NUMEROS REALES

Jorge Vargas

En cualquier texto de la escuela media se observa el siguiente hecho: A partir de ciertas afirmaciones aceptadas como verdaderas (Los Axiomas) se deducen todas las propiedades de la geometría euclideana. Análogamente, a partir de ciertas propiedades de los números naturales se deducen todas las otras, y además se construyen los números enteros, racionales y reales. Lo que haremos en este artículo es de naturaleza semejante. En forma más precisa, a partir de *un* cierto número de propiedades fundamentales de los números reales (Los Axiomas) deduciremos todas las otras.

Hacemos notar al lector que existen varias maneras distintas de enunciar "las propiedades que caracterizan los números reales", la que presentamos aquí es la más conveniente para nuestros propósitos, al final del artículo indicaremos en forma precisa qué significa la frase "las propiedades que caracterizan los números reales".

Comencemos a enumerar las propiedades que caracterizan los números reales.

Los números reales es un conjunto $\mathbf{R}$ tal que existen dos funciones

(Suma) $\quad + \quad \mathbf{R} \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \qquad (x,y) \rightarrow x + y$

(Producto) $\quad \cdot \quad \mathbf{R} \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \qquad (x,y) \rightarrow x \cdot y$

que verifican las propiedades siguientes

(Asociatividad) $\quad x + (y + z) = (x + y) + z \qquad (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$

(Conmutatividad) $\quad x + y = y + x \qquad x \cdot y = y \cdot x$

(Neutro Aditivo) Existe un número real 0 (cero) tal que

$$x + 0 = 0 + x = x$$

(Neutro Multiplicativo) Existe un número real 1 distinto de cero tal que

$$1 \cdot x = x \cdot 1 = x$$

(Opuesto) Para cada número real x existe un número real y tal que

$$x + y = y + x = 0$$

(Inverso) Para cada número real x distinto de cero existe un número real z tal que

$$x \cdot z = z \cdot x = 1 .$$

Además, las operaciones de suma y producto están ligadas por la propiedad

(Distributividad) $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$

Recordemos algunas de las consecuencias de estas propiedades (abreviamos la palabra consecuencia por C).

<u>C1</u> Para cada real x existe un *único* número real y tal que $x + y = 0$.

Verificación: Si hubiera dos números reales distintos y, z tal que $x + y = 0$ y $x + z = 0$, entonces tendríamos

$$y = y + 0 = y + (x + z) = (y + x) + z = (y + x) + z = 0 + z = z$$

(Lector: justifique cada paso hecho).

$y = z$ absurdo.

DEFINICION. Para cada número real x, el único número real z tal que $x + z = 0$, se dice el *opuesto de* x y se lo nota por $-x$.

De esto, por definición -1 es el opuesto de 1.

<u>Ejercicio</u>: $0 = -0$ (Ayuda $0 = 0 + 0$).

<u>C2</u> Para cada número real no nulo x existe un *único* número real y tal que $x \cdot y = 1$.

Verificación: Si hubiera dos números reales distintos y, z tal que $x \cdot y = x \cdot z = 1$, tendríamos que

$$y = y \cdot 1 = y \cdot (x \cdot z) = (y \cdot x) \cdot z = 1 \cdot z = z$$

esto es, $y = z$, lo cual es absurdo.

DEFINICION. El único número real y tal que $x \cdot y = y \cdot x = 1$ se lo llama el inverso de x y se lo nota por

$$x^{-1} \quad a \quad 1/x .$$

Notar que como $1 = 1 \cdot 1$, se tiene que $1^{-1} = 1$.

Ejercicios

1) Pruebe que $-x = (-1) \cdot x$. Ayuda $(1+(-1)) = 0$, de esto $x \cdot (1+(-1)) = x \cdot 0 = ?$

2) $x \cdot 0 = 0$. Ayuda: como $0 = 0+0$, se tiene que $x \cdot 0 = x \cdot (0+0) = x \cdot 0 + x \cdot 0$, simplificando obtiene ...

3) Si $b+d = b+h$, entonces $d = h$.
Ayuda: $d = d+0 = d+(b+(-b)) = (d+b)+(-b) = (d+h)+(-b) = (h+b)+(-b) = h+(b+(-b)) = h+0 = ?$

4) Qué relación hay entre los tres últimos ejercicios.

5) Si $b \cdot d = b \cdot h$ y $b \neq 0$, entonces $d = h$.
$0 \cdot 1 = 0 \cdot 0$? ?

6) $a \cdot (-b) = (-a) \cdot b = -(a \cdot b)$.
Ayuda: $(0 = (a+(-a)) = (a+(-a)) \cdot b = \ldots$

7) $a \cdot b = (-a) \cdot (-b)$
Ayuda: $0 = a+(-a) = (a+(-a)) \cdot (-b)$.

8) $(-1) \cdot (-1) = 1$.

9) Qué relación hay entre ejercicios 6, 7, 8 ?

10) ¿Es cierto que si $a+a = 0$ entonces $a = 0$?

Hay muchas otras propiedades de los números reales que se pueden deducir en ejercicios análogos a estos, por ejemplo

$$(a+b)^2 = \ldots \qquad a^2 - b^2 = \ldots \quad ;$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{d} = \frac{ad+bc}{cd} \qquad (c \neq 0, \quad d \neq 0) \quad ;$$

Si $cd = 0$ entonces $c = 0$ ó $d = 0$. (Ayuda: si $c \neq 0$ y $d \neq 0$ entonces $1 = (cd)^{-1} \cdot cd = (cd)^{-1} \cdot 0 = 0$.

Para formular los axiomas de órden de los números reales recordemos que se llama relación en $\mathbf{R}$ a cualquier subconjunto S de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$.

Ejemplos de relaciones en $\mathbf{R}$ son

$S_1 = \{(x,x) : x \in \mathbf{R}\}$

$S_2 = \{(x,y) : x + y = 1\}$

$S_3 = \{(x,y) : x = y^2\}$

$S_4 = \{(x,y)\}$

Recordemos que si x e y son números reales y S es una relación en $\mathbf{R}$ entonces se verifica que $(x,y) \in S$ ó $(x,y) \notin S$ y sólo una de estas posibilidades, en el primer caso escribimos xSy y decimos (x *está* S-relacionado con y) y en el segundo caso escribimos $x\not{S}y$ y decimos (x *no está* S-relacionado con y).

Por ejemplo

para S_1 $\quad xS_1y_1$ si y sólo si $x = y$

para S_2 $\quad xS_2y$ si y sólo si $y = 1 - x$

para S_3 $\quad xS_3y$ si y sólo si $x = y$.

<u>Ejercicio</u>: Invente 20 relaciones distintas en $\mathbf{R}$.

Los axiomas de órden de los números reales dicen:

Existe una relación $<$ en $\mathbf{R}$ (se lee menor) que verifica a), b), c), d) y e), donde

a) $x < y$ e y x, es imposible.

b) Si $x < y$ e $y < x$, entonces $x < z$.

c) Dados x,y números distintos arbitrarios siempre vale que $x < y$ ó $y < x$.

Notar que por a) no puede darse simultaneamente que $x < y$ e $y < x$.

Esta relación de órden interactua con las operaciones de suma y multiplicación de la manera siguiente

d) Si $x < y$ entonces $x + z < y + z$

e) Si $x < z$ y $0 < u$ entonces $x \cdot u < z \cdot u$.

A partir de estas cinco propiedades se deducen otras propiedades importantes de los números reales, previamente hacemos algunas convenciones.

DEFINICION. Si x e y son números reales escribiremos $x \leqslant y$ para indicar que $x = y$ ó $x < y$.

C3 Si $0 < a$ entonces $-a < 0$.

Si $a < 0$ entonces $0 < -a$.

Verificación: la primer afirmación sigue de

$$-a = -a + 0 < -a + a = 0 .$$

La segunda de

$$0 = a + (-a) < 0 + (-a) = -a .$$

(Lector: justifique cada paso).

C4 1) Si $0 < a$, $0 < b$ entonces $0 < ab$

2) Si $a < 0$, $b < 0$ entonces $0 < ab$

3) Si $a < 0$, $0 < b$ entonces $ab < 0$

4) Si $0 < a$, $0 < b$ entonces $0 < a + b$

5) Si $a < 0$, $b < 0$ entonces $a + b < 0$

6) ¿Es cierto que si $a + a = 0$ entonces $a = 0$?

Verificación. Ejercicio.

C5 $0 < 1$.

En efecto, por los axiomas de órden se tiene que $0 < 1$ ó $1 < 0$ por C4 se tiene que $0 < 1 \cdot 1 = 1$.

C6 $-1 < 0$.

C7 $\quad x \neq 0 \Rightarrow 0 < x^2$

$x^2 + y^2 = 0 \Longleftrightarrow x = y = 0$

Ejercicio: $-(-a) = a$ en particular $-(-1) = 1$.

Pregunta: ¿Es siempre $-a$ negativo? ¿ $y - a^2$?

Ejercicio: Si $x = -x$, entonces $x = 0$.

Hecho fundamental: $x \leqslant y$ si y sólo si $0 \leqslant y - x$.

Verificación: Aquí hay dos teoremas a probar (los escribimos en columnas paralelas)

H) $x \leqslant y$

T) $0 \leqslant y - x$

Por los axiomas y la hipótesis

$$x + (-x) \leqslant y + (-x)$$

Pero $0 = x + (-x)$;

$y + (-x) = y - x$

de esto

$$0 \leqslant y - x$$

H) $0 \leqslant y - x$

T) $x \leqslant y$

Por los axiomas y la hipótesis

$$0 + x \leqslant (y - x) + x$$

Pero $0 + x = x$

$(y - x) + x = y + (-x + x) = y$

de esto

$$x \leqslant y .$$

FIN

Ejercicio: $x \leqslant y$ equivale a $0 \leqslant y - x$ equivale a $x - y \leqslant 0$ equivale a $-y \leqslant -x$.

Si no le sale, estudie bien C4, C5, C6 y el Hecho fundamental.

Además de estas se pueden deducir muchas propiedades, por ejemplo

$0 < x$ sí y sólo si $0 < x^{-1}$.

$x < 0$ si y sólo si $x^{-1} < 0$

$x \leqslant y$ si y sólo si $x \cdot z \leqslant y \cdot z$ para algún $0 < z$

$0 < x \leqslant y$ si y sólo si $0 < y^{-1} \leqslant x^{-1}$.

Si a,b tienen la misma positividad

$\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ si y sólo si $ad < cb$

$0 \leqslant x^2$, la igualdad vale sólo si $x = 0$.

El lector puede consultar E.R. Gentile, Notas de Algebra, Ed. Eudeba para introducir los números naturales, enteros y racionales a partir de los axiomas enunciados.

Nosotros no lo haremos aquí y creemos que aunque el lector no tenga el libro indicado podrá continuar con la lectura de este artículo.

El lector habrá notado que si uno reemplaza el conjunto de los números reales por el conjunto de los números racionales con sus operaciones y relación de órden usual, entonces se verifican los axiomas hasta ahora expuestos, por consiguiente surge la pregunta. ¿Qué diferencia los números racionales de los números reales? Para contestar a esto necesitamos varias definiciones.

DEFINICION. Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}$. Una *cota superior* de A es un número real b tal que todo elemento de A es menor o igual a b.

En símbolos: b es cota superior de A si para cualquier $a \in A$ se tiene que $a \leq b$.

Si dibujamos a los números reales en una recta, entonces las cotas superiores de A son todos los números a la derecha de A. (Para cada ejemplo que haremos, le aconsejamos al lector hacer un dibujo).

Ejemplos:

Si A es el conjunto de los números negativos 1 es cota superior de A puesto que cualquier número negativo es menor que 1. También 2, 3, 0, son cotas superiores de A. Pero -1 no es cota superior de A puesto que $-1 < -\frac{1}{2}$ esto es, -1 es más pequeño que algún elemento de A.

Otro ejemplo: Fijemos un número entre menos uno y uno, esto es, fijamos a tal que $-1 < a < 1$.

Consideremos el conjunto de todas las potencias con exponentes naturales de a, esto es,

$$A = \{a, a^2, a^3, a^4, a^5, \ldots\}$$

Afirmamos que 1 es una cota superior de A.

En efecto:

Caso a positivo

Entonces $0 < a < 1$ y $0 < a$, de esto $0 \cdot a < a \cdot a < 1 \cdot a$ o sea $a^2 < a$ como $0 < a$, se tiene $a^2 \cdot a < a \cdot a$ o sea $a^3 < a^2$, como $0 < a$ se tiene que $a^3 \cdot a < a^2 \cdot a$, es decir $a^4 < a^3$, procediendo sucesivamente se llega a que

$$\ldots < a^n < \ldots < a^5 < a^4 < a^3 < a^2 < a < 1$$

Por consiguiente 1 es mayor que cualquier potencia de exponente natural de a, lo cual dice que 1 es una cota superior de A. Note que la cuenta hecha, dice también que a es una cota superior de A.

Caso a negativo, entonces $-a$ es positivo a^n es negativo si n es impar $a^n = (-a)^n$ y positivo si n es par.

Por lo hecho en la primera parte del ejemplo podemos concluir que $-a$ es una cota superior de A y como $-1 < a$, implica $-a < 1$, se tiene también que 1 es cota superior de A.

Note que si a es positivo a^2 no es cota superior de A puesto que $a^2 < a$ por consiguiente a^2 no es mayor o igual a todo elemento de A. Mientras que si a es negativo, a^2, sí, es cota superior de A.

Ejercicios:

Si $A = \{ \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots \}$. Entonces $\frac{3}{4}$; 1; 1,5; 2; 3; 6 son cotas superiores de A mientras que 0,2; $\frac{1}{3}$; $\frac{7}{25}$ no son cotas superiores de A. Produzca ejemplos de otras cotas superiores de A y de números que no son cotas superiores de A.

Posteriormente daremos más ejemplos de estas cosas.

DEFINICION. Un número real es un *supremo* del conjunto A si es una cota superior de A y es menor o igual a cualquier otra cota superior de A.

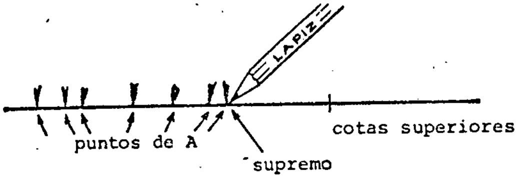
En símbolos b es un supremo de A si

1) $a \leq b$ para todo $a \in A$.

2) Si c es otra cota superior de A, entonces $b \leq c$.

1) dice que b es cota superior de A y 2) dice que es la menor.

Si dibujamos los números reales en una recta, el supremo de A es el número más pequeño de los que están a la derecha de A.



Ejemplos si $-1 < a < 1$ y $A = \{a, a^2, a^3, a^4, \ldots\}$

$0 < a$ entonces supremo de A es a

$a < 0$ entonces supremo de A es a^2.

En ambos casos hemos verificado que los números propuestos para supremos son cotas superiores de A pero si, c es otra cota superior de A, c es mayor o igual a todo elemento de A, en particular si a es positivo como $a \in A$ se tiene $a \leq c$, y si a es negativo entonces $a^2 \in A$ y se tiene $a^2 \leq c$.

C7 Si un conjunto admite un supremo, este es único.

En símbolos

H) b, b' supremos de A

T) $b = b'$

Prueba: como b y b' son supremos de A sabemos que b y b' son cotas superiores de A. Ahora por ser b supremo de A se tiene que b es menor o igual a cualquier cota superior de A, en particular $b \leq b'$. Por otro lado por ser b' supremo de A se tiene que b' es menor o igual a cualquier cota superior de A, en particular $b' \leq b$. Los axiomas de órden implican $b = b'$. FIN

C7 permite redefinir la noción de supremo así:

"El supremo de A es la menor de las cotas superiores de A".

Hecho importante: Si tenemos un conjunto A y una cota superior de A que pertenece a A, entonces dicha cota superior es el supremo de A. Simbólicamente:

H) b cota superior de A T) b es el supremo de A
$b \in A$

Verificación: Debemos comprobar

1) b es cota superior de A

2) Si c es otra cota superior de A, entonces $b \leq c$.

1) es claro por la hipótesis. Ahora si c es cota superior de A, entonces c es mayor o igual a cualquier elemento de A, en particular, como $b \in A$, se tiene $b \leq c$. FIN

Después de esto se deduce fácilmente que si $-1 < a < 1$ y $A = \{a, a^2, a^3, \ldots\}$.

$0 < a$, entonces supremo de A es a

$a < 0$, entonces supremo de A es a^2.

En los pocos ejemplos que hemos hecho es fácil encontrar el supremo del conjunto A. Surge la pregunta:

¿Cualquier conjunto tiene supremo?

El axioma que nos falta para caracterizar los números reales nos dice

AXIOMA DE EXISTENCIA DE SUPREMO

Cualquier conjunto no vacío de números reales, acotado superiormente admite supremo. Simbólicamente: Si $A \subset \mathbf{R}$ es no vacío, y A tiene al menos una cota superior, entonces A admite una menor cota superior, es decir A admite supremo.

En este artículo y siguientes probaremos que en base a los axiomas indicados es posible deducir todas las propiedades de los números reales. Como por ejemplo, existencia de raíces n-simas de números positivos, desarrollos en base diez, etc.

Antes de comenzar a desarrollar este programa, hagamos algunas reflexiones sobre ecuaciones.

Al intentar calcular la raíz cuadrada, cúbica, cuarta, quinta, etc. de un número a debemos resolver las ecuaciones

$$x^2 = a\,, \quad x^3 = a\,, \quad x^4 = a\,, \quad x^5 = a\,, \quad \text{etc.}$$

Análogamente, al intentar calcular $\log_2(a)$, $\log_3(a)$, $\log_{10}(a)$, etc., debemos resolver las ecuaciones $2^x = a$, $3^x = a$, $10^x = a$, etc. Siempre que se plantea resolver ecuaciones, realmente se plantean dos problemas

1) ¿Tiene la ecuación solución?

2) Sabiendo que la ecuación tiene al menos una solución, ¿cuántas hay en total?

Por ejemplo para cada $a > 0$ fijo, posteriormente probaremos que la ecuación $x^2 = a$ tiene al menos una solución positiva. ¿Habrá más soluciones positivas de $x^2 = a$? La respuesta es no y se justifica así:

Si x, y son números positivos tal que $x^2 = y^2 = a$ entonces $0 = x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$, lo cual implica que $x-y = 0$ ó $x+y = 0$, esto obliga que $x = y$ ó $x = -y$. La condición $x = -y$ es imposible puesto que x e y son positivos. De esto, sólo vale que $x = y$.

Por consiguiente hemos probado:

Si la ecuación $x^2 = a$ $(a > 0)$ tiene al menos una solución $x > 0$, entonces esa solución es la *única*.

Ejercicios:

1) Probar que si $a^2 = b^2$, entonces $a = b$ ó $a = -b$.

2) Si la ecuación $x^2 = a$, tiene solución, entonces tiene exactamente dos soluciones salvo que $a = 0$.

Probemos ahora

C8 Sea b un número real positivo, entonces existe un número real positivo x tal que $x^2 = b$.

Prueba: haciendo un dibujo el lector se convencerá fácilmente que el x tal que $x^2 = b$, es el supremo del conjunto que consiste de todos los números positivos cuyo cuadrado es menor o igual a b . La prueba de la proposición consiste en formalizar esta observación.

Sea $A = \{y > 0$ tal que $y^2 \leqslant b\}$

A es no vacío puesto que si $b > 1$ entonces $1 \in A$ y si $b < 1$, entonces $b^2 < b$, por consiguiente $b \in A$.

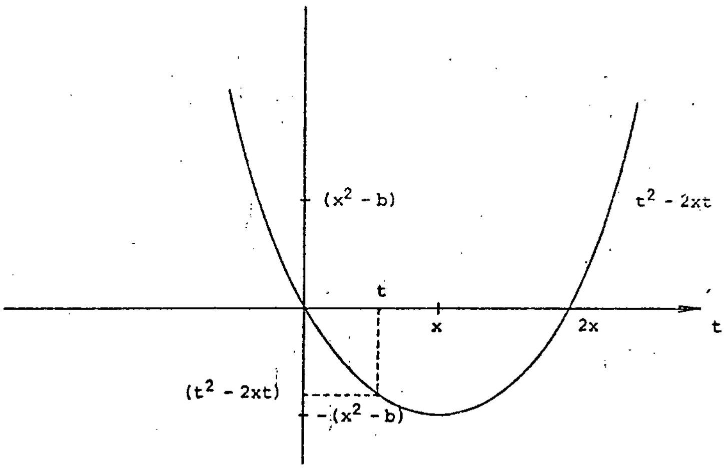
A es acotado, superiormente:

En efecto, probamos que $(b+1)$ es una cota superior de A . Sea $y \in A$ (buscamos $y \leqslant (b+1)$). Entonces $y^2 \leqslant b$. Por otro lado $(b+1)^2 = b^2 + b + b + 1 = b + n^{\underline{o}}$ positivo, o sea $b \leqslant (b+1)^2$ por consiguiente $y^2 \leqslant (b+1)^2$. Si y fuera mayor que $(b+1)$ tendríamos que $y = (b+1) + c$ con $c > 0$, de esto $y^2 = (b+1)^2 + c^2 + 2(b+1)c = (b+1)^2 + n^{\underline{o}}$ positivo, o sea, tendríamos $y^2 > (b+1)^2$ ¡absurdo! Lector, use los axiomas y sus consecuencias para justificar cada etapa de lo hecho. Analize cuidadosamente el uso que hemos dado de la hipótesis sobre b .

El axioma de existencia de supremo, nos dice que existe un número real x tal que supremo de A es x . Veamos ahora, que $x^2 = b$. Si x^2 fuera mayor que b , veamos que x no es el supremo de A . Para ver que x no es el supremo de A debemos comprobar que algún número menor que x es cota superior de A . Ahora, un número menor que x es de la forma $x - t$ con $t > 0$, por consiguiente, veamos que $x - t$ es cota superior de A para algún t positivo con la hipótesis que $x^2 > b$.

Como $(x-t)^2 = b + [(x-t)^2 - b]$, por consiguiente, si somos capaces de encontrar un número positivo t tal que $x-t$ sea positivo y $(x-t)^2 - b$ sea positivo, tendremos que $(x-t)^2 > b \geq y^2$ para cada $y \in A$. Pero entonces $(x-t) \geq y$ (si $(x-t)$ fuera menor que y, escriba $y = (x-t) + c$ con $c > 0$, calcule y llegara a qué $y^2 \geq b$ ¡absurdo!) lo cual dice que $(x-t)$ es cota superior de A. Por ser t positivo, $x-t$ es menor que x lo cual contradice el hecho de que x es el supremo de A. Por consiguiente $x^2 \leq b$.

Justifiquemos ahora la frase: si somos capaces ...



De acuerdo al dibujo podemos elegir t mayor que cero y menor que x tal que

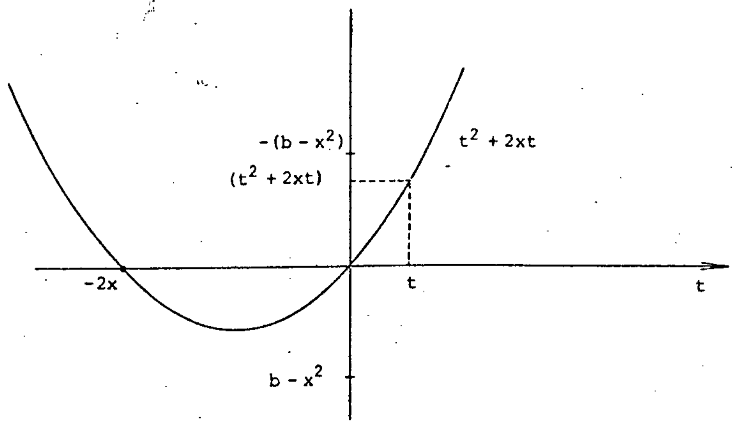
$$t^2 - 2xt > -(x^2 - b) \quad \text{o sea} \quad x^2 - b + t^2 - 2xt > 0 .$$

Veamos finalmente que x^2 no puede ser menor estricto a b. Precisamente, si x^2 fuera menor que b probemos que x no es el supremo de A.

Si x^2 fuera menor que b, por la definición de A tendríamos que $x \in A$, veamos ahora que $x + t \in A$ para algún $t > 0$. Para esto necesitamos que $(x+t)^2 \leq b$ pero $(x+t)^2 - b = x^2 - b + 2xt + t^2$.

De acuerdo al dibujo de la página siguiente podemos elegir $t > 0$ tal que $t^2 + 2xt > -(b - x^2)$ o sea $b > (x+t)^2$, lo cual dice que

$x+t \in A$ y ciertamente $x+t$ es mayor que x que es el supremo de A.



Esto concluye la prueba que todo número real positivo admite raíz cuadrada. Recomendamos al lector analizar cuidadosamente donde se usó el axioma de existencia de supremo.

Con las mismas ideas pero complicando las cuentas se prueba que

C9 Sea b un número real positivo, y n un número natural entonces existe un único número real positivo x tal que $x^n = b$.
Para una prueba referimos a Rey Pastor.

C9 nos permite definir $\sqrt[n]{b}$ para $b > 0$, igual al único número real positivo y tal que $y^n = b$. Si b es negativo y n par sabemos que es imposible encontrar soluciones de $y^n = b$. Si b es negativo y n es impar, se prueba fácilmente que $-\sqrt[n]{(-b)}$ es la única solución de $y^n = b$. Finalmente, se prueba muy fácilmente que si b es positivo y n par $y^n = b$ tiene exactamente dos soluciones, que son $\sqrt[n]{b}$, $-\sqrt[n]{b}$.

Definimos para $\frac{m}{n}$ racional en su mínima expresión (es decir, n, coprimo con m y $n > 0$) y para $b > 0$

$$b^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{b^m}$$

Como $((\sqrt[n]{b})^m)^n = (\sqrt[n]{b})^{nm} = ((\sqrt[n]{b})^n)^m = b^m$ la unicidad de la raíz n-sima, nos dice que

$$b^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{b})^m$$

Usando el mismo tipo de argumento se prueba fácilmente que $\sqrt[nd]{b^{md}} = (\sqrt[nd]{b})^{md}$ para cualquier natural d.

Para estudiar la suryectividad de $\log_{10} : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ debemos primeramente entender qué significa calcular 10^x para cualquier real x. O más, generalmente que significa a^x para $a > 0$ y x arbitrario. Si x es racional ya lo sabemos. Pero ¿qué significan por ejemplo $2^{\sqrt{2}}$, $\pi^{\sqrt{3}}$, $(\sqrt{2})^{\sqrt{5}}$, 10^{π}, π^{π} ?

DEFINICION. Si $a \geq 1$ y $x \in \mathbb{R}$, definimos

$$a^x = \text{supremo}\,\{z \in \mathbb{R} : z = a^r \text{ con } r \text{ racional y } r \leq x\}$$

Si $0 < a < 1$ y $x \in \mathbb{R}$, definimos

$$a^x = \left(\frac{1}{a}\right)^{-x}$$

Para que la definición sea correcta debemos verificar que el $\{z \in \mathbb{R} : z = a^r \text{ con } r \text{ racional y } r \leq x\}$ es no vacío y está acotado superiormente.

Para esto probemos los siguientes hechos

i) Propiedad arquimediana de los números reales es decir, si $a > 0$, $b > 0$, entonces existe un natural n tal que $na > b$.

ii) Entre dos números reales siempre hay un racional es decir, si a,b reales con $a < b$, entonces existe un racional r con $a < r < b$.

iii) Si $x < y$, x,y racionales $\Rightarrow a^x < a^y$ $(a > 1)$.

Veamos como i), ii) y iii) implican que la definición es correcta. Como $x - 1 < x$ ii) nos dice que existe un racional r con $r < x$, de esto, el conjunto en cuestión es no vacío. Por i) existe un natural n tal que $x < n$, por consiguiente, $r < n$ para cualquier racional r con $r \leq x$, por iii) se tiene que $a^r < a^n$ de esto, a^n es una cota superior del conjunto en cuestión. El axioma de existencia de supremo nos dice que la definición es correcta.

Verificación de i) Si $a > b$ no hay nada que probar. Si $a < b$, sea $S = \{x : x = na : n = 1, 2, 3, \dots\}$

Si la afirmación fuera falsa, tendríamos que $na \leqslant b$ para cualquier natural. Por consiguiente S estaría acotado superiormente por b. Sea s el supremo de S. Entonces $(n+1)a \leqslant s$, para cualquier natural n, en consecuencia $na \leqslant s - a$ para cualquier natural n. Esto dice que $s-a$ es otra superior de S como $a > 0$, se tiene que $s-a < s$, lo cual contradice que s es la menor de las cotas superiores de S.

Verificación de ii) Si a y b son racionales, sabemos que $\frac{1}{2}(a+b)$ también es racional. Además, $2a = a + a < a + b < b + b = 2b$ de esto, $a < \frac{1}{2}(a+b) < b$, lo cual dice que entre dos racionales siempre hay un tercer racional.

Caso general: Entonces, vale que $a < 0 < b$ ó $0 < a < b$ ó $a < b \leqslant 0$. Como $a < b < 0$, implica $0 < -b < -a$ y el opuesto de un racional es racional, basta verificar el caso $0 < a < b$.

Por la propiedad arquimedeana, existe un natural n tal que $n \cdot 1 > 1 : (b-a)$ o sea $(b-a) > \frac{1}{n}$. Nuevamente por la propiedad arquimedeana existe al menos un natural m tal que $m \geqslant b \cdot n$, Elijamos k el menor natural tal que $k \geqslant b \cdot n$. Por consiguiente $b \cdot n > (k-1)$. (De lo contrario sería $(k-1) > b \cdot n$, lo que contradice la minimalidad de k).

Por lo tanto $b \geqslant \frac{k-1}{n}$. Afirmamos que $\frac{k-1}{n} \geqslant a$. Si $\frac{k-1}{n}$ fuera menor que a, tendríamos $\frac{k-1}{n} < a \Rightarrow$ (sumando $\frac{1}{n}$ en ambos miembros) $\frac{k}{n} < a + \frac{1}{n} \leqslant a + (b-a) = b$, ¡absurdo!

Verificación de iii) Nuestra hipótesis es $a > 1$, x, y números racionales con $x < y$. La tesis es $a^x < a^y$.

Para probar que $a^y > a^x$, debemos verificar que $a^y - a^x$ es positivo. Ahora $a^y - a^x = a^x(a^{y-x} - 1)$ y como $a^x > 0$, debemos verificar que $a^{y-x} - 1 > 0$. Para esto, basta ver que si r es un número racional positivo entonces $a^r > 1$. Por ser $r > 0$, y pode mos escribir $r = \frac{m}{n}$ con m y n naturales.

Por definición $a^r = (a^m)^{1/n}$. $a > 1$ implica que $a^m > 1$, para completar la prueba basta ver que si $h > 1$, entonces $h^{1/n} > 1$. Pero si $h^{1/n}$ fuere menor o igual a 1. Tendríamos que $(h^{1/n})^n$ sería menor o igual a 1^n, o sea $h \leq 1$, absurdo! Esto concluye la verificación de iii).

Ejercicios

Sea m natural

1) Si $a > 1$, m natural, entonces $a^m > 1$.

2) Si $0 < a < b$, entonces $a^{1/m} < b^{1/m}$.

3) Qué relación existe entre los dos ejercicios anteriores y la verificación de iii).

Ahora nos proponemos probar:

C 10 Si $a > 0$; $a \neq 1$ y $b > 0$ entonces existe un único número real x tal que $a^x = b$.

Otra forma de enunciar la conclusión es: "Siempre es posible calcular $\log_a(b)$". En la escuela secundaria aprendimos a calcular $\log_{10}(b)$ y ¿cómo lo hacíamos? Primeramente usando cierta regla, calculábamos la "característica" de $\log_{10}(b)$ y luego mirábamos en la tabla de Höuel en donde leíamos la "mantisa" de $\log_a(b)$.

En lo que sigue desarrollaremos los conceptos necesarios para definir característica y mantisa y luego probaremos el teorema enunciado.

Parte entera y expresión decimal de un número real

Fijemos números reales b, c con $b < c$. Convengamos en denotar por $[b,c)$ el conjunto de todos los números reales mayores o iguales a b y menores que c. En símbolos

$$[b,c) = \{ x : b \leq x \quad y \quad x < c\}$$

Imaginando los números reales como los puntos de una recta es fácil convencerse que

$$\mathbb{R} = \bigcup_{n \text{ entero}} [n, (n+1))$$

Formalmente esto se enuncia así:

C 11 Para todo número real x, existe un único entero n (que depende de x) tal que $n \leq x < (n+1)$.

En efecto: si $x > 0$, por la propiedad arquimediana de los números reales existe algún natural tal que $x < k \cdot 1$. Denotemos por m el menor natural tal que $x < m$, entonces $m-1 \leq x$, si llamamos $n = m-1$ tenemos que $n \leq x < n+1$. Si x es negativo, $-x$ es positivo y por consiguiente existe un natural n tal que $n < -x \leq (n+1)$, por tanto $-(n+1) \leq x < (-n)$. FIN

El número entero n tal $n \leq x < (n+1)$ se dice *la parte entera* de x. Por ejemplo, parte entera de $\sqrt{2}$ es 1, puesto que $1 < \sqrt{2} < 2$.

Ejercicios:

1) Calcular la parte entera de $\sqrt{2}$; $\sqrt{3}$; $\sqrt{5}$; $-\sqrt{2}$; $-\sqrt{3}$; $-\sqrt{5}$; $\sqrt{2} + \sqrt{3}$; $\sqrt{2} - \sqrt{3}$; $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$.

2) Si parte entera de x es n, calcular parte entera de $-x$.

3) ¿Qué relación existe entre la parte entera de $x+y$ ó $(x \cdot y)$ y las respectivas partes enteras de x e y?

Ahora encontraremos el desarrollo decimal de x. Para esto, notemos que una manera de dividir $[b,c)$ en 10 partes iguales y disjuntas es:

$$[b,c) = [b, b+\tfrac{1}{10}(c-b)) \cup [b+\tfrac{1}{10}(c-b), b+\tfrac{2}{10}(c-b)) \cup$$

$$\cup [b+\tfrac{2}{10}(c-b), b+\tfrac{3}{10}(c-b)) \cup \dots \cup [b+\tfrac{9}{10}(c-b), b+\tfrac{10}{10}(c-b)) =$$

$$= \bigcup_{i=0}^{9} [b + \frac{i}{10}(c-b) \, , \, b + \frac{(i+1)}{10}(c-b))$$

Por ejemplo:

$$[0,1) = [0, \frac{1}{10}) \cup [\frac{1}{10}, \frac{2}{10}) \cup \ldots \cup [\frac{9}{10}, 1) =$$

$$[n, n+1) = [n, n+\frac{1}{10}) \cup [n+\frac{1}{10}, n+\frac{2}{10}) \cup \ldots \cup [n+\frac{9}{10}, n+1) =$$

$$= \bigcup_{i=0}^{9} [n+\frac{i}{10}, n+\frac{(i+1)}{10})$$

Notemos que si x pertenece al conjunto $[b,c)$, entonces existe un único número natural i entre cero y nueve tal que

$$x \in [b+\frac{i}{10}(c-b), b+\frac{(i+1)}{10}(c-b)) .$$

Para encontrar el desarrollo decimal de x procedemos así:

Si n es la parte entera de x, entonces $x \in [n, n+1)$, ahora dividimos $[n, n+1)$ en diez partes iguales, por tanto existe un único entero a_1 entre 0 y 9 tal que

$$x \in [n+\frac{a_1}{10}, n+\frac{(a_1+1)}{10})$$

esto es, existe un único entero a_1 entre 0 y 9 tal que

$$n+\frac{a_1}{10} \leq x < n+\frac{(a_1+1)}{10} .$$

Si ahora dividimos el conjunto $[n+\frac{a_1}{10}, n+\frac{(a_1+1)}{10})$ en 10 partes tenemos que existe un entero a_2 entre 0 y 9 tal que

$$n+\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10}(n+\frac{(a_1+1)}{10} - (n+\frac{a_1}{10})) \leq x <$$

$$< n+\frac{a_1}{10}+\frac{(a_2+1)}{10}(n+\frac{(a_1+1)}{10} - (n+\frac{a_1}{10})).$$

Calculando obtenemos que

$$n + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} \leqslant x < n \; \frac{a_1}{10} + \frac{(a_2+1)}{10^2}$$

Dividiendo el conjunto $[n + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2}, n + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{1}{10^2})$ en 10 partes iguales y procediendo sucesivamente, finalmente encontramos una familia de números enteros $n, a_1, a_2, a_3, \ldots a_k, \ldots$ tal que

a) $0 \leqslant a_i \leqslant 9$ para todo $i = 1, 2, 3, \ldots$

b) $n + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10} + \ldots + \frac{a_k}{10^k} \leqslant x < n + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \ldots + \frac{a}{10^K} + \frac{1}{10^K}$

para todo $k = 1, 2, \ldots$

Usualmente se llama a los números $n, a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots$ el *desarrollo decimal* de x y se escribe

$$x = n, a_1, a_2, a_3, \ldots$$

Ejemplo: $\sqrt{2} = 1{,}41\ldots$

Puesto que como $1 < 2 < 4 \Rightarrow \sqrt{1} = 1 < \sqrt{2} < \sqrt{4} = 2$, tenemos que la parte entera de raíz cuadrada de dos es 1. Como

$$1{,}96 = (1 + \frac{4}{10})^2 = (1{,}4)^2 < 2 \leqslant (\sqrt{2})^2 < (1 + \frac{5}{10})^2 = (1{,}5)^2 = 2{,}25$$

tenemos que $1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$. Como

$$(1{,}41)^2 = (1 + \frac{4}{10} + \frac{1}{100})^2 < 2 = (\sqrt{2})^2 < (1{,}42)^2 = (1 + \frac{4}{10} + \frac{2}{100})^2$$

tenemos que $1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$.

Procediendo de esta manera se calculan todos los decimales que se deseen de $\sqrt{2}$.

Ejercicio: Calcular decimales de $\sqrt{3}$; $\sqrt{5}$; $\sqrt{3} + \sqrt{5}$; $\sqrt{3} \cdot \sqrt{5}$.

C 1º Fijemos un número real x y $n, a_1, a_2, a_3, \ldots$ su desarrollo decimal. Sea

$$B = \{y : y = n + \frac{a_1}{10} + \ldots + \frac{a_k}{10^k} \quad , \quad k = 1, 2, \ldots\}$$

entonces supremo de B es x

(Si $x = \sqrt{2}$, entonces $B = \{1; 1,4; 1,41; 1,414; \ldots\}$).

Prueba: Por lo desarrollado sabemos que x es una cota superior de B. Sea d el supremo de B. (Existe porque ...) entonces $d \leqslant x$. Si d fuera estrictamente menor que x entonces tendríamos que $x - d > 0$, por tanto existiría un natural k tal que $\frac{1}{10^k} < x - d$, lo cual implicaría que $d < x - \frac{1}{10^k}$. Por otro lado

$$x < n + \frac{a_1}{10} + \ldots + \frac{a_k}{10^k} + \frac{1}{10^k}$$

lo cual implica que $x - \frac{1}{10^k} < n + \frac{a_1}{10} + \ldots + \frac{a_k}{10^k}$, todo esto más, la transitividad del órden implicaría que $d < n + \frac{a_1}{10} + \ldots + \frac{a_k}{10^k}$, lo cual dice que d no es el supremo de B, absurdo y fin.

Notar que geométricamente, el desarrollo en base diez de un número es la interpretación de dicho número como punto de una recta.

Ejercicios:

1) Usando C 11 deducir que entre dos reales siempre hay un número racional.

2) Probar la existencia de un desarrollo de x en base 2.

Ahora comenzamos a probar que $a^x = b$ tiene solución y es única.

Primero notemos que se puede suponer $a > 1$. Puesto que si $0 < a < 1$, entonces $\frac{1}{a} > 1$ y si $(\frac{1}{a})^z = b \Rightarrow a^{-z} = b$ en consecuencia $x = -z$ es la solución buscada.

De ahora en más supondremos que $a > 1$.

Unicidad de x

Si hubiera x e y tal que $a^x = a^y = b$, como $x < y$ ó $y < x$ ó $x = y$, si fuera $x < y$ tendríamos, (tomando r, s racionales tales que $x < r < s < y$) que $a^x < a^r < a^s < a^y$ absurdo. Caso $y < x$ se trata de la misma manera.

Existencia: Lo que hacemos es construir "explícitamente" la característica y la mantisa de "$\log_a(b)$".

Consideremos el conjunto

$$S = \{z \in \mathbf{R} : z = a^n \text{ con } n \text{ entero}\} =$$

$$= \{\ldots a^{-2}, a^{-1}, a^0, a, a^2, \ldots\}$$

Afirmamos que S no está acotado superiormente. Si lo estuviera, tendría una menor cota superior s pero entonces

$$a^{n+1} \leqslant s \qquad \text{para todo entero } n$$

lo cual dice que

$$a^n \leqslant \frac{s}{a} < s \qquad (\text{pues } a > 1) .$$

Por consiguiente existe al menos un entero n tal que $a^n > b$. (De lo contrario b sería cota superior de S). Llamemos k al *menor* entero tal que $a^k > b$, entonces $a^{k-1} \leqslant b$. (De lo contrario, $a^{k-1} > b$, lo que contradice la minimalidad de k). Por consiguiente, hemos probado que existe un entero c tal que $a^c \leqslant b < a^{c+1}$, dicho entero c se lo llama la *característica* de "$\log_a(b)$".

Ahora construímos la "mantisa" decimal por decimal. Dividimos el segmento $[c, c+1)$ en 10 partes iguales

$$[c, c+\tfrac{1}{10}) \cup [c+0{,}1 , c+\tfrac{2}{10}) \cup [c+0{,}2 , c+\tfrac{3}{10}) \cup \ldots \cup [c+\tfrac{9}{10}, c+1)$$

Por lo tanto el segmento $[a^c, a^{c+1})$ queda dividido en los 10 segmentos

$$[a^c, a^{c+0,1}) \cup [a^{c+0,1}, a^{c+0,2}) \cup \ldots \cup [a^{c+0,9}, a^{c+1}) .$$

Como $a^c \leq b < a^{c+1}$, el número b está en uno de estos segmentos. Llamemos $c + \frac{a_1}{10}$ (a_1 un número entre 0 y 9) el orígen del segmento la cual b pertenece.

Por consiguiente, tenemos que

$$a^{c+\frac{a_1}{10}} \leq b \leq a^{c+\frac{a_1+1}{10}} \quad \text{con} \quad 0 \leq a_1 \leq 9 , \quad a_1 \text{ natural}$$

El intervalo $[c + \frac{a_1}{10} , c + \frac{a_1}{10} + \frac{1}{10})$ tiene longitud 0,1 . Dividámos los en 10 partes iguales. Por consiguiente el intervalo

$$[a^{c+\frac{a}{10}} , a^{c+\frac{a}{10}+\frac{1}{10}})$$

queda dividido en 10 partes ¡no necesariamente iguales! b pertenece a una de ellas y sólo o a una.

Llamemos $a^{c+\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}}$ ($a_2 = 0, \ldots 9$) el origen del intervalo al cual b pertenece. Note que el intervalo $[c + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} , c + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{1}{10^2})$ tiene longitud $1/10^2$. Reiterando este proceso indefinidamente, se construye una sucesión de números $a_1 , a_2 , \ldots$ tal que

1) Cada a_k es un natural entre 0 y 9.

2) $a^{c+\frac{a_1}{10}+\ldots+\frac{a_k}{10^k}} \leq b < a^{c+\frac{a_1}{10}+\ldots+\frac{a_k}{10^k}+\frac{1}{10^{k+1}}}$

para cada $k = 1, 2, \ldots$

¿Pero quién es $x = \log_a(b)$?

La respuesta es:

x = supremo del conjunto A donde

$$A = \{y : y = c + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \ldots + \frac{a_k}{10^k} \text{ para algún } k = 1, 2, \ldots\}$$

En términos clásicos $x = c, a_1 , a_2 , a_3 , \ldots$.

Para completar la prueba del teorema, debemos verifica que

i) A es acotado superiormente.

ii) $a^x = b$

i) es fácil ya que por construcción, los números $c + \frac{a_1}{10} + \ldots + \frac{a_k}{10}$ pertenece al intervalo $[c, c+1)$, por consiguiente $(c+1)$ es una cota superior de A.

Verifiquemos ii)

Como $c + \frac{a_1}{10} + \ldots + \frac{a_k}{10} \leq x$ para cada k, y $a > 1$ se tiene que

$$a^{c + \frac{a_1}{10} + \ldots + \frac{a_k}{10^k}} \leq a^x \quad \text{para cada } k.$$

Además, por la construcción de los números $c + \frac{a_1}{10} + \ldots + \frac{a_k}{10}$ se tiene que

$$c + \frac{a_1}{10} + \ldots + \frac{a_k}{10^k} + \frac{1}{10^k} \geq c + \frac{a_1}{10} + \ldots + \frac{a_r}{10^r}$$

para cualquier $r \geq k$ y que $c + \frac{a_1}{10} + \ldots + \frac{a_k}{10^k} + \frac{1}{10^k} \geq$ $\geq c + \frac{a_1}{10} + \ldots + \frac{a_r}{10^r}$ para $r \leq k$ puesto que $a_1 \ldots a_k$ son números no negativos, en consecuencia (por definición de supremo)

$$c + \frac{a_1}{10} + \ldots + \frac{a_k}{10^k} + \frac{1}{10^k} \geq x \quad \text{para cada } k.$$

Como $a > 1$ se tiene que

$$a^x \leq a^{c + \frac{a_1}{10} + \ldots + \frac{a_k}{10} + \frac{1}{10^k}} \quad \text{para cada } k.$$

En consecuencia, tenemos que para cada k vale

$$a^{c + \frac{a_1}{10} + \ldots + \frac{a_k}{10^k}} \leq b \leq a^{c + \frac{a_1}{10} + \ldots + \frac{a_k}{10^k} + \frac{1}{10^k}}$$

$$a^{c + \frac{a_1}{10} + \ldots + \frac{a_k}{10^k}} \leq a^x < a^{c + \frac{a_1}{10} + \ldots + \frac{a_k}{10^k} + \frac{1}{10^k}}.$$

Buscamos $a^x = b$, para ello basta ver que $\frac{b}{a^x} = 1$.

Usando las dos desigualdades anteriores se tiene que

$$\frac{a^{c+\frac{a_1}{10}+\dots+\frac{a_k}{10^k}}}{a^{c+\frac{a_1}{10}+\dots+\frac{a_n}{10^k}+\frac{1}{10^k}}} \leqslant \frac{b}{a^x} \leqslant \frac{a^{c+\frac{a_1}{10}+\dots+\frac{a_k}{10^k}+\frac{1}{10^k}}}{a^{c+\frac{a_1}{10}+\dots+\frac{a_k}{10^k}}}$$

Simplificando, se obtiene

$$a^{-\frac{1}{10^k}} \leqslant \frac{b}{a^x} \leqslant a^{\frac{1}{10^k}}$$

Razonemos intuitatativamente, si k es grande, 10^k es muy grande y en consecuencia $1/10^k$ es casi cero por lo tanto $a^{\pm 1/10^k}$ es casi 1. En consecuencia $b = a^x$.

Formalmente, un modo de proceder es:

Probemos que supremo $B = 1$ donde

$$B = \{y : y = a^{-1/10^k} \qquad k = 1, 2, \dots\}$$

Como $a > 1$, entonces $a^{1/10^k} > 1$ lo cual dice

$$1 > \frac{1}{a^{1/10^k}} = a^{-1/10^k}$$

Por lo tanto, 1 es una cota superior de A. Probemos que 1 es su supremo. Llamemos d al supremo de A. Por ser la menor cota superior de A se tiene que $d \leqslant 1$. Si d fuera menor que 1, tendríamos que

$$a^{-1/10^{(k+1)}} \leqslant d \quad \text{para cada} \quad k = 1, 2, \dots$$

o sea $\sqrt[10]{a^{-1/10^k}} \leqslant d$ para cada $k = 1, 2, \dots$ elevando a la décima potencia, se obtiene

$$a^{-1/10^k} \leqslant d^{10} \quad \text{para cada} \quad k = 1, 2, \dots$$

Como $d < 1$, $d^{10} < d$ lo cual dice que d^{10} es una cota superior de A menor que su supremo, ¡absurdo! que provino de suponer $d < 1$.

Como por (*) $\frac{b}{a^x}$ es una cota superior de A obtenemos que $1 \leqslant \frac{b}{a} \leqslant a^{1/10^k}$ $k = 1, 2, \ldots$.

De (*) también obtenemos que

$$a^{-1/10^k} \cdot \frac{b}{a^x} \leqslant 1 \qquad \text{para } k = 1, 2, \ldots$$

Pero un fácil ejercicio dice que

$$\text{supremo } C = 1 \quad \text{si}$$

$$C = \{y : y = a^{-1/10^k} \frac{b}{a^x} \qquad k = 1, 2, \ldots\}$$

Por lo tanto $\frac{b}{a^x} \leqslant 1$ lo cual concluye la prueba de que $b = a^x$.

<u>Nota 1</u>: Hemos probado que la función $x \to a$ de R en $R_{>0}$ es biyectiva, su inversa se la denota por $\log_a(b)$.

Si e denota el supremo del conjunto A donde

$A = \{y : y = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n!}\}$

(Pruebe que A está acotado superiormente). La función logaritmo $\log_a$ que se obtiene, si dice el logaritmo neperiano.

<u>Nota 2</u>: Si $a = 2$, $b = 5$, $c = 2$ pues $2^2 < 5 < 2^3$

$a_1 = 3$ pues $2^{2,3} < 5 < 2^{2,4}$ (Haga los intervalos)

continuando obtendrá

$$2^2 < 2^{2,3} < 2^{2,32} < 2^{2,231} < \ldots < 5 < 2^{2,322} < 2^{2,33} < 2^{2,4} < 2^3 .$$

i e $\log_2(5) = 2{,}231\ldots$.

Con una calculadora y usando este método, podrá calcular los logaritmos que desee.

Nota 3: Otra manera de probar la existencia de x tal que $a^x = b$ es así

Sea $B = \{r \text{ real} : a^r \leq b\}$

Usando el hecho que $a^r < a^s \Rightarrow r < s$ probar que B está acotado superiormente. Llaman x al supremo de B. Verificar que $a^x = b$. Probablemente necesite probar que si $a > 0$, el supremo de

$$\{y : y \leq a^{1/n} \quad \forall \ n = 1, 2, 3, \ldots\} \text{ es uno.}$$

Nota 4: Si usted ha construído los números reales usando el método de los intervalos encajados, la prueba dada aquí para construir x tal que $a^x = b$ dice que x es el número determinado por la sucesión de intervalos encajados ...

$$[c + \frac{a_1}{10} + \ldots + \frac{a_k}{10^k}, \ c + \frac{a_1}{10} + \ldots + \frac{a_k}{10^k} + \frac{1}{10^{k+1}}) .$$

Bibliografía

-Rey Pastor, Pi Calleja, Trejo
Análisis Matemático - Vol. I. Editorial Kapelusz.

Instituto de Matemática, Astronomía y Física
Universidad Nacional de Córdoba