COMPETENCIA MATEMATICA ERNESTO PAENZA

Historia y características principales

El fallecimiento prematuro de Ernesto Paenza, un ferviente promotor del desarrollo científico en la Argentina, ocurrido el 28 de agosto de 1985, es lo que ha motivado a su familia para la creación de la fundación que lleva su nombre.

Esta competencia es organizada y financiada por dicha Fundación, y cuenta con el auspicio de la Unión Matemática Argentina.

La competencia está abierta para todos los departamentos de Matemática de Universidades del país. En ella pueden inscribirse los alumnos regulares todavía no graduados a la fecha de realización de la prueba. Esta, es individual y no se permite ninguna consulta personal ni bibliográfica durante su desarrollo.

Los ejercicios son de relativa dificultad y está fuera de nuestra intención que algún participante logre el puntaje total. Se considera meritorio ya la obtención de puntaje por la resolución de algún ejercicio.

Es nuestra idea también que los alumnos participantes y profesores supervisores sigan pensando y resolviendo los problemas de la prueba en los días y/o semanas subsiguientes a la realización de la misma, *esta vez sólo por el placer y la satisfacción de resolverlos.*

El Comité Organizador establecerá un orden de méritos individual, de acuerdo con el puntaje obtenido en la prueba. Asimismo, y en base a estos datos, quedarán ordenadas también las instituciones, para lo que se sumarán los puntajes de sus 3 (tres) reprensentantes mejor calificados.

Se otorgan 5 (cinco) premios individuales del primero al quinto en el orden de méritos. Ellos constan de una medalla, y, respectivamente, 1000, 800, 600, 400 y 200 australes de octubre de 1985 actualizdos a octubre del año en curso. Además, los cinco siguientes en el orden de méritos reciben *mención honorable,* testimoniado en una medalla.

Todos los participantes que hayan obtenido por lo menos 5 (cinco) puntos (medio ejercicio) reciben un diploma testimonio de su participación y de la posición obtenida.

Las 10 primeras instituciones (siempre que hayan obtenido por lo menos 10 puntos) reciben una plaqueta testimonio de su participación y de la posición obtenida. Las tres primeras reciben 500 australes (actualizados de la misma manera que los premios individuales) cada una, por ejemplo, en forma de libros o revistas que soliciten oportunamente a la Fundación Paenza.

El Comité Organizador de la competencia es el siguiente: Presidente, Alberto P. Calderón; Vicepresidente Ejecutivo, Eduardo J. Dubuc; Asesores, Carlos Cabrelli, Alicia Dickenstein, Adrián Paenza, Carmen Sessa.

Aprovechamos esta oportunidad para invitar a toda institución que desee participar a comunicarse con nosotros. Aquellas que ya hayan participado serán contactadas automaticamente. Recordamos que un alumno que ya ha participado puede participar nuevamente, siempre que en el interin no se haya graduado.

Correspondencia a: Dr. Eduardo J. Dubuc
Vicepresidente Ejecutivo
Fundación ERNESTO PAENZA
Tucumán 1738 - 1° "A"
1050 - Capital Federal.

RESULTADOS DE LA PRIMERA REALIZACION 1986

Participaron 55 alumnos pertenecientes a 14 instituciones de todo el país.

El primer premio, 1750 australes, fue obtenido por *Luis Randolfo Cobacho*, de la *Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad Nacional de Catamarca.*

El segundo y tercer premio, de 1400 y 1050 australes, respectivamente, son repartidos entre dos participantes que obtuvieron el segundo mayor puntaje.

Dos segundos premios, 1225 australes, fueron obtenidos por *Daniel E. Fridlender* y *Juan Pablo Rossetti,* ambos de la *Facultad de Matemática, Astronomía y Física de la Universidad Nacional de Córdoba.*

El cuarto premio, 700 australes, fue obtenido por *Esteban Gregorio Ta-*

bak, de la *Facultad de Ingeniería de la Universidad de Buenos Aires*.

El quinto premio, 350 australes, fue obtenido por *Fabiana Krongold*, de la *Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad de Buenos Aires*.

Cada uno de ellos recibe además una medalla testimonio.

Las cinco siguientes posiciones correspondieron a, ordenados por orden alfabético, *Miguel Alberto Benavente*, de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad Nacional de Mar del Plata; *Daniel Penazzi*, de la Facultad de Matemática, Astronomía y Física, Universidad Nacional de Córdoba; *María Julia Redondo*, Departamento de Ciencias Exactas, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca; *Oscar Samoilovich*, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires y *Diego Vaggione*, Facultad de Matemática, Astronomía y Física, Universidad Nacional de Córdoba. Cada uno de ellos recibe una medalla de *mención honorable*.

Los resultados por Institución, ordenados sumando los puntajes obtenidos por sus tres mejores participantes son los siguientes:

Las tres primeras:

1) Facultad de Matemática, Astronomía y Física, Universidad Nacional de Córdoba.
2) Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires.
3) Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad Nacional de Catamarca.

Cada una de ellas recibe un premio de 875 australes.

Las tres siguientes instituciones son:

4) Facultad de Ingeniería, Universidad de Buenos Aires.
5) Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad Nacional de Mar del Plata.
6) Departamento de Ciencias Exactas, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca.

PROBLEMAS.

Cada uno con un máximo de 10 puntos, fueron los siguientes:

Problema 1.

Dos autos recorren un circuito a la misma velocidad constante, a razón de 1 vuelta por hora. El primero sale del punto de largada en el instante $t = 0$, y el segundo sale (del mismo punto) en algún instante $t = T > 0$. Demostrar que a partir de la largada del segundo auto, la cantidad de tiempo durante el cual el primero lleva completadas el doble de vueltas que el segundo es de exactamente una hora.

Problema 2.

Dado $n \in N$, sea P_n el polinomio de grado n que verifica las igualdades:

$$P(k) = \frac{k}{k+1}, \quad 0 \leq k \leq n.$$

Calcular $P(n+1)$.

Problema 3.

Sea $0 < \epsilon < 1$. Para cada $n \in N$ consideremos el polinomio:

$$(x+y)^n (x^2 - (2-\epsilon) x.y + y^2)$$

a) Demostrar que para n suficientemente grande todos sus coeficientes son positivos.

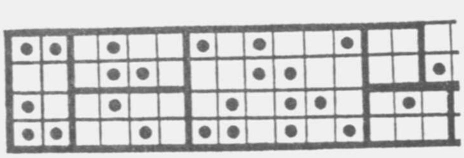
b) Si $\epsilon = 0.002$ ¿cuál es el menor valor posible de n para el cual todos los coeficientes son positivos?

Problema 4.

Se tiene un tablero cuadriculado de 4 n, donde cada casilla es blanca o negra. Encontrar (con demostración) el mínimo n con la siguiente propiedad:

"Para toda posible coloración del tablero, existe un rectángulo (como mínimo de 2×2 casilleros) con los 4 vértices del mismo color".

Ejemplo de rectángulos de este tipo:



Problema 5.

Sea $S \subset R \times R$ un subconjunto cerrado y acotado. Sea $\{P_n\}_{n \in N}$ una sucesión de puntos de S con la siguiente propiedad:

$$d(P_n, P_{n+1}) = \text{máx}\,\{d(P_n, P) : P \in S\}$$

y sea $d_n = d(P_n, P_{n+1})$. Claramente, se tiene que $d_1 < d_2 < d_3 < \ldots < \delta$, donde δ es el diámetro de S. (Recordar que δ es la máxima distancia posible entre dos puntos de S, es decir $\delta = \text{máx}\,\{d(P,Q)/P \in S,\ Q \in S\}$).

Sea $d = \lim\limits_{n \to \infty} d_n < \delta$

¿Es posible que $d < \delta$? En caso afirmativo, dar un ejemplo y probar que lo es. En caso negativo, demostrar que no puede ser.

Problema 6.

Sea $\{f_n\}_{n \in N}$ la sucesión de funciones reales definida por:

$$f_o(x) = e^x\ , \qquad x \in R$$

$$f_{n+1}(x) = x.f_n'(x),\ x \in R.$$

Probar que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n(1)}{n!} = e^e.$

Problema 7.

Calcular $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + (\text{tg } x)^r}$, donde r es un número real no negativo cualquiera.

Problema 8.

Dadas n ciudades unidas por una red vial con las siguientes características:

a) toda ruta es de mano única;

b) dado cualquier par de ciudades hay una única ruta que las une, sin pasar por ninguna otra ciudad.

Pruebe que siempre hay un camino que pasa por todas las ciudades, una única vez.

SOLUCIONES.

Las soluciones que se encuentran a continuación fueron elegidas por el Comité Organizador entre las respuestas de los participantes. *Son aquellas que más nos gustaron,* además de ser correctas.

Los vectores luego del número del problema indican: La primera coordenada, el número de participantes que obtuvieron 8, 9 ó 10 puntos en el problema (problema esencialmente bien resuelto). La segunda coordenada, el número de participantes que obtuvieron 5, 6 ó 7 puntos (esencialmente la "mitad o un poco más" del problema). La tercera coordenada, el número de participantes que obtuvieron 1, 2 ,3 ó 4 puntos (casos particulares, o algo conducente a una posible solución).

Problema 1. (12,0,3)
(Solución de Fabiana Krongold, F.C.E.y N. Universidad de Buenos Aires).

Sea c_1 = cantidad de vueltas del primer auto, c_2 = cantidad de vueltas del segundo auto, $c_1 = [t]$, $c_2 = [t-T]$. Se plantea la ecuación $[t] = 2[t-T]$.

Supongamos T entero. Queda $[t] = 2([t]-T) \iff [t] = 2T \iff 2T \leq t < 2T+1$. Luego, $c_1 = 2c_2$ durante la hora que va de $2T$ a $2T+1$.

Supongamos T no entero. $T = [T] + m(T)$, $m(T) \in (0,1)$ y $t = [t] + m(t)$ $m(t) \in [0,1)$. Queda $[t] = 2[[t] - [T] + m(t) - m(T)]$, donde $[t] - [T]$ es un entero positivo.

(1) Si $0 \leq m(t) - m(T) < 1$, se tiene $[t] = 2([t] - [T]) \iff [t] = 2[T]$. O sea, $2[T] + m(T) \leq t < 2[T] + 1$. Luego $c_1 = 2c_2$ durante un tiempo igual a $1 - m(T)$.

(2) Si $0 > m(t) - m(T) > -1$, se tiene $[t] = 2([t] - [T] - 1) \iff [t] = 2[T] + 2$. O sea, $2[T] + 2 \leq t < 2[T] + 2 + m(T)$. Luego $c_1 = 2c_2$ durante un tiempo igual a $m(T)$.

De (1) y (2) se sigue que $c_1 = 2c_2$ durante 1 hora.

Problema 2. (0,5,6)
(Solución del Comité Organizador).

Como $(k+1).P(k) - k = 0$, $\forall\ 0 \leq k \leq n$, el polinomio de grado $n+1$

$Q(x) = (x+1).P(x) - x$ tiene las $n+1$ raíces $0,\dots,n$. Luego $Q(x) =$ $= (x+1).P(x) - x = c.x(x-1)\dots(x-n)$. Para calcular c, evaluemos Q en $x = -1$. Reuslta

$$Q(-1) = 1 = c.(-1).(-2)\dots(-(n+1)) = $$
$$= c.(-1)^{n+1}.(n+1)!$$

luego

$$c = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} \quad \text{y} \quad P(x) = \frac{\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}.x(x-1)\dots(x-n) + x}{x+1}$$

Entonces, $P(n+1) = \dfrac{(-1)^{n+1}.(n+1).n\ \dots\ 1 + (n+1)!(n+1)}{(n+1)!(n+2)} = \dfrac{(-1)^{n+1}+n+1}{n+2}$

o sea

$$P(n+1) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ impar} \\ \dfrac{n}{n+2} & \text{si } n \text{ par} \end{cases}$$

Problema 3. (1,2,19)
(Solución de Eduardo Grondona, F.C.E. y N., Universidad de Buenos Aires)

a) $(x+y)^n(x^2 - (2-\epsilon)xy + y^2) =$

$$x^{n+2} + y^{n+2} + \sum_{k=0}^{n} x^{n+1-k}\, y^{k+1} \left(\binom{n+2}{k+1} - (4-\epsilon)\binom{n}{k}\right).$$

Ahora, para $0 < k < n$

$$\left(\binom{n+2}{k+1} - (4-\epsilon)\binom{n}{k}\right) > 0 \iff \frac{(n+2)\ (n+1)}{(n+1-k)(k+1)} > 4-\epsilon \quad (*)$$

La última desigualdad basta considerarla para los valores de k que maximizen la parábola $\phi(k) = (n+1-k)(k+1)$. Si k es pensado como una variable continua se obtiene fácilmente (derivando) que:

1) Si n es par, $\phi(\frac{n}{2}) > \phi(k)$, $k = 0,\dots,n$

2) Si n es impar, $\phi(\frac{n-1}{2}) = \phi(\frac{n+1}{2}) > \phi(k)$, $k = 0,\dots,n$

Luego la desigualdad (*) se satsiface si y sólo si:

$n > \frac{4}{\epsilon} - 2$ si n es par, $n > \frac{4}{\epsilon} - 3$ si n es impar, lo que pueba la parte a).

b) Si $\epsilon = 0.002$, $n > \frac{4}{\epsilon} - 2 = 1998$ si n par, o $n > \frac{4}{\epsilon} - 3 = 1997$ si n impar.

Luego $n = 1999$ es el valor pedido.

Problema 4. (5,2,1)

a) Para $n = 6$ existe coloración sin rectángulos con los 4 vértices del mismo color. (Solución de Paula Alonso, FCE y N, Universidad de Buenos Aires).

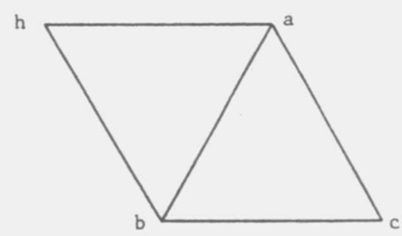
Para formar un rectángulo debo repetir en 2 columnas distintas 2 posiciones de igual coloración. Ahora, para ubicar 2 casilleros negros y 2 casilleros blancos en los 4 lugares de una columna tengo 6 posibilidades. Formo así 6 columnas distintas que no forman ningún rectángulo.

b) Para $n = 7$ siempre existe por lo menos 1 rectángulo con los 4 vértices del mismo color (Solución de Daniel Fridlender, I.M.A.F., Universidad Nacional de Córdoba).

Claramente puedo cambiar las columnas entre si pues ello ni agrega ni quita rectángulos. Como son 7 columnas, en cada fila hay por lo menos 4 casilleros del mismo color. Supongamos que los 4 últimos casilleros de la primera fila son blancos. Veremos que en las 4 últimas columnas hay un rectángulo. En efecto, para que no haya un rectángulo blanco, la segunda y tercera fila deben tener por lo menos 3 casilleros negros, en cuyo caso hay un rectángulo negro.

Problema 5. (12,0,0)
Solución de Fabiana Krongold, FCE y N, Universidad de Buenos Aires).

Es posible. Consideremos dos triángulos equiláteros de lado 1.



Sea $p_n = a$ si n par, y $p_n = b$ si n impar. Es claro que $d(p_n, p_{n+1}) = \text{MAX}\{d(p,p_n)\} = 1$. Por otro lado, DIAMETRO = d(h,c) = 2 ALTURA $= 2\sqrt{1 - 1/4} = \sqrt{3} > 1$.

Problema 6. (1,0,1)
(Solución de Luis R. Cobacho, FCE y N, Universidad Nacional de Catamarca).

Efectuando el cambio de variable $x = e^y$, definimos una nueva sucesión de funciones

$$g_n(y) = f_n(e^y)$$

Las condiciones dadas se convierten en:

$$\begin{cases} g_o(y) = f_o(e^y) = e^{e^y} \\ g_{n+1}(y) = f_{n+1}(e^y) = e^y . f_n'(e^y) = g_n'(y) \end{cases}$$

Luego, $g_n(y) = g_{n-1}'(y) = g_{n-2}''(y) = \ldots = g_o^{(n)}(y)$. Por lo tanto tenemos:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n(1)}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n(e^0)}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g_n(0)}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g_o^{(n)}(0)}{n!} 1^n =$$

$$= g_o(1) = e^{e^1} = e^e.$$

Problema 7. (1,1,0)
(Solución de Luis R. Cobacho, FCE y N, Universidad Nacional de Catamarca).

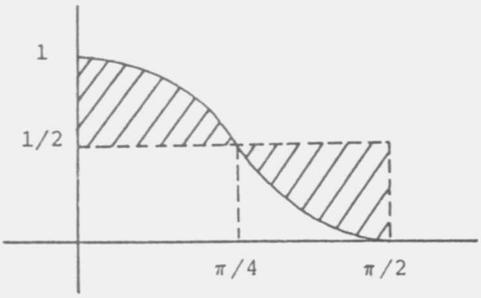
Sea $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+(\operatorname{tg} x)^r}$. Consideremos el cambio de variable $y = \pi/2 - x$.

Entonces $I = \displaystyle\int_{\pi/2}^{0} \frac{-dy}{1+(\operatorname{cotg} y)^r} = \int_0^{\pi/2} \frac{(\operatorname{tg} y)^r\, dy}{(\operatorname{tg} y)^r + 1} = \int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{tg} x^r\, dx}{1+(\operatorname{tg} x)^r}$.

Luego $2I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1+(\operatorname{tg} x)^r}{1+(\operatorname{tg} x)^r}\, dx = \int_0^{\pi/2} dx = \pi/2$. De donde $I = \pi/4$.

Otra solución interesante, parcialmente lograda por Magdial D. Henriquez, D. C.E., Universidad Nac. del Sur, Bahía Blanca, es la siguiente:

Consideremos el gráfico aproximado de $f(x) = \dfrac{1}{1+(\operatorname{tg} x)^r}$



vemos que las áreas rayadas se compensan, de donde se sigue que el valor de la integral es igual al área del rectángulo $1/2.\pi/2 = \pi/4$. Esta idea se convierte en una demostración rigurosa constatando la igualdad $f(\pi/4 - x) - 1/2 = 1/2 - f(\pi/4 + x)$, lo que se hace fácilmente.

<u>Problema 8</u>. (6,0,4)
(Solución de Fabiana Krongold, FCE y N, Universidad de Buenos Aires.)

Por inducción en el número de ciudades.

a) Si $n = 2$ es trivial.

b) Supongamos que vale para n. Consideremos $(n+1)$ ciudades. Sabemos que existe un camino que une las ciudades 1 a n (podemos suponer sin pérdida de generalidad que el camino une las ciudades en ese orden)

$$1 \to 2 \to \ldots \to n \qquad (*)$$

Si existe una ruta de $(n+1)$ en 1 consideramos

$$(n+1) \to 1 \to 2 \to \ldots \to n \qquad \text{y listo.}$$

En su defecto, existe una ruta de $1 \to (n+1)$. Si todas las rutas entran a $(n+1)$, fabricamos el camino

$$1 \to 2 \to \ldots \to n \to (n+1)$$

Luego sólo resta analizar el caso

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] \arrow[dr] & 2 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & n \\ & (n+1) \arrow[urr] & & \end{tikzcd}$$

Consideremos en el orden de (*) la primera ruta que salga de $(n+1)$ y llamemos k a dicha ciudad $(k > 1)$. Entonces, la ruta entre $(k-1)$ y $(n+1)$ entra a $(n+1)$; luego se tiene el siguiente camino entre las $(n+1)$ ciudades

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & 2 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & (k-1) \arrow[dr] & & k \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & n. \\ & & & & (n+1) \arrow[ur] & & & \end{tikzcd}$$

Agradecimientos.

Las pruebas fueron corregidas por Carlos Cabrelli, Alicia Dickenstein, Eduardo Dubuc, Adrián Paenza y Carmen Sessa. Toda la tarea de administración de datos, planillas e intercambio de correspondencia recayó sobre Marcelo Kofman. Angel Ramini se encargó de hacer llegar las pruebas a cada institución participante. La diagramación y mecanografía de la prueba y de esta comunicación fue hecha por Claudia Clemares. Los delegados responsables en cada institución fueron Alicia Urroz, Eduardo Dubuc, Pablo Jacovskys, Stella Maris Simón, Jorge Adrover, María Ramírez Arballo, Rodolfo Rodríguez, Alfredo González, Dolores Alia, Rodolfo Aguirre, Hugo Alvarez, N. Estela de Battig, Eleonora Cerati y María del Carmen Canaves.

A todos ellos el Comité Organizador les agradece su colaboración.

NOTA HISTORICA: N. Lobachevsky (1792-1856), J. Bolyai (1802-1860)

Nicolai Lobachevsky: matemático ruso, fundador, junto al húngaro Janos Bolyai, de la geometría no euclideana. En ésta deja de valer el 5to. postulado de Euclides, según el cual, por un punto exterior a una recta se puede trazar una y sólo una paralela a dicha recta. En 1829 Lobachevsky,(1832 J. Bolyai) publicó sus investigaciones estableciendo que tal geometría es posible resolviendo un problema que permaneció abierto por más de 2000 años. Este descubrimiento influenció fuertemente la física, matemática y filosofía del siglo XX.

La vida de Lobachevsky se desarrolló alrededor de la universidad de Kazán a la que entró como estudiante a los 14 años, siendo profesor a los 30. Su habilidad organizativa fue reconocida rápidamente, llegando a decano de la facultad de físico-matemática en 1820 y a rector de la Universidad en 1827, puesto para el cual fue reelegido repetidas veces hasta 1846. El trabajo burocrático no le impidió realizar importantes trabajos de investigación. Además de sus contribuciones a la geometría, obtuvo interesantes resultados en la teoría de series trigonométricas, el cálculo integral, las probabilidades y la aproximación de raíces de ecuaciones algebraicas.

Janos Bolyai: matemático húngaro, uno de los fundadores de la geometría no euclideana. Muy precoz, conocía el cálculo diferencial e integral a los 13 años siendo por otra parte un excelente violinista. Su padre era un conocido matemático que dedicó grandes esfuerzos a la prueba del 5to. postulado de Euclides, sin suceso. El interés de Janos en el problema lo llevó a continuar las investigaciones de su padre. Aparentemente, en 1820 convencido de la imposibilidad de dar tal demostración, comenzó a desarrollar una geometría que no dependiera del 5to. postulado. En 1823 le envió a su padre un trabajo exhibiendo un siste ma consistente de geometría no euclideana. Este fue publicado como apéndice en un libro de su padre, en 1832. A todo esto, de manera independiente, N. Lobachevsky había publicado resultados semejantes en 1829. Con posterioridad, realizó contribuciones a la teoría de números complejos, desarrollando un tratamiento riguroso de éstos como pares de números reales.

La labor de Lobachevsky,así como la de Bolyai,sólo fue reconocida después de su muerte,a pesar de los elogios de Gauss, el matemático más importante de la época,a la nueva geometría. La aceptación de la geometría no euclideana debió esperar a que la influencia de las ideas de los matemáticos alemanes B. Riemam y F. Klein y del matemático italiano E. Beltrami reafirmaran su consistencia y aplicabilidad.