Problemas y Soluciones

Coordinador: Leandro R. Cagliero

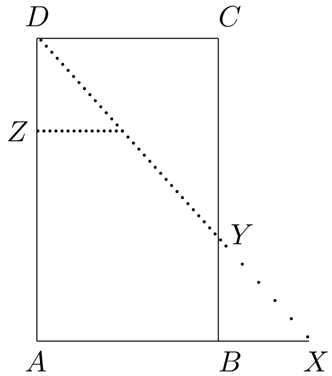
Invitamos a los lectores a proponer nuevos problemas para compartir y a enviar soluciones. Los problemas propuestos deben ser acompañados de una solución y de cualquier comentario que crean apropiado.

Los problemas y soluciones pueden ser enviados por correo a la dirección de la REM o preferentemente por correo electrónico a revm@mate.uncor.edu en un archivo de algún procesador de textos.

Problemas propuestos

Disección de figuras

Problema 1.
a) Sea $ABCD$ un rectángulo y sea a un segmento tal que $|AB| < |a| < 2|AB|$. Recortamos el rectángulo $ABCD$ como indica la figura. En ella hemos trazado X de modo que $AX \equiv a$, y Z de modo que $DZ \equiv BY$. Demostrar que las tres figuras que quedan luego de recortar el rectángulo $ABCD$ permiten construir un nuevo rectángulo tal que uno de sus lados es congruente al segmento a.



b) Dado un cuadrado de 10 cm de lado, indicar cómo recortarlo de modo tal que con las piezas obtenidas se puedan armar tres cuadrados congruentes entre sí.

Polinomios con valores compuestos

Problema 2. Sea $\{P_1(x), \ldots, P_n(x)\}$ un conjunto de polinomios no constantes con coeficientes enteros positivos. Demostrar que existe un número natural k tal que los n números enteros $P_1(k), \ldots, P_n(k)$ son compuestos.

Triángulos Pitagóricos

Problema 3. Sea T un triángulo con las siguientes dos propiedades: sus lados son naturales consecutivos y su área es entera. Demostrar que, salvo el caso en que los lados de T sean 3,4,5, hay una altura que divide a T en dos triángulos Pitagóricos. *Nota.* Un triángulo Pitagórico es un triángulo rectángulo cuyos lados son enteros.

SOLUCIONES ENVIADAS

Problema 1. Vol. 22, No 2. S*olución enviada por la Lic. María Isabel Viggiani Rocha, Univ. Nac. de Tucumán.*

a) Conocemos que $\operatorname{sen}(2x) = 2\operatorname{sen} x \cos x$. Por lo tanto

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(8x) &= 2\operatorname{sen}(4x)\cos(4x)\\ &= 2\,(2\operatorname{sen}(2x)\cos(2x))\cos(4x)\\ &= 4\,(2\operatorname{sen} x\cos x)\cos(2x)\cos(4x).\end{aligned}$$

De donde

$$\cos(x)\cos(2x)\cos(4x) = \frac{\operatorname{sen}(8x)}{8\operatorname{sen}(x)}$$

que es lo que queríamos probar.

b) Generalización:

$$\cos(x)\cos(2x)\cos(2^2x)...\cos(2^nx) = \frac{\operatorname{sen}(2^{n+1}x)}{2^{n+1}\operatorname{sen}(x)}.$$

Probaremos por inducción:

$P(n)$ es la proposición "$\cos(x)\cos(2x)\cos(2^2x)...\cos(2^nx) = \frac{\operatorname{sen}(2^{n+1}x)}{2^{n+1}\operatorname{sen}(x)}$".

$P(1)$ es verdadera, en efecto

$$\frac{\text{sen}\,(4x)}{4\,\text{sen}\,(x)} = \frac{2\text{sen}\,(2x)\cos(2x)}{4\text{sen}\,(x)} = \frac{2(2\text{sen}\,(x)\cos(x))\cos(2x)}{4\text{sen}\,(x)} = \cos(x)\cos(2x).$$

Supongamos verdadera $P(k) : \cos(x)\cos(2x)\cos(2^2x)...\cos(2^kx) = \dfrac{\text{sen}\,(2^{k+1}x)}{2^{k+1}\text{sen}\,(x)}$.

Veamos $P(k+1)$: ¿$\cos(x)\cos(2x)\cos(2^2x)...\cos(2^{k+1}x) = \dfrac{\text{sen}\,(2^{k+2}x)}{2^{k+2}\text{sen}\,(x)}$?

$$\begin{aligned}
\cos(x)\cos(2x)\cos(2^2x)...\cos(2^{k+1}x)\\
&= \big(\cos(x)\cos(2x)\cos(2^2x)...\cos(2^kx)\big)\cos(2^{k+1}x)\\
&= \frac{\text{sen}\,(2^{k+1}x)}{2^{k+1}\text{sen}\,(x)}\cos(2^{k+1}x)\\
&= \frac{2\text{sen}\,(2^{k+1}x)\cos(2^{k+1}x)}{2\,2^{k+1}\text{sen}\,(x)}\\
&= \frac{\text{sen}\,(2^{k+2}x)}{2^{k+2}\text{sen}\,(x)},
\end{aligned}$$

que es lo que queríamos probar.