Sección de Problemas

por Juan Pablo Rossetti

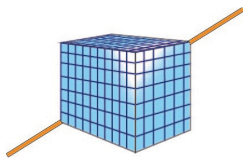
Los siguientes problemas están pensados para un público amplio. Las soluciones se encuentran en la página siguiente.

Problema 1. Una profesora escribe en el pizarrón un número grande y pide a sus 30 alumnos que vayan diciendo, uno por uno, distintos divisores de ese número. Los alumnos responden ordenadamente; el primero dice que "el 1 es un divisor del número escrito en el pizarrón", el segundo alumno dice "el 2 es un divisor", el tercer alumno dice "el 3 es un divisor", el cuarto dice "el 4 es un divisor", y así, sucesivamente, hasta que el trigésimo alumno dice "el 30 es un divisor".

La profesora dice que hay solo dos alumnos que se equivocaron y lo hicieron en forma consecutiva. ¿Cuáles son los dos alumnos que se equivocaron?

Para quienes resolvieron el problema, hay una segunda pregunta: ¿cuál es el menor número que pudo haber escrito la profesora en el pizarrón?

Problema 2. *(Cubitos atravesados en un cuboide)*. Tenemos un cuboide –llamado también ortoedro, prisma rectangular ortogonal, paralelepípedo rectangular– que podría medir 11cm $\times$ 20cm $\times$ 32cm. Pensemos que está formado por cubitos de 1cm de lado cada uno y que lo atraviesa una recta que pasa por un vértice y el vértice diametralmente opuesto. ¿Cuántos cubitos son atravesados en su interior por la recta? No se cuentan los cubitos que fueron tocados solo en un vértice o una arista.



Algunos problemas son más interesantes por sus soluciones que por sus planteos. Este es el caso del siguiente problema, por lo que sugerimos intentar resolverlo y luego leer la solución dada.

Problema 3. *(Comparando cantidades de soluciones)*. Sean x, y, z, w enteros positivos menores que algún número fijo, por ejemplo que un millón. Consideramos las ecuaciones $x^2 - y^3 = z^2 - t^3 + 1$ y $x^2 - y^3 = z^2 - t^3$. Probar que la segunda tiene más soluciones que la primera.

SOLUCIONES

Solución 1. *Respuesta:* el 16 y el 17.

Podemos analizarlo así: si un número m tiene en su factorización en primos al menos dos primos distintos, digamos p y q, y no fuera divisor, entonces p y q tampoco sería divisores, y como no son consecutivos con m, contradiría a la profesora. También, si $m \leq 15$, entonces m es divisor, pues si no lo fuera, tampoco lo sería $2m$, contradiciendo a la profesora. Por lo tanto, las únicas opciones son números que tengan en su factorización a lo sumo a un primo (elevado a alguna potencia). Vemos que la única posibilidad es un primo y la mayor potencia de 2, es decir 17, que es primo, y $16 = 2^4$.

El menor número posible es el mínimo común múltiplo de $2, 3, 4, \ldots$, 14, 15, 18, 19, $\ldots$, 29, 30, es decir

$$2^3 \times 3^3 \times 5^2 \times 7 \times 11 \times 13 \times 19 \times 23 \times 29 = 68.502.634.200.$$

Solución 2. *Respuesta:* 58 cubitos.

En el recorrido de la recta desde un vértice al opuesto notamos que va pasando de un cubito a otro contiguo al mismo, es decir, que comparten una cara. Como la dirección y el sentido son siempre los mismos, se ve a priori, que la cantidad de cubitos que atraviesa en un cuboide de $a \times b \times c$ cubitos es

$$1 + (a-1) + (b-1) + (c-1) = a + b + c - 2,$$

puesto que podemos pensar que comienza en el cubito $(1, 1, 1)$, de ahí pasa a un cubito con dos unos y un dos, y así, en cada paso, vamos sumando un uno a alguna de las tres coordenadas, hasta llegar al cubito del extremo opuesto que es el etiquetado (a, b, c). Esto ocurre siempre y cuando la recta atraviese por caras contiguas y no por aristas o vértices. Si pasa por un vértice, ya no sumamos un uno a una sola coordenada sino que pasa del cubito

$$(i, j, k) \quad \text{al} \quad (i + 1, j + 1, k + 1);$$

mientras que si atraviesa una arista, sumaríamos uno a dos de las tres coordenadas. Esto resta el número de total de cubitos atravesados en su interior que calculamos a priori. El pasar por una arista de (i, j, k) a $(i + 1, j + 1, k)$ significa que los números a y b no son coprimos, y la cantidad de aristas de este tipo que se atravesarán es igual al máximo común divisor (a, b). Así, el número exacto de cubitos atravesados por su interior será

$$a + b + c - (a, b) - (a, c) - (b, c) + (a, b, c).$$

En el caso particular del problema tenemos $11+20+32-1-1-4+1 = 58$ cubitos.

Solución 3. *Respuesta:* se podría hacer un análisis cualitativo de la situación para darnos cuenta que es así, que la segunda ecuación tiene más soluciones, puesto que aparecen *soluciones triviales* donde $x = z$, $y = t$, que no aparecen en la primera, y no podrán ser compensadas.

Sin embargo, haremos otra demostración, porque vale la pena ver cómo se puede aplicar aquí el llamado *principio* o *desigualdad del reordenamiento*.

La primera ecuación es equivalente a

$$x^2 + t^3 = z^2 + y^3 + 1$$

y la segunda es equivalente a

$$x^2 + t^3 = z^2 + y^3.$$

Sea m el mayor número que se puede escribir de la forma $x^2 + t^3$. Sea c_k la cantidad de formas de expresar k como suma de un cuadrado y un cubo, es decir, c_k es la cantidad de soluciones de $k = x^2 + t^3$. Notemos que $c_1 = 0$, $c_2 = 1$, $c_3 = c_4 = 0$, $c_5 = 1$, etc.

La segunda ecuación tiene $c_1^2 + c_2^2 + \cdots + c_m^2$ soluciones, mientras que la primera tiene $c_1c_2 + c_2c_3 + \cdots + c_{m-1}c_m$ soluciones. Por lo tanto, basta ver que

$$\sum_{k=1}^{m} c_k^2 > \sum_{k=1}^{m-1} c_k c_{k+1}$$

lo cual, luego de agregar el producto c_1c_m al miembro derecho, se verifica por la mencionada *desigualdad de reordenamiento*. Ésta afirma que si $x_1 \leq \cdots \leq x_n$ e $y_1 \leq \cdots \leq y_n$ son números reales y σ es una permutación de $\{1, 2, \ldots, n\}$ entonces

$$x_n y_1 + \cdots + x_1 y_n \leq x_{\sigma(1)} y_1 + \cdots + x_{\sigma(n)} y_n \leq x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n,$$

y puede ser demostrada de manera elemental.

¡Sucesiones al toque!

¿Cuál creés que es el próximo número en las siguientes sucesiones y por qué? ¿Te animás a encontrar más términos de estas sucesiones? ¿Y una fórmula general?

- $\{a_n\}$: 1, 5, 7, 17, 31, 65, 127, 257, 511, ...
- $\{b_n\}$: 6, 10, 12, 14, 15, 18, 20, 21, 22, 24, 26, 28, 30, 33, ...
- $\{c_n\}$: 12, 23, 35, 47, 511, 613, 717, 819, 923, 1029, ...
- $\{d_n\}$: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 20, 21, 30, 31, 32, 40, 41, 42, 43, 50, 51, 52, 53, 54, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 210, 310, 320, 321, 410, 420, 421, ...

Podés encontrar las soluciones en la página siguiente.

Soluciones de ¡sucesiones al toque!

- $a_{10} = 1025$.
  La fórmula general es $a_n = 2\,a_{n-1} + (-1)^n\,3$.
- $b_{15} = 34$.
  Son los números ordenados con al menos dos factores primos distintos.
- $c_{11} = 1131$.
  Sucesiones yuxtapuestas; a la izquierda la de los naturales, a la derecha la de los primos.
- $d_{62} = 430$.
  Son los números ordenados donde cada dígito es mayor al siguiente.

Viene de la página anterior.