Un problema integrador en la construcción de un modelo para la parábola

Graciela S. Guala(*), Edgardo N. Güichal(*) y Viviana Oscherov(*)

Introducción.

Presentamos aquí una forma simple de resolver el siguiente problema, que aparece en muchos textos como una afirmación sin demostración:

"Si de un hilo sin masa se cuelgan pesos iguales de modo que para cualquier par de puntos sucesivos sus proyecciones horizontales se encuentran separadas por la misma distancia, el hilo forma una poligonal cuyos vértices están sobre el gráfico de una parábola".

Esta situación es una idealización de un problema de ingeniería, que consiste en determinar la forma que adopta un cable cuyos extremos están fijados en dos torres, que sostiene un puente colgante horizontal, tal que su peso está uniformemente distribuido entre esas torres.

En el desarrollo de su solución mostramos la confluencia de dos aspectos:

* La vinculación entre la Matemática y la Física. (Trabajo interdisciplinario)

* La necesidad de que el alumno tome conciencia de la unidad intrínseca de la Matemática, reflejada por el uso de herramientas provenientes de distintas ramas como Geometría, Algebra y Trigonometría.

En la demostración utilizamos conceptos elementales que forman parte de los contenidos básicos de un Ciclo Polimodal, como son: equilibrio de una partícula, fuerzas resultantes, paralelogramo de fuerzas, identidades trigonométricas, teoremas del seno y del coseno, fórmulas de recurrencia, funciones polimodales de segundo grado y su representación gráfica.

Este problema permite construir un modelo realizable utilizando la metodología de aula-taller, con la participación activa de los alumnos en el análisis y resolución de los distintos aspectos parciales que se irán presentando. El docente contará además con otro ejemplo tangible en el que las cónicas aparecen relacionadas con problemas concretos.

PLANTEO Y RESOLUCION DEL PROBLEMA.

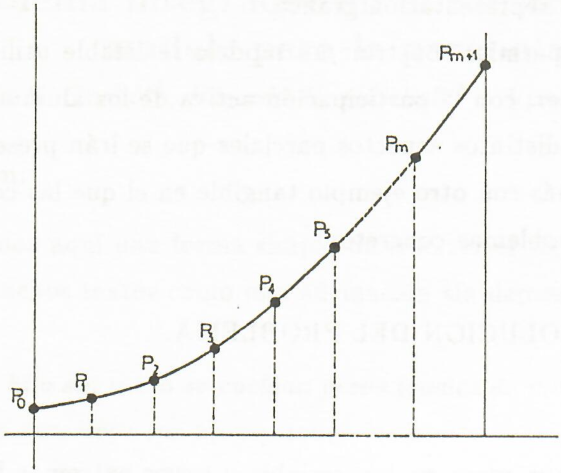
Problema:

Si de un hilo cuya masa es despreciable y cuyos extremos han sido fijados en dos puntos que se encuentran a la misma altura del suelo, se cuelgan pesos iguales de modo que para cada par de puntos sucesivos sus proyecciones sobre una recta horizontal se encuentran separadas por la misma distancia, entonces el hilo forma una poligonal cuyos vértices se encuentran sobre el gráfico de una parábola.

Solución:

Consideraremos el caso en que se suspende un número impar $n = 2m + 1$ de pesos. Por la simetría de la figura que resulta entonces, habrá un punto que denominaremos con P_0, ubicado en el centro de la misma, que ocupa la posición más baja posible. Los restantes $2m$ puntos ocuparán posiciones simétricas alrededor de P_0, por lo cual sólo consideraremos los puntos $P_1, P_2, P_3, ..., P_m$, que se encuentran a la derecha de P_0. Con P_{m+1} designaremos el extremo derecho del hilo, que se encuentra fijo.

Sea k el peso suspendido en cada punto y llamemos h a la separación que existe entre las proyecciones de dos puntos consecutivos, sobre una recta horizontal.



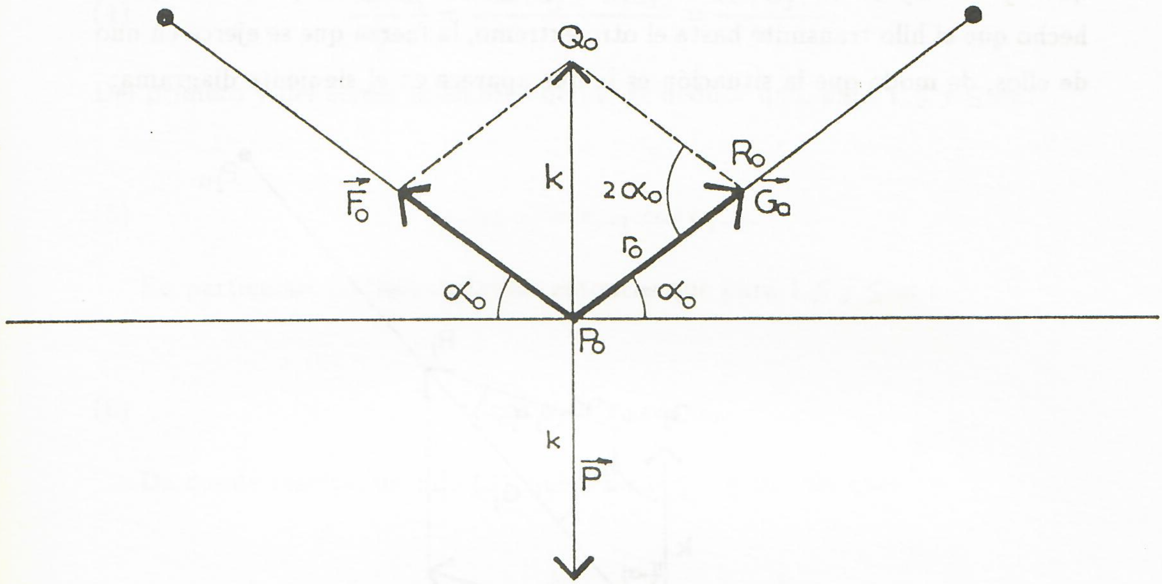
Fijemos un sistema de coordenadas de modo que la abscisa de P_0 sea $x_0 = 0$. Si designamos con $(x_j,\ y_j)$ las coordenadas de P_j, para $j = 0,\ 1, ..., m+1$, es claro que se tendrá que $x_j = j.h$. Nos interesa determinar los valores de las ordenadas y_j.

Sobre cada uno de los puntos $P_j (j = 0, 1, 2, ..., m)$ actúan tres fuerzas: el peso $\vec{P}$ que en él se ha suspendido, cuya magnitud es k y que tiene dirección vertical y dirigida hacia abajo y dos fuerzas que designaremos con $\vec{F}_j$ y $\vec{G}_j$, que representan las acciones sobre P_j, de las partes del sistema, que se encuentran a la izquierda y a la derecha del punto, respectivamente. Ellas tienen las direcciones que ha tomado el hilo, a la izquierda y a la derecha de P_j. Como el punto P_j se encuentra en equilibrio, la resultante de esas tres fuerzas debe ser nula, es decir:

$$\vec{F}_j + \vec{G}_j + \vec{P} = \vec{0}. \tag{1}$$

Designaremos con a_j el ángulo que forma $\vec{G}_j$ con la horizontal y trataremos de determinar la magnitud r_j de esta fuerza.

En el caso de P_0, nos encontramos con la situación planteada en el siguiente gráfico:



Por la simetría de la situación, resulta que la magnitud de $\vec{F}_0$ es también r_0 y para que P_0 se encuentre en equilibrio, se debe verificar que $\vec{F}_0 + \vec{G}_0 = -\vec{P}$.

Si consideramos el triángulo $\triangle P_0Q_0R_0$ y aplicamos el teorema del coseno, resulta que:

$$k^2 = 2.r_0^2 - 2.r_0^2.cos\ 2\alpha_0 = 2.r_0^2.(1 - cos\ 2\alpha_0) = 4.r_0^2.sen^2\ \alpha_0$$

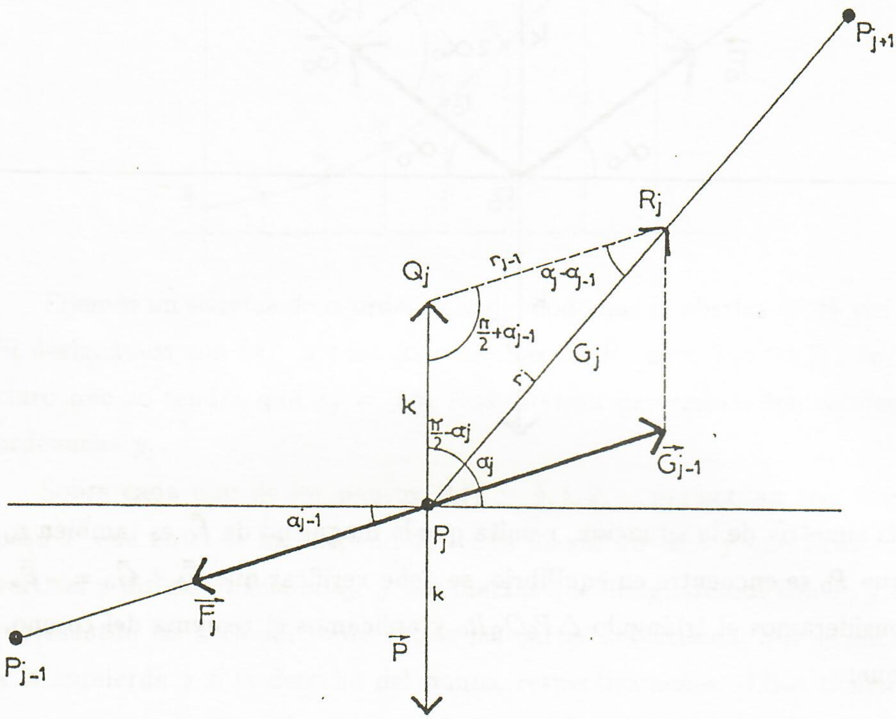
Por ser $k > 0$, $r_0 > 0$ y α_0 un ángulo agudo, resulta que

(2) $$k = 2.r_0.sen\ \alpha_0,$$

o bien:

(3) $$r_0 = \frac{k}{2.sen\ \ \alpha_0}.$$

Examinemos ahora lo que sucede en el punto P_j, si $1 \leq j \leq m$. Es claro aquí que $\vec{F}_j = -\vec{G}_{j-1}$, como consecuencia del principio de acción y reacción y del hecho que el hilo transmite hasta el otro extremo, la fuerza que se ejerce en uno de ellos, de modo que la situación es la que aparece en el siguiente diagrama:



La condición (1) puede escribirse ahora en la forma: $\vec{G}_{j-1} - \vec{P} = \vec{G}_j$. Si consideramos ahora el triángulo $\triangle P_j Q_j R_j$ y aplicamos el teorema del seno, obtendremos:

$$\frac{sen\ (\frac{\pi}{2} - \alpha_j)}{r_{j-1}} = \frac{sen\ (\alpha_j - \alpha_{j-1})}{k} = \frac{sen\ (\frac{\pi}{2} + \alpha_{j-1})}{r_j},$$

que puede escribirse como sigue:

$$(4) \qquad \frac{cos\ a_j}{r_{j-1}} = \frac{sen\ (\alpha_j - \alpha_{j-1})}{k} = \frac{cos\ \alpha_{j-1}}{r_j}.$$

Del primero y del tercer miembros de (4) se deduce que, para $1 \leq j \leq m$:

$$(5) \qquad r_j.cos\ \alpha_j = r_{j-1}.cos\ \alpha_{j-1}.$$

En particular, podemos afirmar entonces que para $1 \leq j \leq m$:

$$(6) \qquad r_j.cos\ \alpha_j = r_0.cos\ \alpha_0.$$

De donde resulta, usando (3), que para $0 \leq j \leq m$ vale que:

$$(7) \qquad r_j.cos\ \alpha_j = \frac{k}{2.sen\ \alpha_0}.cos\ \alpha_0 = \frac{k}{2.tg\ \alpha_0}.$$

Usando el primer y el segundo miembros de (4) obtenemos:

$$cos\ \alpha_j = \frac{r_{j-1}}{k}.sen\ (\alpha_j - \alpha_{j-1}),$$

es decir que:

$$\begin{aligned} cos\ \alpha_j &= \frac{r_{j-1}.cos\ \alpha_{j-1}}{k}.\frac{1}{cos\ \alpha_{j-1}}.sen\ (\alpha_j - \alpha_{j-1}) = \\ &= \frac{r_0.cos\ \alpha_0}{k}.\frac{1}{cos\ \alpha_{j-1}}.(sen\ \alpha_j.cos\ \alpha_{j-1} - cos\ \alpha_j.sen\ \alpha_{j-1}) = \\ &= \frac{1}{2.tg\ \alpha_0}.(sen\ \alpha_j - cos\ \alpha_j.tg\ \alpha_{j-1}) \end{aligned}$$

De aquí se deduce que:

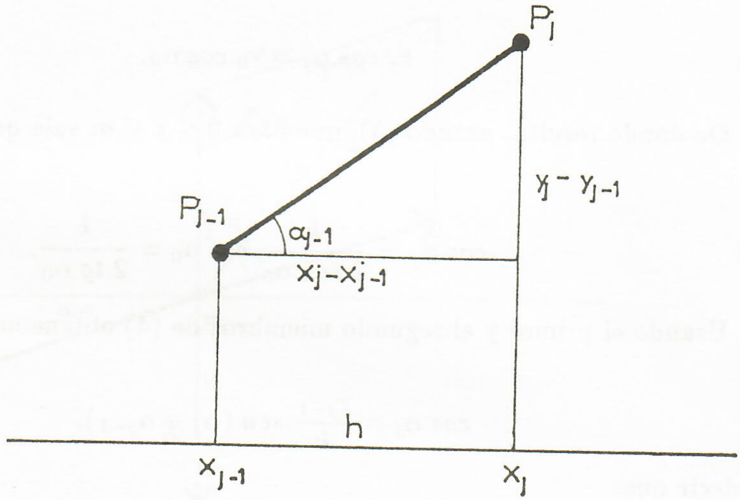
$$cos\ \alpha_j.\Big(1 + \frac{tg\ \alpha_{j-1}}{2.tg\ \alpha_0}\Big) = \frac{1}{2.tg\ \alpha_0}.sen\ \alpha_j,$$

es decir que, si $1 \leq j \leq m$:

(8) $$tg\ \alpha_j = 2.tg\ \alpha_0 + tg\ \alpha_{j-1},$$

de donde surge como consecuencia que, para $1 \leq j \leq m$, vale la siguiente igualdad:

(9) $$tg\ \alpha_j = (2.j + 1).tg\ \alpha_0.$$



Resulta ahora muy fácil determinar el valor de la ordenada y_j del punto P_j, pues tendremos que

$$\begin{aligned} y_j - y_{j-1} &= (x_j - x_{j-1}).tg\ \alpha_{j-1} = \\ &= h.(2.j - 1).tg\ \alpha_0, \end{aligned}$$

Es decir que si $1 \leq j \leq m + 1$:

(10) $$y_j = y_{j-1} + h.(2.j - 1).tg\ \alpha_0.$$

Reemplazando sucesivamente j por $1, 2, 3, ..., p$ (donde $1 \leq p \leq m+1$) en (10) y sumando las expresiones que resultan, obtenemos que

$$y_p = y_0 + h.[1 + 3 + 5 + ... + (2.p - 1)].tg\ \alpha_0.$$

Teniendo en cuenta que la suma entre corchetes corresponde a la suma de los p primeros términos de una progresión aritmética de razón 2, cuyo resultado es p^2, podemos escribir

$$y_p = y_0 + h.p^2.tg\ \alpha_0,$$

o bien:

$$y_p = y_0 + \frac{tg\ \alpha_0}{h}.(h.p)^2.$$

Recordando que $x_p = p.h$, la última expresión puede escribirse en la forma

$$y_p = y_0 + \frac{tg\ \alpha_0}{h}.x_p^2,$$

lo que muestra que efectivamente, los puntos P_j se encuentran sobre el gráfico de una parábola cuya ecuación está dada por

$$y = b + a.x^2, \text{ donde } b = y_0 \text{ y } a = \frac{tg\ \alpha_0}{h},$$

como se quería demostrar.

Ejercicio

Demuestre que en el caso en que haya un número par de puntos en el hilo, desde los que se suspende un peso k y si se elige un sistema de coordenadas de modo que el eje de ordenadas sea nuevamente el eje de simetría del sistema, es decir que las coordenadas de P_0 sean $\left(\frac{h}{2}, y_0\right)$ entonces la parábola sobre la que se disponen los vértices de la poligonal tiene por ecuación:

$$y = b + a.x^2$$

$$\text{donde } b = y_0 - \frac{h.tg\ \alpha_0}{8} \quad \text{y} \quad a = \frac{tg\ \alpha_0}{2.h}$$

Bibliografía

Roland LARSON, Robert HOSTETLER: *Cálculo y Geometría Analítica.* Mc. Graw Hill, 3a. edición.

Dennis ZILL: *Cálculo con Geometría Analítica.* Grupo Editorial Iberoamérica.

Earl ZWOKOWSKI: *Cálculo con Geometría Analítica.* Grupo Editorial Iberoamérica. 2a. edición.

(*) Universidad Nacional del sur.
Bahía Blanca.