) = 2 \operatorname{tgh} r \sqrt{1-\operatorname{tgh}^2 r} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dv}{(1-\operatorname{tgh}^2 r)v^2 + (1-\operatorname{tgh}^2 r)}$$

$$= \frac{2 \operatorname{tgh} r}{\sqrt{1-\operatorname{tgh}^2 r}} \operatorname{arc\,tg} (v) \Big|_{-\infty}^{+\infty} = 2\pi \operatorname{senh} r ,$$

ya que $\operatorname{arc\,tg} (\pm\infty) = \pm \frac{\pi}{2}$, $1-\operatorname{tgh}^2 r = 1- \dfrac{\operatorname{senh}^2 r}{\cosh^2 r} = \dfrac{1}{\cosh^2 r}$.

Definimos el área hiperbólica de una región $R \subset H$ como

$$A(R) = \iint_R \frac{dx\,dy}{y^2}$$

(Recordemos que el área euclídea está dada por $\iint dx\,dy$). A la expresión $\dfrac{dx\,dy}{y^2}$ se la suele llamar elemento de área. Las motivaciones que conducen a la definición de área hiperbólica, así como la interpretación del elemento de área requieren de otros elementos no presentados aquí y escapan al objetivo de estas notas. Ellos pueden encontrarse en los textos usuales de geometría diferencial.

Se puede demostrar usando la fórmula del cambio de variable, que un movimiento rígido *preserva el área de una región*. Utilizaremos este hecho en lo que resta de estas notas.

Completamos ahora la demostración del lema. Debemos calcular el área hiperbólica del círculo limitado por $C(i,r)$.

Sea $\sigma_s(t) = \operatorname{senh} s.\cos t + i\,(\cosh s + \operatorname{senh} s \operatorname{sen} t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$; $\sigma_s(t)$ recorre la circunferencia de centro i y radio s, luego

$$A(C(i,r)) = \int_0^r \ell(\sigma_s)ds = \int_0^r 2\pi \operatorname{senh} s\, ds = 2\pi(\cosh r - 1).$$

Nota: Observe que para circunferencias "pequeñas" de radio r la longitud y el área hiperbólicas se pueden aproximar por:

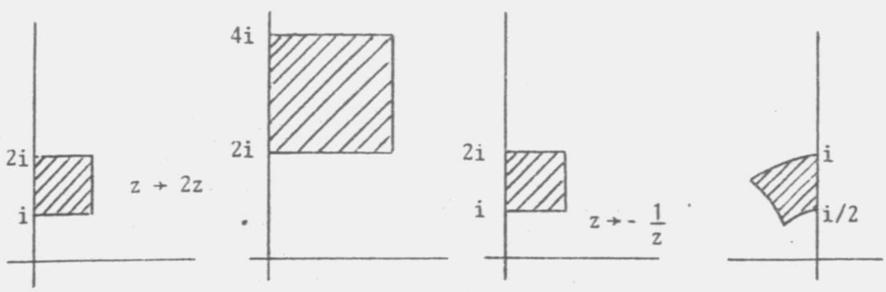
$$\ell = 2\,(r + \frac{r^3}{3!} + \frac{r^5}{5!} + \ldots) \sim 2\pi.r\ ,$$

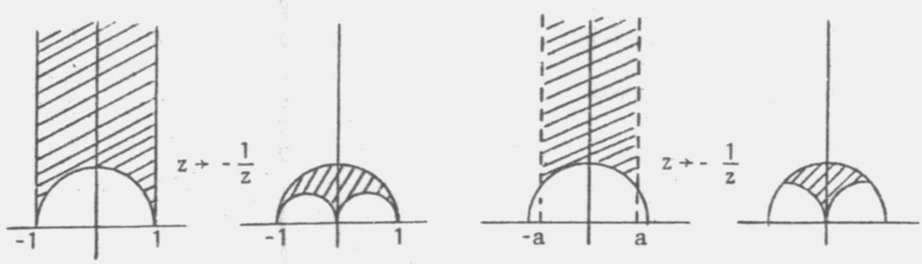
$$A = 2\pi(\frac{r^2}{2} + \frac{r^4}{4!} + \frac{r^6}{6!} + \ldots) \sim \pi\, r^2$$

las fórmulas de la geometría Euclidiana.

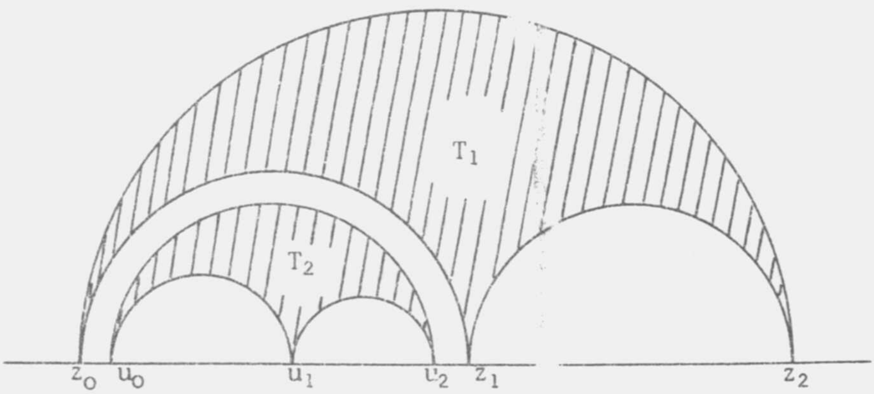
Definición: Se dice que dos regiones R_1 y R_2 de H son congruentes si existe un movimiento rígido B, tal que $B(R_1) = R_2$.

Algunos ejemplos:





Veamos que las regiones T_1 y T_2 de la figura siguiente son congruentes. Por el lema 1.10(a) existe $B \in G$ tal que $B(z_o) = u_o$, $B(z_1) = u_1$ y $B(z_2) = u_2$. B transforma el arco de circunferencia $\widehat{z_o z_1}$ en un arco de circunferencia o en una semirrecta vertical. Es claro que una semirrecta vertical no puede ser, pues debería contener a u_o y u_1; luego es un arco de circunferencia con centro en $\mathbb{R}$ y debe unir u_o y u_1. Así $B(\widehat{z_o z_2}) = \widehat{u_o u_1}$. Análogamente $B(\widehat{z_1 z_2}) = \widehat{u_1 u_2}$ y $B(\widehat{z_o z_2}) = \widehat{u_o u_2}$; de donde no es difícil concluir que $B(T_1) = T_2$.

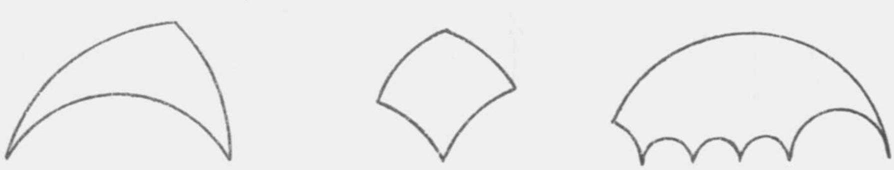


Ejercicio: Analice la congruencia entre figuras poligonales de cuatro lados.

Ejercicio: Dé varios ejemplos de regiones congruentes y no congruentes.

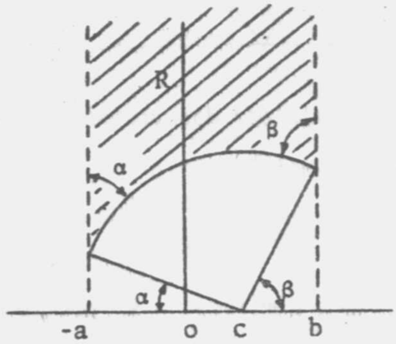
Ejercicio: Dada $R = \{z \mid -1 \leqslant \operatorname{Re}(z) \leqslant 1, |z| \geqslant 1\}$ determine $B(R)$ si $B(z) = 4z + 1$, $B(z) = \frac{z}{z+1}$ y $B(z) = \frac{z}{-2z+1}$.

Nuestro próximo objetivo será calcular el área de regiones poligonales, por ejemplo:



triángulo cuadrilátero hexágono

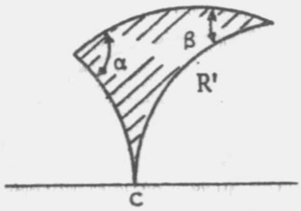
Consideremos primero la figura



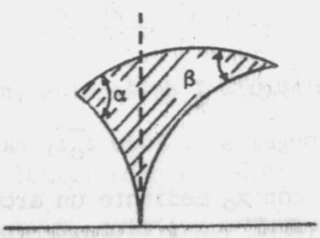
$$A(R) = \iint_R \frac{dx\,dy}{y^2} = \int_{-a}^{b}\int_{\sqrt{r^2-(x-c)^2}}^{+\infty} \frac{dx\,dy}{y^2} = \int_{-a}^{b} \frac{dx}{\sqrt{r^2-(x-c)^2}} = \int_{-a-c}^{b-c} \frac{du}{\sqrt{r^2-u^2}}$$

$$= \text{arc sen}\left(\frac{b-c}{r}\right) - \text{arc sen}\left(\frac{-a-c}{r}\right) = \left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) + \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \pi - (\alpha+\beta)$$

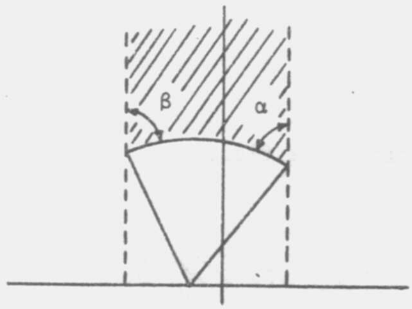
Sea ahora una región del tipo



Trasladamos R' vía $S_1(z) = z-c$



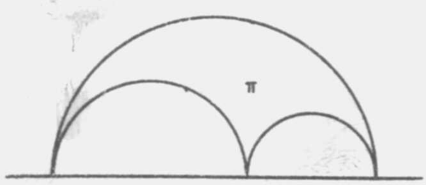
y luego vía $S_2(z) = -\frac{1}{z}$

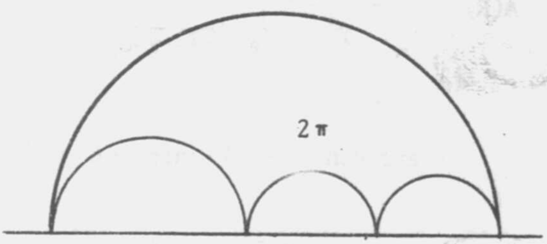


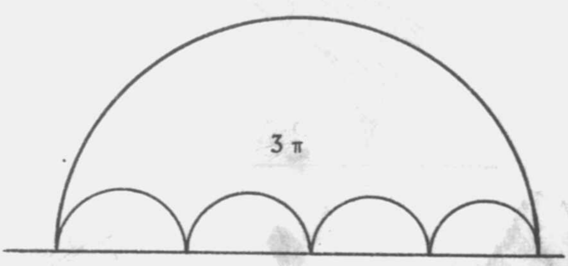
obteniéndo así una región limitada por dos rectas verticales como R, con ángulos internos α y β. Concluimos que

$$A(R') = \pi-(\alpha+\beta)$$

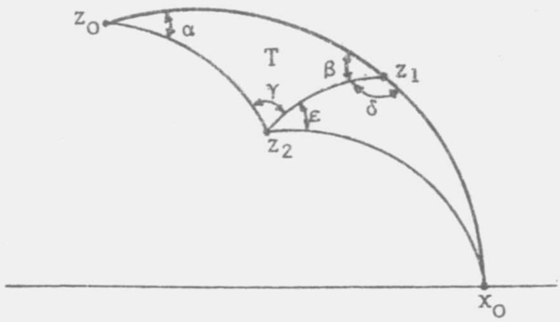
Por subdivisión en regiones similares a R' podemos calcular las siguientes áreas:







Consideremos ahora un triángulo T de ángulos internos α,β , γ y vértices z_0, z_1, z_2. Prolongamos el lado $\widehat{z_0 z_1}$ hasta que incida en $\mathbb{E}$ en x_0, unimos el vértice z_2 con x_0 mediante un arco de circunferencia con centro en $\mathbb{E}$.



Denotamos con T_1 la región determinada por $\widehat{z_0 z_1}$, $\widehat{z_1 x_0}$ y $\widehat{z_2 x_0}$.

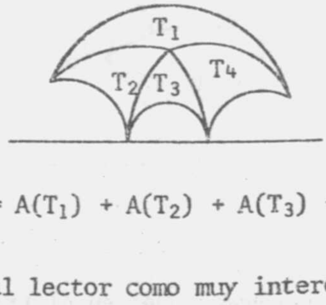
$$A(T) = A(T_1) - A(T_2) = [\pi-(\alpha+\gamma+\varepsilon)] \quad [\pi-(\varepsilon+\delta)] = \pi-\alpha-\gamma-(\pi-\delta)$$
$$= \pi-(\alpha+\beta+\delta).$$

Así hemos demostrado:

Lema 1.3. Un triángulo hiperbólico de ángulos internos α, β y γ tiene área hiperbólica $A = \pi-(\alpha+\beta+\gamma)$. En particular $\alpha+\beta+\gamma < \pi$.

Corolario 1.4. Un polígono hiperbólico de n lados, con ángulos internos $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$, tiene área hiperbólica $A = (n-2)\pi-(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n)$.

El corolario se demuestra subdividiendo en triángulos interiores y aplicando el lema anterior. Por ejemplo, en el caso



$$A(R) = A(T_1) + A(T_2) + A(T_3) + A(T_4)$$

Sugerimos al lector como muy interesante, leer el punto 7.1. Area del triángulo. Santaló L.A. "Geometrías no Euclidianas (Cua̲dernos, Eudeba N° 45).

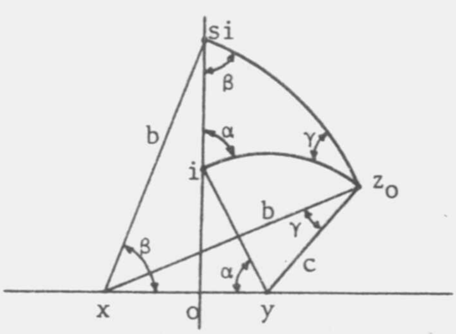
2. *Fórmulas Trigonométricas.*

En esta sección establecemos fórmulas trigonométricas para triángulos hiperbólicos. Serán consecuencias de éstas los distintos criterios de congruencia de triángulos.

Sea T un triángulo hiperbólico con ángulos internos α, β y γ. Mediante un movimiento rígido podemos llevar uno de los vértices a i y otro vértice a si, $s > 1$ (ver demostración lema 1.10, GHI y lema 1.1). Luego un lado del triángulo se transforma en el segmento $\widehat{i,si}$. Como

los movimientos rígidos preservan ángulos y longitudes, podemos trabajar con el nuevo triángulo en lugar del original.

Los lados no verticales del triángulo son arcos de circunferencias. Sean x e y los respectivos centros en el eje real y sean b y c los respectivos radios. Sea a la distancia entre los centros y z_0 el tercer vértice del triángulo hiperbólico. Aunque en el dibujo el vértice z_0 tiene parte real positiva, el razonamiento siguiente es válido



aún cuando sea negativa.

En la figura anterior observamos que: en el triángulo ioy, $\operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{c}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\overline{oy}}$, es decir $c = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}$ y $\overline{oy} = \operatorname{cotg}\alpha$. En el triángulo xosi, sen $\beta = \frac{s}{b}$, tg $\beta = \frac{s}{\overline{xo}}$, es decir $b = \frac{s}{\text{sen } \beta}$ y $\overline{xo} = s \text{ cotg } \beta$. Luego $a = s \text{ cotg } \beta + \text{cotg } \alpha$.

En el triángulo xyz_o, el teorema del coseno asegura que $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \gamma$. Reemplazando a, b y c por sus respectivos equivalentes resulta

$$s^2(\text{sen } \alpha \text{ sen } \beta) - 2s(\cos \alpha \cos \beta + \cos \gamma) + \text{sen } \alpha \text{ sen } \beta = 0.$$

Esta es una ecuación de segundo grado en s, con coeficiente de s^2 y término independiente iguales; así, si s es solución, s^{-1} también lo es. Por otro lado, recordando la expresión de la suma de las raíces de una tal ecuación en términos de los coeficientes, se tiene

$$s + s^{-1} = \frac{2(\cos \alpha \cos \beta + \cos \gamma)}{\text{sen } \alpha \text{ sen } \beta}$$

Si $d = d(i, si)$, por los cálculos de la sección 2 (GHI) $d = \log(s)$ o $s = e^d$. Luego

$$\frac{e^d + e^{-d}}{2} = \frac{\cos \alpha \cos \beta + \cos \gamma}{\text{sen } \alpha \text{ sen } \beta};$$

tenemos así probado el siguiente lema:

Lema 2.1. Dado un triángulo hiperbólico con lados de longitud a,b,c y ángulos opuestos A, B y C, se tiene

(1) $\quad \text{sen } A \text{ sen } B \cosh c = \cos A \cos B + \cos C$

Corolario 2.2. Dado un triángulo rectángulo (hiperbólico) de hipotenusa c y catetos a, b, con ángulos opuestos A, B y C se tiene

(2) $\cosh c = \cosh a . \cosh b$

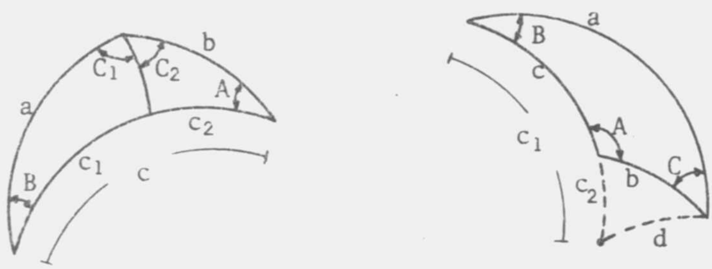
(3) $\cosh c = \text{cotg } A. \text{ cotg } B$, $\cosh a = \frac{\cos A}{\text{sen } B}$, $\cosh b = \frac{\cos B}{\text{sen } A}$

Demostración: En este caso $\cos C = 0$, así de (1) resulta $\cosh c = \text{cotg } A . \text{cotg } B$. Intercambiando c con b y c con a en (1) se obtienen las relaciones para cosh a y cosh b. Finalmente (2) es con secuencia de (3).

Lema 2.3. Dado un triángulo hiperbólico de lados a, b, c y ángulos opuestos respectivos A, B, C, se verifica

(4) $$\cosh c = \cosh a \cosh b - \operatorname{senh} a \operatorname{senh} b \cos C$$

Demostración: Trazamos la perpendicular desde el vértice del ángulo C al lado c, o a su prolongación (esta construcción es válida en la llamada geometría absoluta, pues en su demostración no se hace uso del 5° postulado).



Se tiene $c = c_1 + c_2$ o $c = c_1 - c_2$, según el caso. Suponemos que $c = c_1 + c_2$. El otro caso es análogo y queda como ejercicio para el lector. Se usarán las fórmulas (1), (2) y (3) aplicadas a los triángulos rectángulos hiperbólicos resultantes de la construcción, d denota el cateto común a los dos triángulos rectángulos hiperbólicos construidos. De (2)

$$\cosh a \cosh b = \cosh^2 d \cosh c_1 \cosh c_2;$$

Utilizando las identidades $\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \operatorname{senh} x \operatorname{senh} y$ y $\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$, se tiene:

$$\begin{aligned}\cosh a \cosh b - \cosh c &= (1 + \operatorname{senh}^2 d) \cosh c_1 \cosh c_2 - \cosh(c_1+c_2)\\ &= \operatorname{senh}^2 d \cosh c_1 \cosh c_2 - \operatorname{senh} c_1 \operatorname{senh} c_2.\end{aligned}$$

Trabajamos sobre el último miembro de la igualdad anterior. Por (3)

$$\operatorname{senh}^2 d = \frac{\cos^2 A - \operatorname{sen}^2 C_2}{\operatorname{sen}^2 C_2} \quad \text{y} \quad \operatorname{senh}^2 d = \frac{\cos^2 B - \operatorname{sen}^2 C_1}{\operatorname{sen}^2 C_1}$$

(nótese que, en particular, en un triángulo rectángulo hiperbólico de ángulos no rectos α y β, siempre es $\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \beta > 0$).

En consecuencia

$$\operatorname{senh}^2 d = \frac{\sqrt{\cos^2 A - \operatorname{sen}^2 C_2}\,\sqrt{\cos^2 B - \operatorname{sen}^2 C_1}}{\operatorname{sen} C_1 \operatorname{sen} C_2}$$

Análogamente se obtiene

$$\operatorname{senh} c_1 \operatorname{sen} c_2 = \frac{\sqrt{\cos^2 C_1 - \operatorname{sen}^2 B}\,.\,\sqrt{\cos^2 C_2 - \operatorname{sen}^2 A}}{\operatorname{sen} A\,.\operatorname{sen} B} =$$

$$= \frac{\sqrt{\cos^2 B - \operatorname{sen}^2 C_1}\,.\,\sqrt{\cos^2 A - \operatorname{sen}^2 C_2}}{\operatorname{sen} A\,.\,\operatorname{sen} B}$$

Usando ahora que $c = c_1 + c_2$ y (3) se obtiene

$$\operatorname{senh}^2 d \cosh c_1 \cosh c_2 - \operatorname{senh} c_1 \operatorname{senh} c_2 =$$

$$= \frac{\sqrt{\cos^2 A - \operatorname{sen}^2 C_2}\,.\,\sqrt{\cos^2 B - \operatorname{sen}^2 C_1}}{\operatorname{sen} A.\operatorname{sen} B.\operatorname{sen} C_1.\operatorname{sen} C_2} (\cos C_1 \cos C_2 - \operatorname{sen} C_1 \operatorname{sen} C_2)$$

$$= \frac{\sqrt{\cos^2 A - \operatorname{sen}^2 C_2}\,.\,\sqrt{\cos^2 B - \operatorname{sen}^2 C_1}}{\operatorname{sen} A.\operatorname{sen} B.\operatorname{sen} C_1.\operatorname{sen} C_2}\,.\,\cos C.$$

Por otra parte

$$\operatorname{senh} a\,.\,\operatorname{senh} b = \sqrt{\cosh^2 a - 1}\,.\sqrt{\cosh^2 b - 1}$$

$$= \sqrt{\operatorname{cotg}^2 C_1\,.\,\operatorname{cotg}^2 B - 1}\,.\sqrt{\operatorname{cotg}^2 C_2 \operatorname{cotg} A - 1}$$

$$= \frac{\sqrt{\cos^2 C_1 \cos^2 B - \operatorname{sen}^2 C_1 \operatorname{sen}^2 B}\,.\,\sqrt{\cos^2 C_2 \cos^2 A - \operatorname{sen}^2 C_2 \operatorname{sen}^2 A}}{\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C_1 \operatorname{sen} C_2}$$

$$= \frac{\sqrt{\cos^2 C_1 - \operatorname{sen}^2 B}\,.\,\sqrt{\cos^2 C_2 - \operatorname{sen}^2 A}}{\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C_1 \operatorname{sen} C_2}$$

De donde $\operatorname{senh}^2 d \cosh c_1 \cosh c_2 - \operatorname{senh} c_1 \operatorname{senh} c_2 = \operatorname{senh} a \operatorname{senh} b \cos C$, lo que completa la demostración del lema.

Enunciamos ahora el teorema fundamental de congruencia de triángu los.

Teorema 2.4. Dos triángulos hiperbólicos T_1 y T_2 son congruentes si se cumple una (y por lo tanto cada una) de las siguientes:

(a) T_1 y T_2 tienen sus lados respectivamente iguales.

(b) T_1 y T_2 tienen dos lados y el ángulo comprendido respectivamente iguales.

(c) T_1 y T_2 tienen un lado y los ángulos adyacentes respectivamente iguales.

(d) T_1 y T_2 tienen los tres ángulos respectivamente iguales.

Demostración: Veamos primero que (a), (b), (c) y (d) son equivalentes. Se debe tener presente que las fórmulas (1) y (4) siguen siendo válidas si permutamos las letras; es incluso conveniente que el lector escriba las tres posibles versiones de la fórmula (1) y de la fórmula (4).

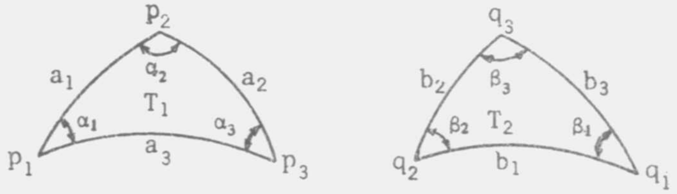
Según notamos en el lema 1.3, los ángulos internos de un triángulo hiperbólico son menores que π; además $\cos\alpha$ determina a α, si $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$.

De las fórmulas (1) se deduce que los ángulos determinan los lados; análogamente por las fórmulas (4), los lados determinan los ángulos. Por otra parte, conocido un lado (digamos c) y los ángulos adyacentes (A y B), por (1) queda determinado C; nuevamente (1) con las letras permutadas determinan a y b. Si por el contrario, se conocen los lados a, b y el ángulo C, por (4) queda determinado el lado c; nuevamente (4) con las letras permutadas determina los ángulos A y B.

Veamos ahora que T_1 y T_2 son congruentes. Sean α_i, p_i, a_i, los ángulos, vértices y lados respectivamente de T_1 $(i = 1,2,3)$; β_i, q_i, b_i, los ángulos, vértices y lados respectivamente de T_2 $(i = 1,2,3)$. Suponemos $\alpha_1 = \beta_1$, $a_1 = b_1$.

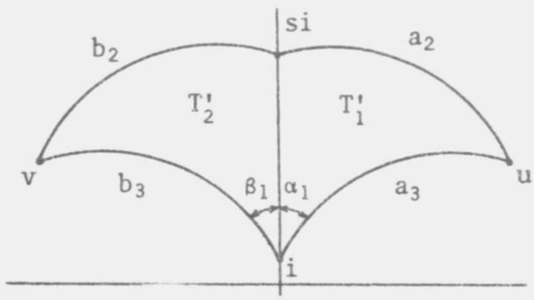
Existen movimientos rígidos B_j, $(j = 1,\ 2)$ tales que:

$$B_1(P_1) = i \quad B_1(P_2) = si, \; s > 1$$
$$B_2(q_1) = i \quad B_2(q_2) = ti, \; t > 1$$



(ver demostración lema 1.10, GHI y lema 1.1). Como $d(p_1, p_2) =$ $= a_1$, $d(q_1, q_2) = b_1$ y $a_1 = b$, resulta $s = t$.

Sean $T_1' = B_1(T_1)$, $T_2' = B_2(T_2)$. T_1' y T_2' tienen un lado en común, el lado $\widehat{isi}$.



Sean u y v los vértices de T_1' y T_2' respectivamente que no pertenecen a I^+. Si Re(u) y Re(v) tienen signos distintos, podemos aplicar la reflexión $S(z) = -\bar{z}$ (que es un movimiento rígido y fija los puntos de I^+) al triángulo T_2' , así $S(T_2')$ tiene un lado común con T_1 y el vértice S(v) con parte real del mismo signo que Re(u). Podemos suponer entonces que Re(u) y Re(v) tienen el mismo signo.

Las semirrectas hiperbólicas que nacen en i y pasan por u y v, son coincidentes, pues forman el mismo ángulo α_1 con I^+. Luego u y v están sobre la misma semirrecta y ambos a distancia $a_3 = b_3$ de i, así $u = v$. Luego $T_1' = T_2'$ y por lo tanto T_1 y T_2 son congruentes.

Ejercicio: $S(z) = -\bar{z}$ es un movimiento rígido. Para esto verifique que conserva las longitudes de las curvas.

Corolario 2.5. En un triángulo equilátero T, el valor de un lado a está unívocamente determinado por el valor del ángulo A. Se tiene que $\cosh a = \frac{\cos A}{1 - \cos A}$ con $0 < A < \pi/3$ (pues el área de $T = \pi - 3A > 0$).

Demostración: Si un triángulo es equilátero, sus ángulos son iguales, por la fórmula (4) aplicada a A, B y C. De (1) resulta

$$\operatorname{sen}^2 A \,.\, \cosh a = \cos^2 A + \cos A, \text{ o } \cosh a = \frac{\cos A(1+\cos A)}{1-\cos^2 A} = \frac{\cos A}{1-\cos A}.$$

(Notar que si A tiende a $\frac{\pi}{3}$, a tiende a o y si A tiende a o, a tiende a ∞).

Ejercicio: Fijar el ángulo A ($o < A < \frac{\pi}{3}$) y construir triángulos equiláteros con ángulos iguales a A.

Nota: En triángulos hiperbólicos "pequeños" las fórmulas (1), (2), y (4) poco difieren de las fórmulas de la trigonometría plana. Por ejemplo, si x es pequeño podemos aproximar $\cosh x \sim 1 + \frac{x^2}{2}$.

Luego en (4) $$1 + \frac{a^2}{2} \sim \left(1 + \frac{b^2}{2}\right)\left(1 + \frac{c^2}{2}\right) - b\,c \cos A =$$

$$= 1 + \left(\frac{b^2+c^2}{2} - bc\cos A\right) + \frac{b^2c^2}{4},$$

e igualando términos de grado 2 resulta $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$, la ley de los cosenos.

Referencias: Bonola R. "Geometrías no Euclidianas" (Espasa Calpe 1945) y en inglés. "Non euclidean geometries" (Dover).

Santaló L.A. "Geometrías no Euclidianas" (Cuadernos, Eudeba N° 45). Capítulos V, VI, VII (ver la extensa lista de referencias).

Marnning. "Non euclidean geometry" (Dover)

Facultad de Matemática, Astronomía y Física.
Universidad Nacional de Córdoba.