ANALISIS COMBINATORIO I

Enzo R. Gentile

"Mathesis et ars et scientia dicenda" ("Matemática es arte y ciencia")

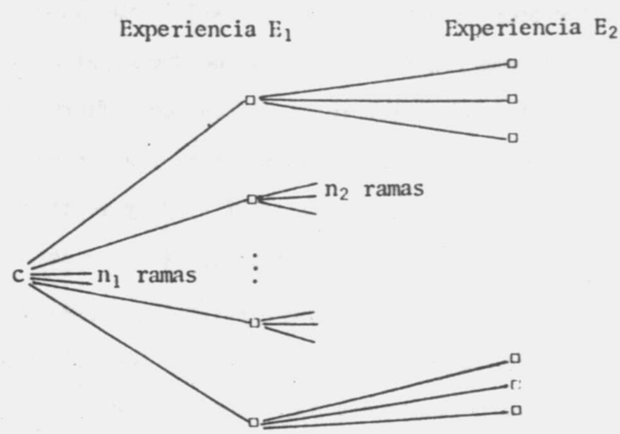
L. Kronecker (1821-1891)

1. El Análisis Combinatorio es la ciencia, y en alguna medida, el arte de contar o enumerar los elementos de un conjunto *finito*. El siguiente Principio General de Enumeración que tiene que ver con el sentido común nos provee de una regla útil para contar.

Principio General de Enumeración.

Si una experiencia E_1 tiene n_1 resultados posibles y por cada resultado de E_1 se realiza una experiencia E_2 que tiene n_2 resultados posibles, *entonces* la realización en sucesión de E_1 y E_2 tiene un número total de $n_1.n_2$ resultados posibles.

Es útil graficar esta situación utilizando un "árbol" acostado (hacia la derecha)



A partir del tronco dibujamos las n_1 *ramas* correspondientes a la primer experiencia y luego por cada rama dibujamos las n_2 ramas correspondientes a la segunda experiencia. Es claro que el número total de ramas es $n_1.n_2$. Podemos extender estas consideraciones a k experiencias, $E_1,\ldots, E_k$, $k \in N$. Si para cada i, $1 \leqslant i < k$, E_i es una experiencia que tiene n_i resultados posibles y si por cada resultado que tiene E_i se realiza una experiencia E_{i+1} que tiene n_{i+1} resultados posibles, entonces el número total de resultados posibles que tiene la realización en sucesión de E_1, E_2, ..., E_k es el producto $n_1.n_2\ldots n_k$.

Ejemplos.

i) Supongamos 3 rutas distintas para ir de Buenos Aires a Tucumán y 4 rutas distintas para ir de Tucumán a Salta. El número total de rutas para ir de Buenos Aires a Salta, "vía Tucumán", es $3.4 = 12$. Dejamos a cargo del lector representar esta situación utilizando un diagrama arbolado como hemos considerado mas arriba. El número de formas de viajes de Buenos Aires a Salta ida y vuelta (siempre vía Tucumán!) es $3.4.4.3 = 12^2$. El número de formas de viajar de Buenos Aires a Salta, ida y vuelta (vía Tucumán) pero volviendo por caminos distintos (en ambos tramos) es $3.4.3.2 = 72$. Calculemos ahora el número de formas posibles de viajar de Buenos Aires a Salta ida y vuelta, por diferentes rutas (o sea que difieren en algún tramo). El número de rutas de ida y vuelta repitiendo, únicamente el tramo Salta-Tucumán es $3.4.1.2 = 24$ y repitiendo únicamente el tramo Tucumán-Buenos Aires es $3.4.3.1 = 36$. Por lo tanto el número total de rutas posibles de ida y vuelta repitiendo exactamente un solo tramo es 60. El número buscado es pues $60 + 72 = 132$. Finalmente podríamos considerar las rutas de ida y vuelta volviendo por el mismo camino, son $3.4 = 12$ en total. Sumando todos estos números parciales resulta

$60 + 72 + 12 = 144$, coincide pues con el número total que encontramos inicialmente.

ii) ¿Cuántos números de 4 dígitos pueden formarse con los dígitos 1,2,3,4? . Se trata de reemplazar en ABCD cada símbolo por los dígitos 1,2,3,4. En D podemos colocar 4 valores posibles. Colocando un dígito en D podemos colocar 4 valores en C, etc. el número total es claramente $4^4 = 256$.

iii) ¿Cuántos números pares de 4 dígitos pueden formarse con los dígitos 1,2,3,4?. Ahora la substitución de D sólo se puede hacer con 2 y 4. Por lo tanto el número total es $2.4^3 = 128$.

iv) ¿Cuántos números de 4 dígitos distintos pueden formarse con los dígitos 1,2,3,4?. La substitución de D puede hacerse en 4 formas posibles, la de C en 3 formas posibles, la de B en 2 y la de A en una, por lo tanto el número buscado es $4.3.2.1 = 24$.

v) ¿Cuántos números capicuas de 5 cifras pueden formarse con los dígitos 1,2,3,4,5,6,7 ?
(Sol. Un número capicúa es de la forma abcba. El lugar a puede reemplazarse por 7 valores, el b y el c de la misma forma. Habrá pues $7.7.7 = 7^3$ números capicúas). *Variación* de capicúas pares: $7^2.3$.

vi) Sea $n \in N$ y denotemos con $[1,n]$ el intervalo natural de todos los $t \in N$ tales que $1 \leq t \leq n$. Sean k y n en N. El número de aplicaciones $f: [1,k] \to [1,n]$ es n^k. En efecto, una aplicación f queda determinada definiendo f(1), f(1), f(2),..., f(k). Ahora f(1) puede tomar n valores posibles, f(2) al igual n valores, etc. El principio general de enumeración dice que hay en total n^k aplicaciones. Uno de los propósitos del Análisis Combinatorio es contar todos los tipos de aplicaciones para todos los valores de k y n. Por ejemplo aplicaciones inyectivas, crecientes, suryectivas etc. ...

2. *Permutaciones*

Sea $X = [\![1,n]\!] = \{1,2, \ldots, n\}$ el intervalo natural inicial de orden n. Se llama permutación de X a toda aplicación $f: X \to X$ *biyectiva.* Es costumbre denotarlas con las matrices

$$f: = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & & i & & n \\ f(1) & f(2) & f(3) & \ldots & f(i) & \ldots & f(n) \end{pmatrix}$$

escribiendo debajo de cada i el valor f(i) asignado por la función. De esta forma una permutación está dada por la sucesión

$$f(1) \quad f(2) \quad f(3) \quad \ldots \quad f(n)$$

de números en $[\![1,n]\!]$. Por ejemplo si n = 2 hay sólo dos permutaciones: 12 y 21, que corresponden respectivamente a las aplicaciones

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

si n = 3 hay 6 permutaciones

123 132 213 231 312 321

correspondientes a las aplicaciones

$$\begin{pmatrix} 123 \\ 123 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 123 \\ 132 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 123 \\ 213 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 123 \\ 231 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 123 \\ 312 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 123 \\ 321 \end{pmatrix}$$

Proposición. El número total de permutaciones de $[\![1,n]\!]$ es $n! = n.(n-1).(n-2) \ldots 3.2.1$ (*factorial n*)

Demostración: Una permutación está determinada por la función f. Ahora f(1) puede tomar n valores distintos. Definido f(1), f(2) puede tomar cualquier valor que no sea f(1), por lo tanto hay n-1 elecciones para f(2). La repetición de este proceso y la aplicación del principio general nos dan el número que es producto de n por n-1 por n-2, ... O sea *factorial* n.

Ejemplo: ¿De cuántas formas pueden fotografiarse una familia de 5 personas puestas en hilera?
Respuesta: $5! = 120$.

Mismo problema pero pedimos ahora que la madre y el padre estén siempre juntos
Respuesta: $2.4! = 48$. En efecto, en este caso padre y madre forman un sólo objeto de manera que se trata de permutaciones de 4 objetos. Pero hay además dos formas en que pueden ubicarse, uno respecto del otro.

Mismo problema pero pedimos que la madre, el padre y cachito aparezcan siempre juntos.
Respuesta: $3!.3! = 36$. klar.

Ejemplo: ¿De cuántas formas pueden fotografiarse 6 chicas y 7 chicos puestos en hilera pero de manera tal que nunca aparezcan juntos dos personas del mismo sexo.
Respuesta: $6!.7!$
Mismo problema con 7 chicas y 7 chicos

Ejemplo: ¿De cuántas formas pueden sentarse 10 personas alrededor de una mesa circular?
Respuesta: $9!$. En efecto, por estar sentados alrededor de una mesa circular una permutación circular no altera la ubicación rela-

tiva. Por lo tanto podemos fijar a una persona y permutar las restantes.

Ejemplo: i) De cuántas formas pueden fotografiarse 8 matrimonios en hilera con la condición que cada marido esté al lado de su esposa?

Respuesta: $2^8.8!$.

ii) De cuántas formas pueden ubicarse 8 matrimonios alrededor de una mesa circular con la condición que cada marido esté al lado de su esposa?

Respuesta: $2^8.7!$

Ejemplo: En una reunión multinacional asisten por 10 paises delegaciones integradas por el canciller y dos embajadores de cada país. Los mismos se disponen en una gran mesa circular. Sin separarse los miembros de cada delegación, ¿en cuántas formas pueden disponerse las distintas delegaciones alrededor de la mesa?

Respuesta: $(3!)^{10}.9!$ ¿En cuántas formas si asisten Argentina e Inglaterra?

Respuesta: $(3!)^{10}.8!.7$.

Ejemplo: i) ¿Cuántas palabras (anagramas!) pueden formarse permutando las letras de la palabra ESCUDRIÑA.

Respuesta: $9!$

¿Cuántas comenzando con Ñ?

Respuesta: $8!$

¿Cuántas comenzando con consonante?

Respuesta: $5.8!$

ii) ¿Cuántas palabras pueden formarse permutando las letras de la palabra ANAGRAMA?

Respuesta: La letra A está repetida 4 veces. Hay entonces permutaciones que <u>no</u> dan nuevas palabras. Supongamos, por un instante, que las letras A no son la misma, o sea se tiene la pa labra A_1 N A_2 G R A_3 M A_4. El número de anagramas que podemos formar con esta última palabra es 8!. Puesto que permutando de cada anagrama *únicamente* las A_1 A_2 A_3 A_4 resultan 4! palabras esta claro que el número total de anagramas de la palabra ANAGRAMA es el cociente $\frac{8!}{4!}$ =

= 8.7.6.5. = 1680.

iii) ¿Cuántas anagramas pueden formarse con la palabra MARGARITA?

Respuesta: $\frac{9!}{2!.3!}$ = 30240

iv) ¿Cuántos números pueden formarse permutando los dígitos de 131231455?

Respuesta: $\frac{9!}{3!2!2!}$

v) ¿En cuántas formas pueden fotografiarse 8 personas en hilera con la condición que tres de ellas A,B,C guarden siempre el orden relativo, o sea A a izquierda de B, B a izquierda de C?

Respuesta: Las personas A, B y C se hacen entonces *indistinguibles*, por lo tanto el número pedido es $\frac{8!}{3!}$

vi) ¿Cuántos números pueden formarse permutando los dígitos de 11122333450?

Respuesta: Si excluimos los números que comienzan con 0 se tiene:

$\frac{11!}{3!.3!.2!} - \frac{10!}{3!.3!.2!}$ = 554400 - 50400 = 504.000

vii) ¿Cúantos números pueden formarse permutando los dígitos de 11122300?

Respuesta: El número total de permutaciones de 11122300 es 1680. *Queremos excluir de éstos los que comienzan con* 0. Su número es $(3!.2!)^{-1}.7!$ = 420. Por lo tanto el número buscado es 1260)

viii) Se tira una moneda n veces. Sea $0 \leq k \leq n$. ¿Cuál es el número total de posibles resultados que consisten en exactamente k caras (y obviamente n-k cecas, según Jarvis)

Respuesta: Se trata de hallar las permutaciones de n objetos que son k iguales entre si y n-k iguales entre si. El número es

$\frac{n!}{k!.(n-k)!}$

Nota. La idea de este ejercicio permite *calcular* el número de subconjuntos de k elementos de un conjunto de n elementos o sea las combinaciones de orden k. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que el conjunto es el intervalo natural $[\![1,n]\!]$. Los subconjuntos quedan determinados unívocamente por las *funciones características* $f: [\![1,n]\!] \to \{0,1\}$: $f(x) = 0$ si x no pertenece al subconjunto y $f(x) = 1$ si x pertenece al subconjunto. Cada subconjunto está dado por una sucesión de n términos de 0 y 1. Dejamos a cargo del lector completar y formalizar este discurso.

La discusión de estos ejemplos muestra claramente que, en general, si $k_1, \ldots, k_r$, n son números naturales y $k_1 + \ldots + k_r \leq n$, el número total de permutaciones de n objetos de los cuales k_1 son iguales, k_2 son iguales, etc. es el cociente

$$\frac{n!}{k_1!\, k_2! \ldots k_r!}$$

podemos decir que se trata de *permutaciones con repetición*.

Veamos otra posible situación relativa a permutaciones. Dado un mazo de cartas y 4 jugadores, ¿Cuál es el número total de manos que se pueden dar si cada jugador recibe 10 de las 40 cartas?. Cada permutación de 40 cartas nos da una mano. En efecto, como sugiere el dibujo

$$\underset{}{\square}\overset{10}{\underset{A}{- - - - -}}\square\overset{10}{\underset{B}{- - - - -}}\square\overset{10}{\underset{C}{- - - - -}}\square\overset{10}{\underset{D}{- - - - -}}\square$$

las 10 primeras para el jugador A, las 10 segundas para el jugador B, etc. Pero ahora las 10 primeras las puedo permutar en forma arbitraria sin cambiar la mano. Lo mismo con las restantes. Se obtiene entonces el siguiente número total de manos: $\dfrac{40!}{(10!)^4}$

Pregunta: ¿Cuál es el número total de manos en las que cada jugador po see un as?

Respuesta: $\dfrac{36!}{(9!)^4} \, . \, 4!$

Un problema análogo sería el de determinar las formas posibles de enviar a 40 escaladores de alta montaña a ascender k_1 el Aconcagua, k_2 el Mercedario, k_3 el Tronador y k_4 el Fitz-Roy, siendo $k_1+k_2+k_3+k_4 =$ $= 40$. El número de formas posibles es $\dfrac{40!}{k_1!.k_2!.k_3!.k_4!}$

Ejemplo: Sean los dígitos 1,2,3,4,5,6. El número total de números de 6 cifras que se pueden formar permutando estos dígitos es 6! . Consideremos el número 431265. Si los 6! números los ordenamos en forma creciente, se pide determinar el orden de ubicación de 431265. Por ejemplo el número 123456 es el primero, el 123465 el segundo, 123546 el tercero, 123564 el cuarto, etc. el criterio es

$$a_1a_2a_3a_4a_5a_6 \text{ es menor que } b_1b_2b_3b_4b_5b_6$$

si

$a_1 < b_1$

ó

$a_1 = b_1$ y $a_2 < b_2$

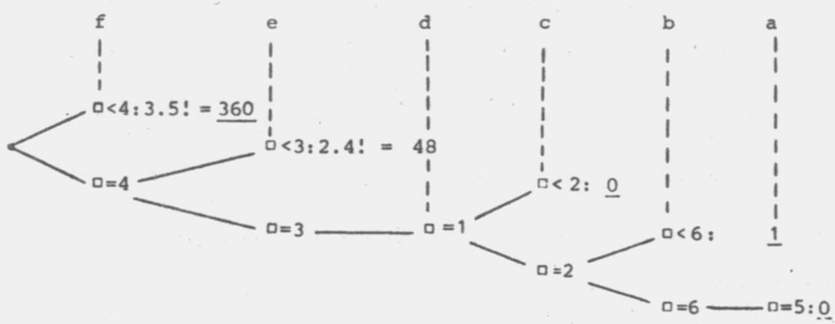
ó

$a_1 = b_1$ y $a_2 = b_2$ y $a_3 < b_3$

. ...

ó $a_1 = b_1$ y $a_2 = b_2$ y $a_3 = b_3$ y $a_4 = b_4$ y $a_5 = b_5$ y $a_6 < b_6$

Escribamos genéricamente un número de 6 cifras con "fedcba" e indiquemos en un diagrama arbolado las posibilidades de cada letra f,e,d,c,b,a, de dar un número menor que 431265.



El número total es $360 + 48 + 1 = 409$. El número 431265 ocupa entonces el lugar 410.

Ejercicio: Determinar el orden de ubicación del número 537128 al ordenar en forma creciente los números obtenidos permutando los dígitos: 1,2,3,5,7,8.

Respuesta: 421 ésimo.

Ejercicio: Determinar cuántos números M de 4 dígitos distintos tomados de 1,2,3,4,5,6,7, pueden formarse tales que $1200 \leq M \leq 3522$.

Respuesta: 305.

3. *Variaciones de k en n*. Sean $k,n \in N$, $k \leq n$. Se llama *variación* o *subpermutación* de (orden) k en n a toda sucesión de k dígitos distintos de $[\![1,n]\!]$. Dicho con mas precisión, una variación de k en n es una aplicación *inyectiva* de $[\![1,k]\!]$ en $[\![1,n]\!]$. Una tal aplicación inyectiva queda determinada dando los valores $f(1),\ldots, f(k)$ pero sin repetición. Es claro que $f(1)$ podrá elegirse en n formas, $f(2)$ en $n-1$ formas, etc., hasta $f(k)$ en $n-(k-1)$ formas posibles. El número total que resulta es el producto

$$V_k^n := n.(n-1)\ldots(n-(k-1)) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Por ejemplo, las subpermutaciones de 3 en 4 son:

$\underline{123}$, 132, 213, 231, 312, 321

$\underline{124}$, 142, 214, 241, 412, 421

$\underline{134}$, 143, 314, 341, 413, 431

$\underline{234}$, 243, 324, 342, 423, 432

Si $n = k$ resultan las permutaciones de n objetos.

Ejemplo: ¿En cuántas formas pueden fotografiarse n personas en grupos alineados de k personas?

Respuesta: V_k^n .

Ejemplo: ¿Cuántos equipos de foot-ball puede formarse con 20 jugadores, si dos de ellos sólo juegan de arqueros y los restantes en cualquier otra posición?

Respuesta: $2.V^{18}_{10}$

Ejemplo: En una sala de diversiones hay 10 juegos individuales distintos. ¿En cuántas formas pueden ocuparlos 5 personas?

Respuesta: V^{10}_5

4. *Combinaciones de k en n.* Sean $k,n \in N$. Se llama *combinación* de orden k en n a todo *subconjunto* de $X = [\![1,n]\!]$ formado por k elementos. En general, dado un conjunto finito, se llama combinación de orden k a todo subconjunto de k elementos. Es claro que cada variación de k en n determina una combinación (la combinación se forma con los elementos de la variación). Pero distintas variaciones pueden dar lugar a la misma combinación. Por ejemplo, las variaciones de 3 en 4 que hemos enumerado mas arriba dan lugar a sendas combinaciones cuando ignoramos el orden de los elementos. Estas son: 123, 124, 134 y 234.

Se ve entonces fácilmente que el número de combinaciones de k en n, que denotaremos con C^n_k, satisface la ecuación

$$C^n_k = \frac{V^n_k}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!.k!}$$

es costumbre denotar a este último número con $\binom{n}{k}$, o sea $C^n_k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!.k!}$. Podemos extender esta fórmula a k = 0 definiendo $C^n_o = \binom{n}{0} = 1$. Si además definimos $0! = 1$ la fórmula precedente es válida para k = 0. También definiremos

$$C^n_k = \binom{n}{k} = 0 \text{ si } n < k$$

Propiedad: Si $1 \leq k \leq n$,

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

Esta propiedad es inmediata, las combinaciones de k elementos de n + 1 se clasifican en dos subconjuntos disjuntos, A: los que contienen a n + 1 y B: los que no contienen a n + 1. Es claro que A tiene $\binom{n}{k-1}$ elementos y B tiene $\binom{n}{k}$ elementos.

Escribiendo la relación anterior para variados valores de n y k se obtiene el triángulo (de Pascal)

n = 0											1										
n = 1										1		1									
n = 2									1		2		1								
n = 3								1		3		3		1							
n = 4							1		4		6		4		1						
n = 5						1		5		10		10		5		1					
n = 6					1		6		15		20		15		6		1				
n = 7				1		7		21		35		35		21		7		1			
n = 8			1		8		28		56		70		56		28		8		1		
n = 9		1		9		36		84		126		126		84		36		9		1	
n = 10	1		10		45		120		210		252		210		120		45		10		1

El triángulo de Pascal aparece en una obra póstuma de Blaise Pascal (1623 - 1662) publicada con el título "Traité du triangle arithmétique, avec quelques autres petits traités sur la même manière" .(París, 1665). En ella se encuentra aparentemente el primer enunciado satisfactorio del Principio de Inducción Completa (H. Freudenthal, "Zur Geschichte der vollständigen Induktion", Archives Internationales des Sciences 22 (1953), 17-37).

Es claro además que cada subconjunto de k elementos en $[\![1,n]\!]$ determina unívocamente un subconjunto de n-k elementos, por lo tanto se tiene esta otra propiedad

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Los subconjuntos no vacíos de $[\![1,n]\!]$ podemos clasificarlos en subconjuntos de 1 elemento, subconjuntos de 2 elementos, etc., esto nos lleva a la fórmula

$$2^n - 1 = C_1^n + C_2^n + \dots + C_i^n + \dots + C_n^n$$

dado que el número total de subconjuntos no vacíos de $[\![1,n]\!]$ es 2^n-1. Si agregamos el conjunto vacío resulta la fórmula conocida

$$2^n = C_0^n + C_1^n + \dots + C_n^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n}$$

En términos del triángulo de Pascal significa que los elementos de la fila n suman 2^n.

Ejemplo: Sean n y m en N y sea $k \in N$, $0 < k \leq n+m$. Vamos a calcular $C_k^{n+m} = \binom{n+m}{k}$. Notemos que $[\![1,n+m]\!] = [\![1,n]\!] \cup [\![n+1,m+n]\!] = A \cup B$. Los subconjuntos de k elementos de $[\![1,n+m]\!]$ los formamos así: tomamos i elementos de A y k-i elementos de B. Esto lo podemos hacer en $\binom{n}{i}.\binom{m}{k-i}$ formas posibles. Se sigue inmediatamente la fórmula

$$\binom{n+m}{k} = \binom{n}{0}.\binom{m}{k} + \binom{n}{1}.\binom{m}{k-1} + \dots + \binom{n}{i}.\binom{m}{k-i} + \dots + \binom{n}{k}.\binom{m}{0}$$

Esta fórmula tiene sentido aún si $m < k$ dado que en ese caso $\binom{m}{k} = 0$ según convenido mas arriba. En particular si n = m se obtiene la fórmula

$$\binom{2n}{k} = \binom{n}{0}\binom{n}{k} + \binom{n}{1}\binom{n}{k-1} + \dots + \binom{n}{k}\binom{n}{0}$$

y si n = m = k resulta

$$\binom{2n}{n} = \binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \dots + \binom{n}{n}^2$$

(hemos usado la propiedad

$$\binom{n}{i} = \binom{n}{n-i}.$$

Ejemplo: Observando el Triángulo de Pascal se sigue que la suma de los elementos de las diagonales descendentes hacia la izquierda satisfacen:

$$\binom{1}{1} + \binom{2}{1} + \binom{3}{1} + \dots + \binom{n}{1} = 1 + 2 + 3 + \dots n = \binom{n+1}{2}$$

$$\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \dots + \binom{n}{2} = 1 + 3 + 6 + \dots \binom{n}{2} = \binom{n+1}{3}$$

y en general

$$\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \ldots + \ldots + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}$$

Podemos probar efectivamente esta fórmula haciendo inducción en n. Se tiene

$$\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \ldots + \binom{n+1}{k} = \binom{n+1}{k+1} + \binom{n+1}{k} = \binom{n+2}{k+1}$$

Q.E.D.

Se sigue de aquí la (archi) conocida fórmula

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \binom{n+1}{2} = \frac{(n+1).n}{2}$$

Otra forma interesante de interpretar las combinaciones de k en n es utilizar una de las variaciones que la determina, a saber, la aplicación $f\colon [\![1,k]\!] \to [\![1,n]\!]$ *estrictamente creciente* (o sea tal que $i < j \Rightarrow f(i) < f(j)$). La variación 134 determina unívocamente la combinación $\{1,3,4\}$ en el ejemplo de mas arriba.

Pregunta: Contar las aplicaciones $f\colon [\![1,k]\!] \to [\![1,n]\!]$ *creciente*, o sea tales que $i < j \Rightarrow f(i) \leq f(j)$.

Ejemplo: Sean n y m números naturales, $n > 1$. Sean n-1 conjuntos que contienen 2m, 3m,..., nm elementos. Se quiere saber en cuántas formas pueden extraerse de cada conjunto m elementos. Entonces es claro que el número de extracciones posibles es el producto

$$\binom{2m}{m}.\binom{3m}{m}\ldots\binom{nm}{m} = \frac{(2m)!}{(m!)^2} \cdot \frac{(3m)!}{(2m)!.m!} \cdots \frac{(nm)!}{m!.(m(n-1))!} = \frac{(nm)!}{(m!)^n}$$

Corolario. Para todo par n, $m \in N$, $(m!)^n$ divide a $(mn)!$

Ejemplos: i) ¿Cuántos triángulos quedan determinados por n puntos del plano tales que nunca tres de ellos estén alineados?

Respuesta: C_3^n

ii) Dadas dos rectas paralelas del plano y n puntos distintos sobre una y m puntos distintos sobre la otra, ¿Cuántos triángulos quedan determinados con vértices en esos puntos?

Respuesta: $m.C_2^n + n.C_2^m$

iii) Dadas n rectas distintas paralelas a una dirección y m rectas distintas paralelas a otra dirección (distinta de la anterior) determinar el número total de paralelogramos que quedan determinados.

Respuesta: $\binom{n}{2} . \binom{m}{2}$.

iv) Sean k, n $\in$ N, $k \leqslant n$. Interpretemos las combinaciones de k en n como aplicaciones *estrictamente crecientes* de $[1,k]$ en $[1,n]$. Una tal combinación es entonces una sucesión del tipo $a_1\ a_2 \ldots a_k$ con $1 \leqslant a_1 < a_2 < \ldots < a_k \leqslant n$. Contemos las combinaciones que empiezan con 1. Su número es claramente

$$\binom{n-1}{k-1}$$

Las combinaciones que empiezan en 2 son en número

$$\binom{n-2}{k-1}$$

y así siguiendo hasta llegar a las combinaciones que empiezan con el número $n - k + 1$, cuyo número es $\binom{k-1}{k-1}$ (Es útil convencerse con un ejemplo numérico!).

Se llega entonces a la fórmula

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-2}{k-1} + \ldots + \binom{k-1}{k-1}$$

5. *El principio de Inclusión-Exclusión.*

Sea U un conjunto finito y sea A un subconjunto de U. Con $|A|$ denotamos el número de elementos de A. Supongamos dadas ciertas propiedades que satisfacen algunos elementos de U, o sea se tienen $A_1, \ldots, A_n$ subconjuntos de U caracterizados por satisfacer ciertas propiedades $p_1, \ldots, p_n$. El principio en cuestión da una fórmula para el número de elementos del complemento de la unión $A_1 \cup \ldots \cup A_n$, o sea del número de elementos de U que *no* satisfacen ninguna de las propiedades $p_1, \ldots, p_n$. Por ejemplo si U = números naturales de 1 a 100, las propiedades pueden ser: P_1:= ser divisible por 3, P_2:= ser primo, etc.

Se sabe del álgebra de conjuntos que

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$$

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1|+|A_2|+|A_3| - (|A_1 \cap A_2|+|A_1 \cap A_3|+|A_2 \cap A_3|)+ \\ + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$

y en general

$$|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| = \sum_{1\leqslant i\leqslant n} |A_i| - \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} |A_i \cap A_j| + \ldots + (-1)^{n-1} | A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|$$

El principio de inclusión-exclusión da el número de elementos de U que no satisfacen ninguna de las propiedades determinadas por cada A_i. La forma de escritura de este principio sería entonces

$$|A'_1 \cap \ldots \cap A'_n| = | U | - |A_1 \cup \ldots \cup A_n| = |U| - \ldots$$

donde A' denota el complemento de A en U.

Ejemplo Determinar el número de permutaciones de {1,2,3} que no fijan ningún punto. O sea, si f es una permutación de {1,2,3} entonces $f(i) \neq i$ cualquiera sea i:= 1,2,3. Por ejemplo f(1) = 2, f(2) = 3, f(3) = 1 es una tal permutación. Sea para cada i, A_i la totalidad de permutaciones que fijan *algún* elemento. Nos interesa calcular el número de elementos del *complemento* de ese conjunto. Se tiene entonces

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = 2 + 2 + 2 - 1 - 1 - 1 + 1 = 4$$

Por lo tanto hay 6-4 permutaciones que no fijan ningún elemento. Estas son $\binom{123}{231}$ y $\binom{123}{312}$. Dejamos a cargo del lector verificar que el número de permutaciones de {1,2,3,4} que no fijan ningún punto es 9.

Dejamos a cargo del lector obtener la siguiente expresión general para el número de permutaciones de {1,2,..., n} que no fijan ningún punto:

$$n!.(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\ldots+(-1)^n.\frac{1}{n!})$$

Notar que este número no es otra cosa que $[\frac{n!}{e}]$: = parte entera de $\frac{n!}{e}$ (e: base de los logaritmos naturales)

Ejemplo ¿Cuántos números positivos menores o iguales que 100 hay, que no tengan factores primos repetidos?. Notemos que los únicos factores primos repetidos pueden ser 2,3,5, y 7. Sea entonces A_{p^2} la totalidad de números divisibles por p^2 con p primo. Hay entonces

$$|A_4|+|A_9|+|A_{25}|+|A_{49}| - |A_4\cap A_9| - |A_4\cap A_{25}| - |A_4\cap A_{49}| - \ldots$$
$$= 25 + 11 + 4 + 2 - 2 - 1 - 0 - 0 \ldots$$
$$= 39$$

Por lo tanto hay 100 - 39 = 61 números menores que 100 y positivos sin factores primos repetidos.

Ejemplo. Vamos a deducir una fórmula importante que usaremos para la inversión, a saber: $(k \leq n)$

$$\binom{n}{0}.\binom{n}{k}-\binom{n}{1}\binom{n-1}{k-1}+\binom{n}{2}.\binom{n-2}{k-2}-\ldots+$$

$$+(-1)^k.\binom{n}{k}.\binom{n-k}{0}=0.$$

Sea A_i, i:= 1,2,..., n la totalidad de combinaciones de orden k que contienen al elemento i. Es claro que la unión de todos los A_i es la totalidad de combinaciones de orden k. Por lo tanto se tiene la fórmula

$$\binom{n}{k}=\binom{n}{1}.\binom{n-1}{k-1}-\binom{n}{2}.\binom{n-2}{k-2}+\ldots+(-1)^{k-1}.\binom{n}{k}.\binom{n-k}{0}$$

y la fórmula pedida se sigue de aquí inmediatamente.

Ejercicios

1. ¿Cuántos enteros hay entre 1 y 600 inclusive,

   i) no divisibles por 3?

   ii) no divisibles por 3 y por 5?

iii) no divisibles por 3, 5 y 7?

Respuestas: i) 400; ii) 320; iii) 275.

2. Encontrar el número de años bisiestos desde 1884 a 4004. Un año es bisiesto si es divisible por 4 pero no por 100 ó es divisible por 400 (1900 no fue bisiesto, pero si lo será el 2000).

Respuesta: 515

3. ¿Cuántos números enteros entre 1 y 10000 inclusive no son divisibles por 5,7 y 11?

Respuesta: 6233

4. ¿Cuántos números enteros desde 1 a 1000.000 inclusive no son ni cuadrados, ni cubos, ni cuartas potencias?

Respuesta: 998.910

5. ¿Cuántos números positivos hay no mayores que 1000 que no sean divisibles por 6, por 10 y por 15?

Respuesta: 734

6. Probar que si n =30.m, entonces la cantidad de números enteros positivos que no son mayores de n y que no son divisibles ni por 6, ni por 10, ni por 15 es igual a 22.m.

6. *Ejercicios*.

1) i) ¿Cuántos números de 5 dígitos pueden formarse con los dígitos 1,2,3,4?

ii) ¿Cuántos números de 5 dígitos pueden formarse con los dígitos 0,1,2,3,4?

iii) ¿Cuántos números de 5 dígitos pueden formarse con los dígitos 1,2,3,4,5 pero sin repetir dígitos?

iv) ¿Cuántos números de 5 dígitos pueden formarse con los dígitos 0,1,2,3,4 pero sin repetir dígitos?

v) ¿Cuántos números *impares* de 5 dígitos pueden formarse con los dígitos 0,1,2,3?

vi) ¿Cuántos números de 4 dígitos pueden formarse con los dígitos de 0,1,2,3,4,5 mayores que 1527 y menores que 4512?

vii) ¿Cuántos números de 4 dígitos múltiplos de 4 pueden formarse con los dígitos 0,1,2,3,4,5, sin repetir dígitos?

2) i) ¿En cuántas formas pueden fotografiarse en hilera una familia de 5 personas y Tom (el perro)?

ii) ¿En cuántas formas pueden fotografiarse la misma familia pero ahora mamita y papito posan juntos y Gustavito o Andreita tienen a Tom?

iii) ¿En cuántas formas pueden fotografiarse, en hilera, tres familias de 5,7,3 personas, pero con la condición que los ingresantes de cada familia posen juntos? (Complicar el problema agregando animales domésticos, sentados, parados,...).

3) Se tienen tres vasos y 5 botellas distintas de vino

i) ¿En cuántas formas pueden llenarse los vasos, sin mezclar los vinos, siendo los vasos idénticos?

ii) Mismo problema pero con vasos distintos.

4) Un cartel luminoso consta de 25 focos iguales y funciona prendiéndose y apagándose al azar cualquier número de focos

i) ¿Cuál es el número de posibilidades?

ii) Si 10 de los focos cambian simultáneamente ¿Cuál es el número total de posibilidades?

5) De una urna que contiene tarjetas con los números 0,1,2,3,4,5,6,7, 8,9 se extraen tres tarjetas en sucesión con reposición ¿Cuál es el número total de extracciones a,b,c tales que a+b+c sea impar?

6) Sea x = {1,2,3,4,5,6,7,8,9,} ¿Determinar, en cada caso, el número total de subconjuntos de 4 números tales que el producto sea divisible por:

i) 2

ii) 4

iii) 8

iv) 7

v) 10

vi) 14

vii) 11

7) La línea de trenes Tigre-Retiro tiene 17 estaciones. ¿Cuántos tipos de boletos hay que confeccionar, para viajar entre dos estaciones distintas

i) de ida

ii) ida y vuelta?

8) Sean a y b enteros positivos, $b \leq a$. Se dispone de a+b objetos distintos entre si. Si los quiere disponer en fila pero de manera tal que ningún par de los b objetos aparezcan juntos. ¿En cuántas formas puede hacerse?

Respuesta: $\frac{a!.(a+1)!}{(a-b+1)!}$

9) ¿Cuántas matrices con coeficientes 0 ó 1 y de nxn pueden formarse? Cuántas simétricas? ¿Cuántas simétricas de traza k, $k \in z$, $0 \leq k \leq n$ (*Nota:* Si $A = [a_{ij}]$ es una matriz de nxn la *traza* de A es la suma de los coeficientes $a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$).

10) De un grupo de 10 médicos se desean hacer guardias diarias distintas de 6 médicos durante tres días. ¿En cuántas formas es posible hacerlo?

Respuesta: El número total de guardias es $\binom{10}{6} = 20$. El primer día hay 210 posibilidades, el segundo día 209 y el tercero 208. Por lo tanto hay 210.209.208 = 9.129.120 posibilidades)

11) ¿Cuántos números menores que 1.000.000 pueden formarse con la condición de que contengan al 1,2,3 y 4? ¿Cuántos si no se admiten otros

dígitos distintos de 1,2,3 y 4?

Solución: Primer caso. Contamos los números que contienen 1,2,3 y 4 sin repetición. Hay $\binom{6}{4}.4!.6.6 = 12960$. Contemos los que contienen a 1,2,3 y 4 pero 1 de estos repetido. Hay $\binom{6}{5}.\frac{5!}{2!}.5.4 = 8640$. Contemos los que contienen solamente a 1,2,3 y 4. Hay dos posibilidades. Que se repita uno o que se repitan dos. El número es $4.\frac{6!}{3!} = 480$ y $\frac{6!}{2!.2!}\cdot\binom{4}{2} =$ $= 1080$ respectivamente. Sumando todos esos números resulta 23160.

El segundo problema resulta de sumar $4^6 + 4^5 + 4^4 + 4^3 + 4^2 + 4^1 =$ $= \frac{4^7 - 1}{4 - 1} - 1 = 5460$.)

12) ¿En cuántas formas pueden fotografiarse 10 personas puestas en fila con la condición que tres determinadas nunca posen juntas?

Solución: Sean 1,2 y 3 las personas que no deben posar juntas. Sea A_{ij} la totalidad de permutaciones en las que las personas i,j, $i \neq j$ posan juntas. Se trata de contar las permutaciones que no están en $A_{12} \cup A_{13} \cup A_{23}$. Aplicar entonces el principio de Inclusión-Exclusión. Respuesta 42.8!

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales.
Universidad de Buenos Aires.
Departamento de Matemática.