Sección de Problemas

☞ *por Juan Pablo Rossetti*

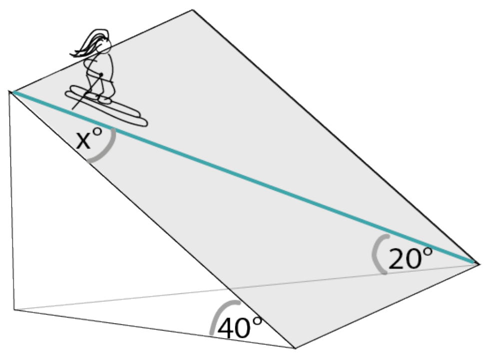
Los siguientes problemas están pensados para un público amplio. Las soluciones se encuentran en la página siguiente.

Problema 1. *Ángulo en la pista de esquí.*

Una pista de esquí tiene una pendiente pronunciada, de $40°$ con el plano horizontal. La chica del dibujo la quiere bajar, pero yendo en diagonal, para evitar el descenso directo.

Quiere que su trayectoria tenga una pendiente menor, que forme un ángulo de $20°$ con el plano horizontal.

¿Cómo debe elegir el ángulo que forma su diagonal con la línea de descenso directo?



¿Puede resolver el problema general para pendientes de ángulos arbitrarios?

Problema 2. *100 fichas de reversi.* Se tiene una fila de 100 fichas de reversi, que son blancas de un lado y negras del otro, puestas en forma alternada:

○ ● ○ ● ○ ● · · · ○ ● ○ ●

El juego consiste en ir dando vuelta las fichas de modo de dejarlas a todas de un mismo color. La mecánica es tomar bloques del largo que uno quiera, y dar vuelta todas las fichas de ese bloque, que puede tener entre 1 y 100 fichas. Por ejemplo, si en el primer movimiento se toma el bloque de las fichas 2, 3 y 4, nos quedará:

○ ○ ● ○ ○ ● · · · ○ ● ○ ●

¿Cuánto es el mínimo número de movimientos para lograr el objetivo?

Justificar la respuesta.

Problema 3. *Compra en euros.* Una profesora de matemática gastó en material educativo en un congreso en el extranjero la mitad de su dinero, y lo curioso es que le quedaron la misma cantidad de centavos que los euros que tenía, y la mitad de euros que los centavos que tenía.

¿Cuánto dinero tenía la profesora antes de hacer estas compras? ¿Cuánto gastó?

¡Sucesiones al toque!

¿Cuál creés que es el próximo número en las siguientes sucesiones y por qué? ¿Te animás a encontrar más términos de estas sucesiones? ¿Y una fórmula general?

- $\{a_n\}$: 1, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 22, , . . .
- $\{b_n\}$: 0,1; 0,11; 0,110001; 0,110001000000000000000001; 0,11000100000000000000000100 $\cdots$ agregar noventa ceros $\cdots$ 0001 ; . . .
- $\{c_n\}$: 1, 5, 14, 33, 72, 151, 310, 629, 1268, 2547, 5106, 10225, 20464, 40943, 81902 , . . .
- $\{d_n\}$: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 1, 11, 21, 31, 41, 51, 61, 71, 81, 91, 2, 12, 22, 32, 42, 52, 62, 72, 82, 92, 3, 13, 23, 33, 43, 53, 63, 73, 83, 93, 4, 14, 24, 34, 44, 54, 64, 74, 84, 94, 5, 15, 25, 35, 45, 55, 65, 75, 85, 95, 6, 16, 26, 36, 46, 56, 66, 76, 86, 96, 7, 17, 27, 37, 47 , . . .

Podés encontrar las soluciones en la página 98.

SOLUCIONES

Solución 1. *Respuesta:* El ángulo es $x \cong 57,85°$.

Una solución se puede obtener poniendo valores a algunos segmentos y usando reiteradamente el Teorema de Pitágoras.

Pero damos aquí otra solución que consideramos más elegante. Pensemos en el tetraedro (no regular, sino con varios ángulos rectos) cuyos vértices son el punto desde donde parte la chica, el punto donde llegará, el punto donde llegaría si descendiera en forma directa y el punto (dentro de la montaña) que está verticalmente debajo de ella.

En todo tetraedro se cumple un *teorema del seno*, que se deduce al aplicar el Teorema del Seno a los ángulos interiores inferiores y a los lados no inferiores de los tres triángulos que forman las paredes del tetraedro. Esto produce una igualdad entre el producto de los senos de tres de dichos ángulos (tomados en forma alternada) con el producto de los senos de los otros tres ángulos.

En nuestro tetraedro, notamos que tres de estos ángulos son rectos, por lo que se simplifica la igualdad a

$$\operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\gamma = \operatorname{sen}\beta$$

donde α sería el correspondiente al ángulo de $40°$, β el correspondiente al ángulo de $20°$ y γ el complementario de x, en la cara del tetraedro que corresponde a la pista.

Por lo tanto, resulta $\operatorname{sen}\gamma = \cos x$ y luego $\cos x = \frac{\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\alpha}$.

El caso del enunciado es $x = \arccos(\frac{\operatorname{sen} 20°}{\operatorname{sen} 40°}) \cong \arccos \frac{0{,}342}{0{,}643} \cong \arccos 0,532 \cong 57,85°$.

Solución 2. *Respuesta:* Se necesitan 50 movimientos.

Por un lado, es claro que con 50 movimientos es posible lograrlo, ya que podríamos tomar bloques de 1 sola ficha e ir dando vuelta las 50 fichas negras de a una hasta tener todas blancas.

Por otro, no es posible hacerlo en menos de 50 movimientos. Una linda demostración es pensar en algo así como la *energía* que hay entre las fichas, que podemos pensarla como que suma uno cada vez que dos fichas contiguas son de distinto color. En la posición inicial hay 99 diferencias. Notemos que en cada movimiento, a lo sumo se pueden reducir 2 diferencias, las del extremo del bloque, pero nunca más de dos. Por lo tanto, con 49 movimiento se pueden reducir la energía a lo sumo a $99 - 49 \times 2 = 1$, pero no a cero.

Solución 3. *Respuesta:* Tenía 99 euros y 98 centavos (es decir €$99,98$). Gastó 49 euros y 99 centavos (notar que 99 centavos es como 49 centavos más medio euro).

Para resolverlo se pueden plantear ecuaciones. Comenzó con (e,c), donde e es la cantidad de euros y c la de centavos. La cantidad de dinero, contada en centavos, es $100e+c$, por lo que la mitad es $50e+\frac{c}{2}=100\frac{e}{2}+\frac{c}{2}$. Si le hubieran quedado $(\frac{e}{2},\frac{c}{2})$, las consignas del enunciado nos llevarían a que $\frac{c}{2}=e$ y $\frac{e}{2}=\frac{c}{2}$, lo cual no tiene solución (no nula).

En cambio, la otra posibilidad, es que le haya quedado $(\frac{e-1}{2}, 50+\frac{c}{2})$, en cuyo caso las consignas producen las ecuaciones $50+\frac{c}{2}=e$ y $\frac{e-1}{2}=\frac{c}{2}$, cuya única solución es $e=99$ y $c=98$.

Soluciones de ¡sucesiones al toque!

- $a_{15}=24$.
  Son los números naturales que no son primos.
- $b_6=b_5+\frac{1}{10^{6!}}$.
  Esta sucesión converge al primer número real que se demostró que es trascendente (Liouville, 1851).
- $c_{16}=163821$.
  $c_{n+1}=2\times c_n+(n+2)$. También $c_{n+1}=52^n-n-4$.
- $d_{75}=57$.
  Son los números naturales leídos al revés, de derecha a izquierda.

Viene de la página 96.