SOLUCIONES ENVIADAS

a problemas del número anterior

(1) Sean α, β, γ los ángulos de un triángulo. Mostrar que el triángulo es isósceles sí y sólo si

$$* \qquad tg(\alpha-\beta) + tg(\beta-\gamma) + tg(\gamma-\alpha) = 0$$

La siguiente solución fue enviada por Raúl D. Katz - Facultad de Ciencias Básicas de la Universidad Nacional de Rosario.

(i) Si el triángulo es isósceles, dos de sus ángulos (por ejemplo α y β) son iguales, entonces

$$tg(\alpha-\beta) + tg(\beta-\gamma) + tg(\gamma-\alpha) = 0 + tg(3\beta-180) + tg(180-3\beta) = 0$$

(ii) La ecuación * implica, después de un laborioso manipuleo de identidades trigonométricas, la siguiente ecuación

$$(tg\,\beta - tg\,\alpha)\,[tg^2\gamma - (tg\,\beta + tg\,\alpha)tg\,\gamma + tg\,\alpha\,.\,tg\,\beta] = 0$$

Por lo tanto, $tg\,\alpha = tg\,\beta$, $tg\,\gamma = tg\,\alpha$ ó $tg\,\gamma = tg\,\beta$. De donde concluímos que $\alpha = \beta$, $\gamma = \alpha$ ó $\gamma = \beta$ es decir, el triángulo es isósceles.

Transcribimos a continuación un argumento más simple, sugerido por el Dr. Oscar Cámpoli - IMAF.

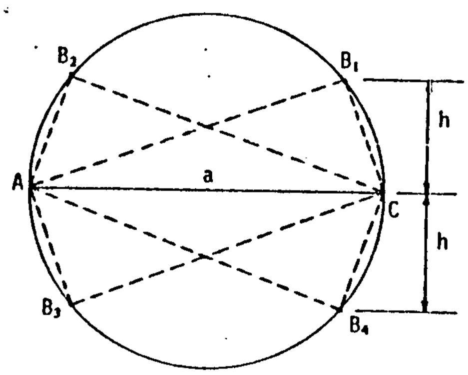
$$\begin{aligned} 0 &= tg(\alpha-\beta) + tg(\beta-\gamma) + tg(\gamma-\alpha) \\ &= tg(\alpha-\gamma)\,[1 - tg(\alpha-\beta).\,tg(\beta-\gamma)] + tg(\gamma-\alpha) \\ &= tg(\alpha-\gamma)\,[\cancel{1} - tg(\alpha-\beta).\,tg(\beta-\gamma) - \cancel{1}] \\ &= tg(\alpha-\gamma)\;tg(\beta-\alpha)\;tg(\beta-\gamma) \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\alpha = \gamma$, $\beta = \alpha$ ó $\beta = \gamma$. Es decir, el triángulo es isósceles.

(2) ¿Cuántos triángulos rectángulos no congruentes hay con una dada hipotenusa a y correspondiente altura h?

La siguiente solución fue enviada por el Dr. Juan A. Tirao - IMAF.

Sea ABC un triángulo rectángulo con hipotenusa a y altura h. Si B es el vértice opuesto a la hipotenusa, las únicas posibilidades para B son las indicadas en la figura siguiente como B_1, B_2, B_3 y B_4. Los cuatro triángulos así obtenidos son congruentes, por lo tanto existe un único triángulo rectángulo con hipotenusa a y altura h.



(5) Hallar todos los números de cuatro cifras x tales que si y es el número obtenido escribiendo en orden inverso las cifras de x ; x.y es un número de ocho cifras terminado en 000.

Transcribimos a continuación la solución enviada por el Dr. Fernando Levstein - IMAF.

Sea $x = a_1 a_2 a_3 a_4$, $y = a_4 a_3 a_2 a_1$ y supongamos además que x es par. Como x.y tiene ocho cifras, debemos tener $a_4 . a_1 \neq 0$. Por otro lado, x.y termina en 000 por lo tanto es divisible por

$1000 = 2^3.5^3$. Ahora, x e y no son divisibles por 10 (porque $a_4.a_1 \neq 0$), por lo tanto no pueden tener los factores primos 2 y 5 simultáneamente, lo cual implica que x es divisible por 2^3 e y es divisible por 5^3. Entonces es facil ver que,

$$a_3\, a_2\, a_1 \in \{125,\ 375,\ 625,\ 875\}$$

Observamos ahora que $a_3\, a_4$ es divisible por 4, por lo tanto

$$a_3\, a_4 \in \{12,\ 16,\ 32,\ 36,\ 64,\ 68,\ 84,\ 88\}$$

Finalmente, como $a_2\, a_3\, a_4$ es divisible por 8 las únicas posibilidades para este número son 216, 736, 264 y 784. Esto nos dice que x sólo puede ser uno de los siguientes números: 5216, 5736, 5264 y 5784.

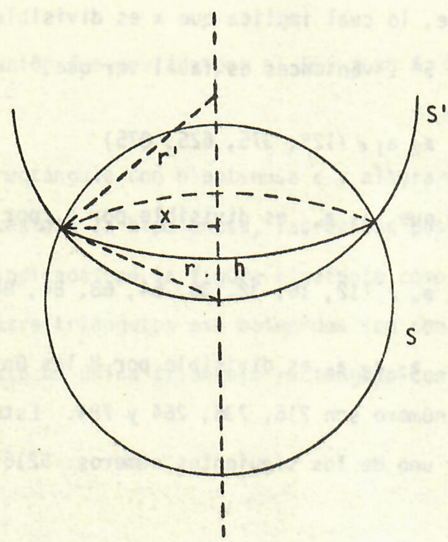
(8) Sea S una esfera de radio r y S' otra esfera de radio r' que pasa por el centro de S y no es interior a S. Sea A el área del casquete de S' determinado por S. Demostrar que A no depende de S'. ¿Cuánto vale A?

Transcribimos a continuación la solución enviada por los Dres. C. Sánchez y J. Tirao - IMAF.

El Teorema de Arquímedes nos dice que $A = 2\pi r'h$, donde h es la altura del casquete (ver figura al dorso). Por otro lado, observando la figura obtenemos

$$(r' - h)^2 + x^2 = r'^2 \quad \text{y} \quad h^2 + x^2 = r^2$$

de donde concluimos que $r^2 = 2r'h$. Por lo tanto $A = \pi r^2$, lo cual prueba que A es independiente de S'.


S'
r'
x
h
r
S