Revista de Educación Matemática
Volumen 37, N° 2 (2022), páginas 30 – 45
Unión Matemática Argentina - Famaf (UNC)

Artículo de Matemática

EN BUSCA DE LA FELICIDAD

Roberto Ben, Agustín Besteiro, Antonio Cafure, Darío Devia y Diego Rial

Resumen. Acaso los números naturales sean los seres vivos más básicos, las células primigenias de ese entramado vital, fértil, complejo e inabarcable que es la actividad matemática. Están sujetos a diversas leyes de evolución que nosotros mismos podemos definir, de acuerdo a nuestro completo antojo, tantas como nuestra imaginación permita. Quizás, si somos afortunados, podremos predecir cómo es la evolución bajo cada ley que impongamos, cómo es la transformación de ese estado inicial. Quizás, si somos afortunados, podremos encontrar la felicidad.

Palabras clave: Números felices, Sucesiones, Evolución.

Abstract. Perhaps natural numbers are the most basic living beings, the original cells of that vital, fertile, complex and unbounded network that is mathematical activity. They are subject to various laws of evolution that we ourselves can define, according to our complete whim, as many as our imagination allows. Perhaps, if we are lucky, we will be able to predict what evolution is like under each law that we impose. Perhaps, if we are lucky, we can find happiness.

Keywords: Happy Numbers, Sequences, Evolution.

§1. Introducción

Un número natural N suele *representarse* como una tira $N = a_n a_{n-1} \cdots a_0$ de cifras entre 0 y 9. La condición es que a_n, la cifra más a la izquierda, sea distinta de 0 (así se explica el rechazo a ser un cero a la izquierda). Esta *representación* es una forma abreviada de indicar lo siguiente:

$$N = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \cdots + a_0.$$

A partir de *esta* forma de representar los naturales, definimos una función que a cada natural N le asigna la suma de los cuadrados de sus cifras:

$$\begin{array}{rccc} \mathsf{S}_2 & : & \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ & & a_n a_{n-1} \cdots a_0 & \longmapsto & a_n^2 + a_{n-1}^2 + \cdots + a_0^2 \end{array}$$

Es fácil calcular algunos ejemplos como

$$\mathsf{S}_2(25) = 2^2 + 5^2 = 29,$$
$$\mathsf{S}_2(2437) = 2^2 + 4^2 + 3^2 + 7^2 = 78,$$
$$\mathsf{S}_2(111111) = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 = 6.$$

Sin embargo, no es tan fácil calcular $\mathsf{S}_2(293^{341} - 14 \cdot 45)$. Para hacerlo, necesitamos conocer las cifras decimales o, lo que es lo mismo, la representación en base 10 de $293^{341} - 14 \cdot 45$.

A primera vista, una función como S_2 podría parecernos una curiosidad. No está mal ya que en numerosas oportunidades lo que comienza siendo una curiosidad se revela luego como una suerte de caja de Pandora inversa cuyo contenido nos permite, si estamos dispuestos, modificar nuestra mirada sobre el mundo matemático. Quizás haya un poco de exageración en nuestras afirmaciones pero estamos en la introducción del artículo y necesitamos despertar el interés del lector: ¿será posible que S_2 pueda ser algo parecido a una caja de sorpresas?

Como escribimos en el resumen, los números naturales pueden considerarse como las células básicas del entramado matemático y, en consecuencia, están sujetos a diversas leyes de evolución. Una de estas leyes puede definirse iterando S_2. Estamos ante la magnífica ocasión de observar cómo se manifiesta la naturaleza matemática en todo su esplendor, cómo evolucionan los números naturales bajo la dinámica que induce S_2. Esta acción hace surgir la noción de *número feliz*, una noción poco conocida aunque fácil de entender y, aquí el interés de este artículo, con un potencial enorme tanto para la enseñanza como para la investigación. Esta es la gran sorpresa que los lectores van a llevarse. Los invitamos a acompañarnos en este recorrido, en esta suerte de relato matemático que, esperamos, pueda darles un rato de felicidad.

§2. Salir de la melancolía

Es claro que S_2 es una función un tanto atípica. No es usual encontrar en los textos y prácticas universitarias funciones de este tipo, que apelen a cierta forma de representar objetos matemáticos. Sí encontramos una serie de preguntas y problemas casi inevitables sobre las funciones típicas que forman parte de toda colección de ejercicios que se precie de tal. Por supuesto, pueden formularse en este contexto. La función S_2, ¿es inyectiva?, ¿es suryectiva?, ¿es creciente?, ¿tiene puntos fijos? (no, esta última no es una pregunta típica), ¿cómo se grafica?

2.1. Inyectividad y suryectividad. No hay que dar demasiadas vueltas para concluir que S_2 no es una función inyectiva. Toma el mismo valor en números diferentes. Por ejemplo,

$$\mathsf{S}_2(188) = \mathsf{S}_2(818) = \mathsf{S}_2(881) = \mathsf{S}_2(1880) = \mathsf{S}_2(188000) = 129.$$

Más aún, la ecuación $\mathsf{S}_2(N) = 129$ tiene muchas, infinitas soluciones.

Caracterizar la imagen de S_2 nos permite decidir si es o no suryectiva. Es evidente que los números cuadrados de 1 y 2 cifras decimales, y que 129 pertenecen a la imagen. Veamos qué ocurre con 43 (¿por qué 43?, ¿por qué no 43?). Nuestra tarea consiste en determinar si la ecuación $\mathsf{S}_2(N) = 43$ tiene alguna solución. Si acaso la ecuación tuviera alguna solución cuya representación en base 10 es $N = a_n \cdots a_1 a_0$, tendríamos que $\mathsf{S}_2(N) = a_n^2 + \cdots + a_1^2 + a_0^2 = 43$. Es sencillo encontrar *una* solución. Alcanza con eligir el número N cuyas 43 cifras decimales son todas iguales a 1. Es decir, el número cuyo desarrollo decimal es $N = \sum_{i=0}^{42} 1 \cdot 10^i$. Habiendo encontrado una solución, podemos exhibir una colección infinita de soluciones.

Este caso particular bien describe lo que ocurre en el caso general y es lo que nos permite confirmar que S_2 es una función suryectiva. Para cada natural M, el número N cuya representación decimal es $\sum_{i=0}^{M-1} 1 \cdot 10^i$ tiene a M como imagen:

$$\mathsf{S}_2\,(N) = \sum_{i=0}^{M-1} 1^2 = M.$$

2.2. El crecimiento de $\mathsf{S}_2(N)$, máximos y mínimos. Estudiar el crecimiento y decrecimiento de una función es un tópico que no puede faltar en una práctica de las primeras matemáticas universitarias.

En nuestro caso, este ejercicio ya estaría resuelto: S_2 no es creciente ni decreciente ya que no es una función inyectiva. Podemos entonces estudiar la existencia de subconjuntos de los números naturales en los cuales tenga alguna de estas características. Por ejemplo, S_2 es creciente en el intervalo natural $[\![450\,,\,459]\!]$. Sin embargo $\mathsf{S}_2(460) = 4^2 + 6^2$ es menor que $\mathsf{S}_2(459) = 4^2 + 5^2 + 9^2$. En realidad, esta situación se observa en intervalos de 10 números consecutivos de la forma $[\![(N-1)\cdot 10\,,\,(N-1)\cdot 10 + 9]\!]$. Estos intervalos son *maximales*: constituyen el subconjunto de números naturales consecutivos más grande posible sobre el cual S_2 es creciente.

Hay cambios más abruptos entre las imágenes de números consecutivos. La mayor distancia entre las imágenes se da al pasar del mayor número de n cifras al menor número de $n+1$ cifras:

$$\mathsf{S}_2\left(\sum_{i=0}^{n-1} 9 \cdot 10^i\right) = \mathsf{S}_2\,(10^n - 1) = 81n \qquad \text{y} \qquad \mathsf{S}_2(10^n) = 1.$$

Si restringimos nuestra atención al intervalo natural $[\![1\,,\,10^n - 1]\!]$, el conjunto de números naturales de a lo sumo n cifras, encontramos que 1 y $10^n - 1$ son el mínimo y el máximo absoluto de S_2. Esto significa que para todo N en $[\![1\,,\,10^n - 1]\!]$ es válida

la desigualdad
$$1 \leq \mathsf{S}_2(N) \leq 81n.$$

Aquí surge una idea con potencial. Consideremos el conjunto de todos los naturales de n cifras. Se puede representar como el intervalo natural $[\![10^{n-1}\,,\, 10^n - 1]\!]$. Si n es mayor o igual que 4, entonces $10^{n-1} > 81n$. Esta situación implica que la imagen por S_2 de cualquier número N de ese intervalo es menor que N. En otras palabras, la imagen de cualquier número que tenga por lo menos 4 cifras decimales es menor que el propio número. Con un poco más de cuidado es posible optimizar la cantidad de cifras de los naturales para los cuáles es válido que $\mathsf{S}_2(N)$ es menor que N.

Proposición 2.1. *Si N es un número natural que tiene 3 o más cifras, entonces* $\mathsf{S}_2(N) < N$.

Demostración. Si N tiene por lo menos tres cifras, entonces N es un número mayor o igual que 10^2. Si lo expresamos en la forma $N = a_n 10^n + \cdots + a_1 10 + a_0$, asumimos que n es mayor o igual que 2 y que, por supuesto, a_n es distinto de 0. Vamos a probar que $N - \mathsf{S}_2(N)$ es una cantidad positiva. Tenemos que
$$\begin{aligned} N - \mathsf{S}_2(N) &= a_n 10^n + \cdots + a_1 10 + a_0 - a_n^2 - \cdots - a_1^2 - a_0^2 \\ &= a_n(10^n - a_n) + a_{n-1}(10^{n-1} - a_{n-1}) + \cdots + a_1(10 - a_1) + a_0(1 - a_0) \\ &\geq 99 - 72 = 27 \end{aligned}$$
La última desigualdad se justifica teniendo en cuenta que el menor valor que puede tomar a_n es 1, el mayor valor que puede tomar a_0 es 9 y que los términos que involucran a $a_{n-1}, \ldots, a_1$ son mayores o iguales que 0. $\square$

La Proposición 2.1 muestra algo más. Nos informa que, en caso de tenerlos, los posibles puntos fijos de S_2 son números de una o dos cifras. Quizás sea conveniente recordar que un número a es un *punto fijo* de una función f si $f(a) = a$. No es difícil demostrar que 1 es el único punto fijo de S_2. En el peor de los casos, lo hacemos recorriendo uno a uno los números de 1 a 99; o sea, una demostración de fuerza bruta. Aunque también podemos proceder de forma más elegante. Si un número de 2 cifras $a_1 10 + a_0$ fuera un punto fijo de S_2, entonces tendríamos que $a_1^2 + a_0^2 = a_1 10 + a_0$ y, luego, que $a_1(a_1 - 10) = a_0(1 - a_0)$. Como consecuencia de la simetría del miembro izquierdo y la paridad del derecho, es suficiente mostrar que para $a_1 = 2$ y $a_1 = 4$ la ecuación no tiene soluciones.

2.3. El gráfico de $\mathsf{S}_2(N)$. Muchas de las actividades, de los problemas que involucran funciones en las primeras materias universitarias concluyen cuando utilizamos la información obtenida para confeccionar un gráfico aproximado. Para no ser menos, concluimos con dos gráficos aproximados de S_2.

Las Figuras 1 y 2 nos permiten apreciar el gráfico de S_2 definida sobre los intervalos naturales $[\![1\,,\,100]\!]$ y $[\![1\,,\,5000000]\!]$, respectivamente. Observamos algunas de las características ya mencionadas como la no inyectividad, el crecimiento en intervalos de 10 números consecutivos, los saltos abruptos en las imágenes de $S_2(10^n-1)$ y $S_2(10^n)$.

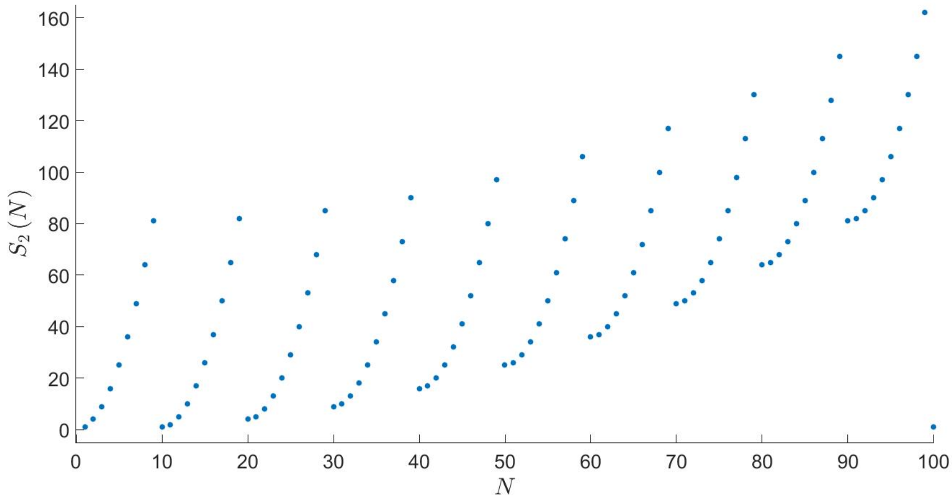

Figura 1. El gráfico de S_2 definida en $[\![1,100]\!]$.

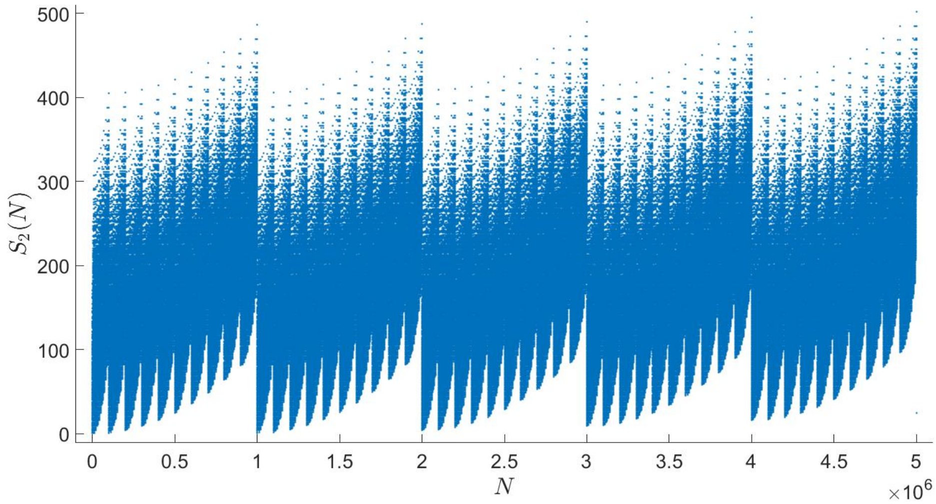

Figura 2. El gráfico de S_2 definida en $[\![1,5000000]\!]$.

§3. Divididos por la felicidad

Una de las sensaciones más inquietantes de nuestra existencia es la imposibilidad de predecir el futuro. Es difícil no sucumbir a la tentación de planificar nuestras acciones y tener completo control sobre sus consecuencias. Lamentablemente, o mejor, nos corregimos, afortunadamente, son pocas las situaciones en las que es posible avizorar lo que nos espera.

También es cierto que, nuestra experiencia da cuenta de eso, insistiendo, persistiendo en una acción vamos ajustando nuestra visión del mundo actual y el venidero. Mediante sucesivas aproximaciones podemos imaginar que hay algún futuro al que irremediablemente vamos a llegar más allá de la dinámica de nuestras acciones. Esta idea tan presente en la vida cotidiana es también una de las ideas más fecundas de la matemática: insistir, repetir, reiterar un proceso y estudiar si esta dinámica de la insistencia nos conduce a algún lugar, si nos determina un futuro posible, una forma de evolucionar.

¿Qué ocurre si estudiamos cómo es la evolución de cada número natural bajo la acción, bajo la dinámica que sugiere la función S_2? Por ejemplo, partimos de 1112 o de 41 y estudiamos las sucesiones de números naturales cuyos términos se obtienen iterando S_2:

$$\begin{aligned} 1112 &\to \mathsf{S}_2(1112) \to \mathsf{S}_2(\mathsf{S}_2(1112)) \to \mathsf{S}_2(\mathsf{S}_2(\mathsf{S}_2(1112))) \to \cdots \\ 41 &\to \mathsf{S}_2(41) \to \mathsf{S}_2(\mathsf{S}_2(41)) \to \mathsf{S}_2(\mathsf{S}_2(\mathsf{S}_2(41))) \to \cdots \end{aligned}$$

Podemos imaginar que estas sucesiones describen la evolución de estos números a lo largo del *tiempo*. Cada uno de sus términos es un estadio en la evolución. En el caso de 1112 y 41 observamos la siguiente evolución:

- $1112 \to 7 \to 49 \to 97 \to 130 \to 10 \to 1 \to 1 \to 1 \to \cdots$
- $41 \to 17 \to 50 \to 25 \to 29 \to 85 \to 89 \to 145 \to 42 \to 20 \to 4 \to 16 \to 37 \to 58 \to 89 \to \cdots$

Estamos frente a dos comportamientos diferentes, frente a dos escenarios que dan lugar a dos posibles tipos de sucesiones de números naturales.

- En el caso de 1112, nos encontramos con una sucesión que atraviesa siete estadios diferentes durante su evolución hasta que al tomar el valor 1, adopta su forma definitiva, constante a lo largo del tiempo. Esta sucesión es un ejemplo de lo que denominamos *sucesión convergente de números naturales*.

  Se impone la siguiente pregunta: ¿cuántos tipos diferentes de sucesiones convergentes quedan determinados por la dinámica inducida por S_2? Responder esta pregunta es equivalente a responder cuántos puntos fijos tiene S_2. Como 1 es el único punto fijo, la dinámica definida por S_2 da lugar a un solo tipo de sucesión convergente: las que convergen a 1.
- En el caso de 41, su evolución atraviesa catorce estadios diferentes hasta alcanzar por segunda vez el 89. A partir de allí entra en un ciclo que se repite por toda la eternidad:

$$89 \to 145 \to 42 \to 20 \to 4 \to 16 \to 37 \to 58 \to 89.$$

Esta sucesión es un ejemplo de lo que denominamos *sucesión periódica*. Entra en escena además la noción de *órbita periódica*. En este caso, la sucesión tiene una órbita periódica de longitud 8. En particular, cabe señalar que la noción de sucesión periódica incluye la de sucesión convergente de números naturales. Las sucesiones convergentes son aquellas que tienen una órbita periódica de longitud 1.

La pregunta que se impone en esta situación es la siguiente: ¿cuántas sucesiones periódicas diferentes surgen con esta dinámica? Por el momento, no es claro cómo responder esta inquietud.

La ambición por conocer, por entender, es el motor. Nos moviliza el deseo por anticipar el futuro que le espera a la población de números naturales. Hasta aquí encontramos dos posibles futuros. Si dejamos que la dinámica inducida por S_2 actúe libremente, que la naturaleza matemática se tome su tiempo y haga su trabajo, ¿será posible atisbar el futuro?, ¿con qué nos vamos a encontrar?

El conjunto de números naturales que generan una sucesión convergente, la única posible, es muy particular, se distingue del conjunto de los otros naturales. Suele suceder en matemática que al encontrar una particularidad, una característica especial, algo que nos llama la atención de un objeto matemático, nos interesa darle entidad. La manera de visibilizar esa singularidad es darle un nombre.

Definición 3.1. *Un número natural N es* ***feliz*** *si su evolución bajo la dinámica inducida por S_2 es 1.*

En otras palabras, los números felices son aquellos que bajo la dinámica inducida por S_2 dan lugar a una sucesión convergente; es decir, tienen una órbita periódica de longitud 1.

De acuerdo a esta definición, el mundo de los números naturales queda dividido en dos subconjuntos: el de los números felices $(1, 7, 10, 49, 97, 130, 1112)$ y el de los números que no lo son $(2, 4, 16, 17, 20, 25, 29, 37, 41, 42, 50, 58, 85, 89, 145)$. En realidad, como multiplicar un número por una potencia de 10 no cambia su naturaleza feliz o no feliz, deducimos que hay una cantidad infinita tanto de números felices como de números no felices. La existencia de infinitos números felices nos da la posibilidad de referirnos a la *sucesión de números felices* y, por qué no considerarla, a la *sucesión de números no felices*. Si de sucesiones de números naturales se trata, tenemos la obligación de visitar The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences (OEIS).

OEIS es una iniciativa que comenzó en 1964 como una tarea llevada a cabo por un solo hombre: Neil Sloane. Es una base de datos de todas las sucesiones de números naturales que tengan algún interés para los matemáticos. Desde hace muchos años, se transformó en un trabajo colectivo, que se nutre de los aportes de diversas personas, quienes colaboran proporcionando nuevas sucesiones o brindando nueva información para sucesiones ya registradas. Cada entrada de la enciclopedia provee información sobre bibliografía, actualizaciones, relaciones con otras sucesiones, etc.

La sucesión de números felices ha sido registrada como la entrada A007770 de OEIS. Sus diez primeros términos son $1, 7, 10, 13, 19, 23, 28, 31, 32, 44$. La sucesión de números no felices se encuentra como la entrada A031177 y sus primeros diez términos son $2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 11, 12, 14$.

La división de los números naturales en estas dos clases tiene consecuencias. Los que son felices saben que, aun cuando lleve mucho tiempo, una vez que alcancen la felicidad, la disfrutarán por toda la eternidad. ¿Qué ocurre con los números que no pertenecen a esta clase, con los que no son felices?, ¿qué futuro les espera? La respuesta está en el viento que nos trae el que denominamos *Teorema de la Felicidad*.

Teorema 3.2. *Hay solo dos futuros posibles:*

1. *La felicidad eterna.*
2. *La condena a oscilar por toda la eternidad en el ciclo de la infelicidad que muestra la Figura 3:*

$$4 \to 16 \to 37 \to 58 \to 89 \to 145 \to 42 \to 20 \to 4.$$

Demostración. La Proposición 2.1 proporciona la clave de la demostración. Supongamos que $N = N_0$ es un número que tiene al menos 3 cifras. Escribimos $N_{k+1} = \mathsf{S}_2(N_k)$. Mientras N_k tenga 3 o más cifras tenemos que $N_{k+1} < N_k$. Es decir, en algún estadio de su evolución, la evolución de N_0 pertenece a la población de naturales de 1 o 2 cifras.

Esta situación es maravillosa. El futuro de los números naturales se reduce al estudio de la evolución de los naturales de 1 o 2 cifras. No menos maravilloso es el modo en que Ross Honsberger (Honsberger, 1998) en su *Ingenuity in Mathematics* termina la demostración:

> *The writer knows of no way of showing that the assertion holds for* $0 < N < 100$ *except by direct enumeration.*

□

Una digresión. ¿Por qué alguien, alguna vez, decidió llamarlos números felices?, ¿por qué la elección del adjetivo feliz? Podríamos haberlos llamado *números generosos* o *números revolucionarios*, o haber elegido cualquier otro adjetivo para acompañar a *número*. Esa elección no habría modificado la dinámica de la evolución. En consecuencia, se trata de elegir algún término cuyo sentido cotidiano, usual, describa de forma más o menos aproximada el sentido de la noción matemática con la que estamos trabajando. ¿Por qué entonces los llamamos números felices?, ¿cómo se vincula nuestra idea de felicidad con el hecho de que un número evolucione a 1 bajo la dinámica inducida por S_2? La respuesta es sincera: no sabemos.

Así son conocidos en el mundo matemático pues alguien, alguna vez, introdujo ese término. Por lo tanto, así los seguiremos llamando. Lo relevante es el comportamiento, la dinámica de evolución que genera S_2, para nada el nombre con el que denominamos los números que evolucionan hacia el 1.

Aun teniendo claro lo que escribimos en el párrafo anterior, tenemos algunas dudas sobre cuál sería la manera más conveniente de referirnos a los números que no evolucionan a 1: ¿números no felices o números infelices?. ¿Y si los llamamos números tristes?

Para terminar y dar paso a la próxima sección traemos a escena a Richard Guy. En su libro *Unsolved Problems in Number Theory* (Guy, 1994), escribe:

> Reg. Allenby's daughter came home from school in Britain with the concept of happy numbers. The problem may have originated in Russia.

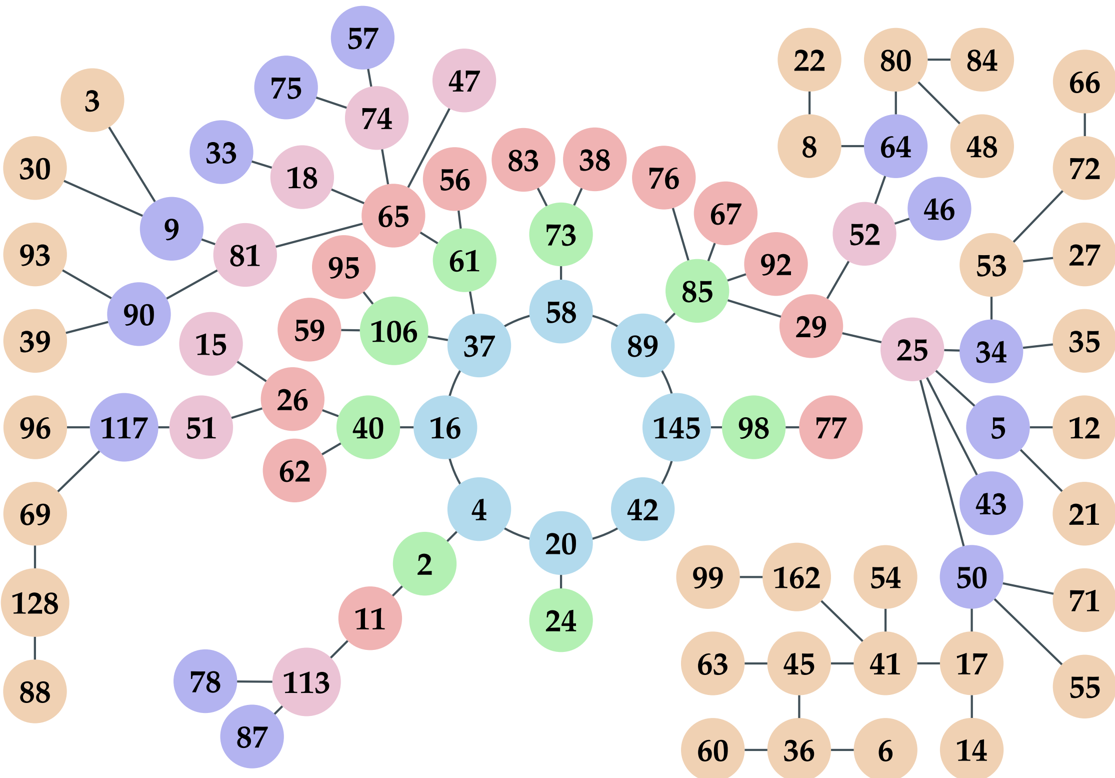

Figura 3. El triste cíclico destino de los números no felices.

§4. Un mundo feliz

Por muchas razones, el texto (Guy, 1994) es un gran libro. Allí, Guy planteó una serie de problemas que surgen en el contexto de los números felices. En cierto modo, estableció una agenda de trabajo para los años siguientes. Diversos matemáticos emprendieron la tarea de encontrar respuestas a las inquietudes planteadas.

Compartimos a continuación algunas de las preguntas formuladas por Guy y algunas de las respuestas dadas por diversas personas.

4.1. Tiras de números felices consecutivos. La felicidad se contagia, se transmite. Por ese motivo, Guy propuso estudiar tiras de números felices consecutivos. Los primeros pares de números felices consecutivos son 31 y 32, 129 y 130, 192 y 193, 262 y 263. Las sucesiones A035502 y A035503 constan del menor y del mayor, respectivamente, de cada par. Los primeros términos de la sucesión A035502 son

$$31, 129, 192, 262, 301, 319, 367, 391, 565, 622, 637, 655, 912, \ldots$$

Quién dice dos dice tres. Por ese motivo, la sucesión A072494 presenta el menor de cada trío de números felices consecutivos. Aquí los primeros términos:

$$1880, 4780, 4870, 7480, 7839, 7840, 8180, 8470, 8739, 8740, 8810 \ldots$$

El primer cuarteto de números felices empieza en 7839 (sucesión A194352) y el primer quinteto en 44488 (sucesión A194355).

En el año 2010, Robert Styer, un matemático de Vilanova University, Estados Unidos, demostró que la primera tira de seis números felices consecutivos comienza en el número de 25 cifras $7899999999999959999999996$. La referencia concreta es el trabajo (Styer, 2010) publicado en el *Journal of Integer Sequences*.

Envalentonados por estas respuestas afirmativas, nos inclinamos a formular la pregunta evidente: ¿hay tiras de números felices consecutivos de longitud arbitraria? Afortunadamente, sí. La buena noticia fue dada por Esam El-Sedy y Samir Siksek en *On happy numbers* (El-Sedy y Siksek, 2000), un artículo publicado diez años antes que el de Styer. El enunciado preciso de su resultado es el siguiente:

Teorema 4.1. *Para cada número natural m, existe un natural m_0 tal que $m_0 + 1, m_0 + 2, \ldots, m_0 + m$ es una tira de m números felices.*

La clave en la demostración de este teorema es un resultado de existencia. Los autores muestran que *existe* un número natural u tal que $b + u$ es un número feliz para cada número b en el ciclo de la infelicidad. ¿Cómo demuestran la existencia de ese número? Haciendo cuentas con una computadora. ¿Cuál es ese número?:

$$u = \sum_{r=1}^{233192} 9 \times 10^{r+4} + 20958.$$

4.2. La felicidad de los primos. Supongamos que tenemos ante nosotros un subconjunto infinito de números naturales que se caracterizar por compartir una determinada propiedad, una especie particular. Inmediatamente nos preguntamos si en ese subconjunto, si en esa especie, encontramos números primos. Por ese motivo, es natural entonces pensar en los (números) primos felices. Por de pronto, los primos felices menores que 500 son 7, 13, 19, 23, 31, 79, 97, 103, 109, 139, 167, 193, 239, 263, 293, 313, 331, 367, 379, 383, 397, 409, 487. ¿Existen infinitos primos felices? No se conoce la respuesta a esa pregunta. Si se quiere conocer un poco más con respecto a la sucesión (finita, por ahora) de los primos felices se puede consultar la sucesión A035497.

4.3. La cantidad de números felices. La felicidad no es un estado al que puedan aspirar todos los números naturales. ¿Cuántos de ellos pueden hacerlo?, ¿la *mayoría* de la población de números? Disponer de evidencia empírica siempre es saludable pues nos permite tomar decisiones. Así que para empezar a responder esas preguntas vamos a tratar de contar la cantidad de números felices en el intervalo $[\![1\,,\,N]\!]$ como para tener una idea de la *densidad* del conjunto de números felices en el conjunto de los números naturales.

La sucesión A068571 presenta la cantidad de números felices en el intervalo $[\![1\,,\,10^n]\!]$. Sus primeros términos son 3, 20, 143 1442, 14377, 143071, 1418854, 14255667, 145674808, 1492609148. Si miramos la lista de 20 términos que ofrece OEIS, observamos que la proporción de números felices en el intervalo $[\![1\,,\,10^n]\!]$ oscila entre las cantidades 0,118226055080025491 cuando $n = 18$ y 0,15091199357 cuando $n = 15$.

Vamos a considerar la densidad de números felices como una función del intervalo $[\![1\,,\,N]\!]$. A continuación, presentamos dos gráficos que aportan alguna información al respecto.

La Figura 4 representa la densidad en $[\![1\,,\,N]\!]$, considerando valores de N entre 1 y $7 \cdot 10^6$. Observamos que la densidad tiene una suerte de comportamiento asintótico.

Reescalando adecuadamente, la Figura 5 presenta el gráfico de la densidad en $[\![1\,,\,N]\!]$, considerando valores de N entre 1 y $2{,}15 \cdot 10^8$. Si bien los valores de la densidad permanecen acotados, no observamos el comportamiento asintótico sugerido por la Figura 4.

Los resultados provistos por estos gráficos no son alentadores. Nos muestran que son *muy pocos* los números felices. ¿Será posible determinar la densidad de los números felices? Justin Gilmer respondió la pregunta aunque su respuesta no hace más que confirmar nuestro desánimo. En su trabajo *On the Density of Happy Numbers* publicado en 2013 ((Gilmer, 2013)), mostró que, como indica la evidencia, *alrededor* de $1/7$ de los números naturales es feliz; es decir, *grosso modo* solo uno de cada siete números es feliz.

Gilmer es capaz de calcular la densidad de números felices en intervalos $[\![1\,,\,10^m]\!]$ con $m < 8000$. Señala que ese hipotético carácter asintótico tampoco se observa para valores muy grandes de N. Es más, encuentra que la densidad de números felices está acotada entre 0,1138 y 0,18577.

No es muy saludable que la felicidad sea para pocos.

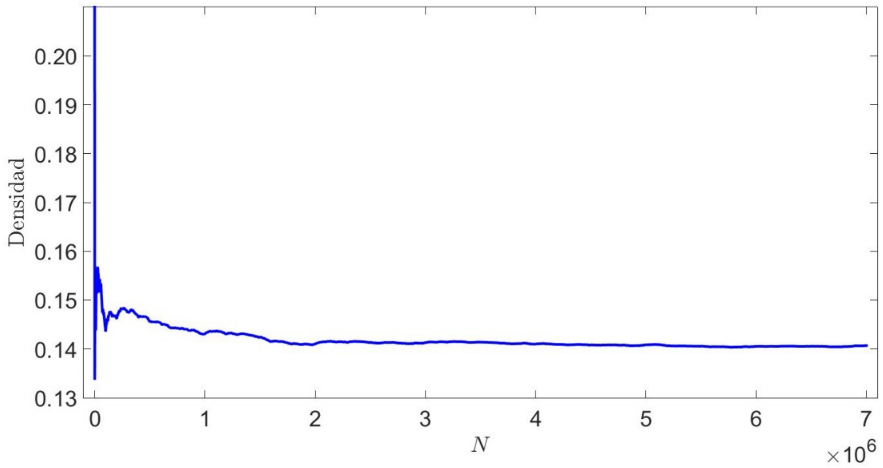

FIGURA 4. La densidad de números felices en $[\![1\ ,\ 7000000]\!]$

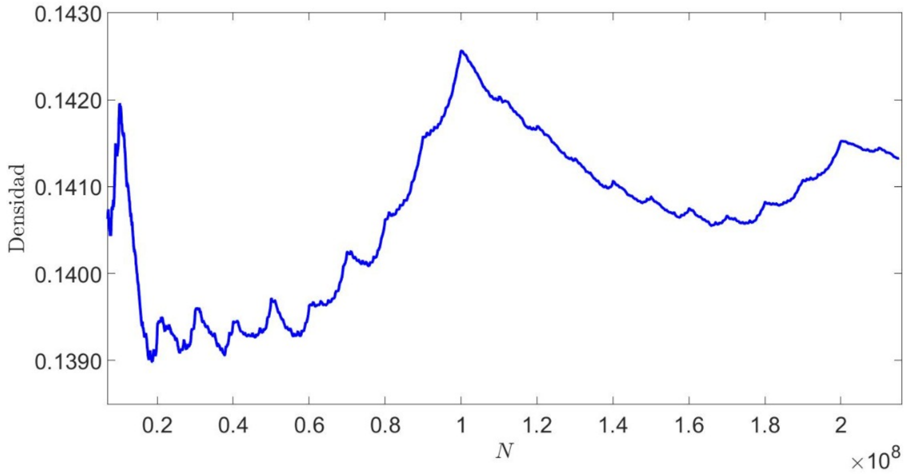

FIGURA 5. La densidad de números felices en $[\![1\ ,\ 215000000]\!]$

4.4. Un trabajo de base. La función S_2 puede definirse sobre los naturales representados en cualquier base. En consecuencia, la dinámica implícita podría variar de acuerdo a cada base. Por lo tanto, la naturaleza feliz de un número podría modificarse. Por supuesto, extendiendo la Definición 3.1 a una base arbitraria.

De acuerdo a nuestra definición inicial, 2 no es un número feliz bajo el sistema decimal. Si consideramos el sistema binario, la representación de 2 es $(10)_2$ y su imagen por S_2 es

$$\mathsf{S}_2((10)_2) = 1^2 + 0^2 = 1.$$

En el sistema binario, $2 = (10)_2$ es un número feliz. Este simple ejemplo muestra que, como imaginábamos, la definición inicial de número feliz *no* es intrínseca: depende de la representación en base 10.

El sistema de representación decimal ya mostró sus evidentes limitaciones para asegurar la felicidad de la mayoría de los números. Solo puede garantizarle la felicidad a un séptimo de los naturales. Quizás sea el momento de cambiar el sistema de representación y considerar una base sobre la cual la felicidad de la mayoría de los números esté garantizada.

En esa búsqueda de un cambio de sistema, comenzamos con el sistema de representación binario. Es decir, nuestro mundo es el de los naturales representados en base 2. Utilizamos el símbolo $(\mathbb{N}, 2)$ para representar ese conjunto. Si dejamos que la dinámica inducida por $\mathsf{S}_2 : (\mathbb{N}, 2) \to (\mathbb{N}, 2)$ actúe libremente, observamos que la evolución de cualquier $N = (a_n a_{n-1} \cdots a_0)_2$ es $(1)_2$. La representación en base 2 asegura la felicidad de *todos* los números naturales.

El ejemplo binario es suficiente para darnos cuenta de que la introducción de un nuevo concepto está al alcance de la mano. Antes, extendemos una notación recientemente introducida. Indicamos por $(\mathbb{N}, b)$ el conjunto de números naturales representados en base b. Si deseáramos ser extremadamente precisos, tendríamos que escribir algo así como $\mathsf{S}_{2,b}$ para indicar que la definición depende de la base utilizada. De esta manera, deberíamos escribir $\mathsf{S}_{2,b} : (\mathbb{N}, b) \to (\mathbb{N}, b)$.

Definición 4.2. *Una base b es **feliz** si todo elemento de $(\mathbb{N}, b)$ es feliz.*

La demostración del Teorema de la Felicidad (Teorema 3.2) tiene un costado muy interesante. Muestra que la fortuna de los números naturales depende de lo que ocurre con los números que tienen 1 o 2 cifras decimales. A su vez, esta reducción fue consecuencia de la Proposición 2.1. Como si nuestro texto fuera un relato policial en el cual se van sembrando las pistas, la forma de enunciarla preanunciaba algo importante: su enunciado solo alude a la cantidad de cifras del número en cuestión. Además, si bien su demostración utiliza explícitamente que la base es 10, la validez de la argumentación se puede extender a cualquier base b.

Proposición 4.3. *Si N es un elemento de $(\mathbb{N}, b)$ y tiene tres o más cifras, entonces $\mathsf{S}_{2,b}(N) < N$.*

Demostración. El trabajo consiste en traducir adecuadamente la demostración de la Proposición 2.1. Si $N = (a_n a_{n-1} \cdots a_0)_b = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \cdots a_1 b + a_0$ tiene tres o más cifras en base b, entonces n es mayor o igual que 2 y, por lo tanto,

$$\begin{aligned} N - \mathsf{S}_{2,b}(N) &= a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \cdots a_1 b + a_0 - a_n^2 - \cdots - a_1^2 - a_0^2 \\ &= a_n(b^n - a_n) + a_{n-1}(b^{n-1} - a_{n-1}) + \cdots + a_1(b - a_1) + a_0(1 - a_0) \\ &\geq b^2 - (b-1)(b-2) = 3b - 3 > 0 \end{aligned}$$

□

En definitiva, concluimos que para cada base b, la fortuna de los elementos de $(\mathbb{N}, b)$ depende de lo que ocurre con los números que tienen 1 o 2 cifras.

Una de las primeras consecuencias es que 4 también es una base feliz. En efecto, como $(1)_4$, $(2)_4$ y $(3)_4$ son felices, resulta que todo elemento de $(\mathbb{N}, 4)$ es feliz. Hasta el momento 2 y 4 son las únicas bases felices conocidas menores que $5 \cdot 10^8$.

La sucesiones A193583 y A193585 indican el número de puntos fijos y el número de órbitas periódicas bajo la acción de $\mathsf{S}_{2,b}$, respectivamente. Mirando estas entradas nos enteramos que en base 43 hay 11 puntos fijos y 6 órbitas periódicas; que en base 63 hay 7 puntos fijos y 9 órbitas periódicas, y que en base 83 hay 15 y 10, respectivamente.

La tabla que sigue, extraída de un trabajo de Helen Grundman y Elizabeth Teeple ((Grundman y Teeple, 2001)) detalla los puntos fijos y las órbitas periódicas para todas las bases b menores o iguales que 10.

Base	Puntos fijos y órbitas
2	1
3	$1, 12, 22$ $2 \to 11 \to 2$
4	1
5	$1, 23, 33$ $4 \to 31 \to 20 \to 4$
6	1 $32 \to 21 \to 5 \to 41 \to 25 \to 45 \to 105 \to 42 \to 32$
7	$1, 13, 34, 44, 63$ $2 \to 4 \to 22 \to 11 \to 2$ $16 \to 52 \to 41 \to 23 \to 16$
8	$1, 24, 64$ $4 \to 20 \to 4$ $5 \to 31 \to 12 \to 5$ $15 \to 32 \to 15$
9	$1, 45, 55$ $58 \to 108 \to 72 \to 58$ $82 \to 75 \to 82$
10	1 $4 \to 16 \to 37 \to 58 \to 89 \to 145 \to 42 \to 20 \to 4$

Acaso sea imposible vivir en un estado permanente de felicidad; sin embargo, aquí encontramos ejemplos de que, al menos, en la población de números naturales no es algo impensado, algo imposible de lograr. Un cambio de sistema de representación abre la puerta a esa utopía.

§5. Día de fiesta

Este artículo tiene sus orígenes en el video Sobre la felicidad y los números que Antonio Cafure subió a Matemática Sentimental, su canal de YouTube, durante la cuarentena de 2020.

Durante 2022, los autores comenzamos a discutir sobre diversos problemas que involucran la noción de número feliz y, a la vez, a poner por escrito las diferentes ideas que iban surgiendo. Como una forma de poner a prueba el interés de lo que escribíamos, a fines de julio de 2022, Antonio Cafure y Darío Devia dictaron el curso *La felicidad es un arma cargada* durante la Octava Escuela de Matemáticas de la Universidad Nacional de General Sarmiento, EMASUNGS VIII-Sabrina Victoria Vieiro.

Mientras terminábamos de escribir este artículo, notamos que la sucesión de distancias entre números felices no formaba parte de la OEIS. Tenemos el honor de presentar en sociedad nuestra sucesión, la entrada A356412 de *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences*. Sus primeros diez términos son 6, 3, 3, 6, 4, 5, 3, 1, 12, 5.

Intentamos mostrar un posible recorrido: partiendo de una aparente curiosidad, de una iniciativa lúdica, de un contenido sencillo que bien podría formar parte de alguna currícula escolar o universitaria, seguimos asistiendo y participando de la ramificación de ese árbol tan saludable que es el conocimiento matemático. La savia del árbol matemático son los problemas, hasta aquellos que a primera vista puedan parecernos un simple entretenimiento. Así, se recrea el ciclo de la naturaleza matemática.

Bibliografía

El-Sedy, E., y Siksek, S. (2000). On happy numbers. *Rocky Mt. J. Math.*, *30*(2), 565–570. Descargado de `math.la.asu.edu/~rmmc/rmj/VOL30-2/CONT30-2/CONT30-2.html` doi: 10.1216/rmjm/1022009281

Gilmer, J. (2013). On the density of happy numbers. *Integers*, *13*, paper a48, 25.

Grundman, H. G., y Teeple, E. A. (2001). Generalized happy numbers. *Fibonacci Q.*, *39*(5), 462–466.

Guy, R. (1994). *Unsolved problems in number theory.* (2nd ed. ed.). New York, NY: Springer-Verlag.

Honsberger, R. (1998). *Ingenuity in mathematics.* (6th printing ed., Vol. 23). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Styer, R. (2010). Smallest examples of strings of consecutive happy numbers. *J. Integer Seq.*, *13*(6), 10. (Id/No 10.6.3)

Roberto Ben
Instituto del Desarrollo Humano, Universidad Nacional de General Sarmiento
Ciclo Básico Común, Universidad de Buenos Aires
(✉) *rben@campus.ungs.edu.ar*

AGUSTÍN BESTEIRO
Centro de Altos Estudios en Tecnología Informatica, Universidad Abierta Interamericana
(✉) *agustin.besteiro@uai.edu.ar*

ANTONIO CAFURE
Instituto del Desarrollo Humano, Universidad Nacional de General Sarmiento
CONICET
(✉) *acafure@campus.ungs.edu.ar*

DARÍO DEVIA
Instituto de Ciencias, Universidad Nacional de General Sarmiento
Ciclo Básico Común, Universidad de Buenos Aires
(✉) *ddevia@campus.ungs.edu.ar*

DIEGO RIAL
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires
CONICET
(✉) *drial@dm.uba.ar*

Recibido: *9 de agosto de 2022*.
Aceptado: *25 de agosto de 2022*.
Publicado en línea: *6 de septiembre de 2022*.