Revista de Educación Matemática
Volumen 38, N° 2 (2023), páginas 16 – 27
Unión Matemática Argentina - Famaf (UNC)

Artículo de Matemática

EL DISCRETO ENCANTO DE LA RAÍZ CUADRADA

Pablo Amster y José Ángel Cid

Resumen. Presentamos una versión divulgativa de nuestro artículo (Amster y Cid, 2022) en el que mostramos cómo la raíz cuadrada compleja nos permite demostrar de una forma muy sencilla diversos resultados topológicos en el plano, tan profundos como el Teorema de Brouwer y el Teorema de Invariancia del Dominio, así como del Teorema Fundamental del Álgebra.

Abstract. We present a version for the general readership of our article (Amster y Cid, 2022) in which we show how the complex square root allows us to prove in a very simple manner various topological results in the plane, as deep as the Brouwer Fixed Point Theorem and the Invariance of Domain Theorem, as well as the Fundamental Theorem of Algebra.

§1. Introducción

En cualquier curso de variable compleja, uno de los momentos culminantes es aquel en el que se demuestra el *Teorema Fundamental del Álgebra* (*TFA*), según el cual todo polinomio no constante admite al menos una raíz. Claro que, a esa altura del curso, seguramente ya estamos al tanto de muchas propiedades importantes de las funciones llamadas *holomorfas*, vale decir, aquellas que son derivables (en sentido complejo, por supuesto) en una región abierta del plano. Las propiedades de tales funciones son tan mágicas que el teorema se deduce de varias maneras distintas, como consecuencia inmediata de otros resultados. Sin embargo, esto requiere un buen trabajo antes de llegar al hueso: posiblemente antes de enunciar el teorema hayamos lidiado no solo con el concepto de derivada sino también con el de integración a lo largo de curvas. En realidad, si el único objetivo es llegar al teorema en cuestión, se puede evitar hablar de todo esto y estudiar, en cambio, las propiedades de las funciones *analíticas*, que son las que admiten localmente

Palabras clave: Raíz cuadrada compleja, Teorema de Brouwer, Teorema fundamental del álgebra, Índice de una curva.

Keywords: Complex square root, Brouwer Theorem, Fundamental Theorem of Algebra, Winding number.

un desarrollo en serie de potencias. Sin duda, para hacerlo se requiere una buena dosis de simulación. Con aire distraído, tenemos que fingir que desconocemos un hecho que recién se demuestra en una etapa bastante más avanzada del curso: las funciones analíticas son, ni más ni menos, las funciones holomorfas. Como sea, también este camino tiene sus vericuetos: en principio, debemos aprender lo que es una serie de potencias, el radio de convergencia y luego, para llegar a los teoremas picantes, emplear alguna herramienta algo más sofisticada (por ejemplo, el logaritmo complejo).

Por otra parte, el análisis complejo nos abre también la puerta a las maravillas de la topología. En particular, una noción intuitivamente simple como la de *índice*, que cuenta el número de vueltas que da una curva en torno a un punto, permite probar la versión bidimensional de otro gran teorema, el de Brouwer. En este contexto, dicho teorema se puede formular así: *Sea $D_R \subset \mathbb{C}$ el disco cerrado de radio $R > 0$ centrado en el origen. Si $f : D_R \to D_R$ es una función continua, entonces f tiene al menos un punto fijo, es decir, existe $z \in D_R$ tal que $f(z) = z$.* Un resultado algo más sutil es el de *invariancia del dominio*, que dice: *Si $U \subset \mathbb{C}$ es abierto y $f : U \to \mathbb{C}$ es continua e inyectiva, entonces $V := f(U)$ es abierto y $f : U \to V$ es un homeomorfismo (es decir, la inversa $f^{-1} : V \to U$ también es continua).* Cabe agregar que el índice también permite dar una demostración muy elegante y directa (o bien "sin vueltas", si vale el pequeño contrasentido) del mencionado TFA. Pero, nuevamente, llegar a estas instancias requiere por lo general una definición del índice mediante integrales cuando la curva es suave y –si se pretende ahondar en los aspectos topológicos– un esfuerzo adicional para extender dicha definición a curvas cerradas que solamente son continuas.

El objetivo de este artículo consiste en presentar demostraciones elementales de todos los resultados mencionados, que no requieren derivadas, series ni integrales, sino apenas un ingrediente central que se come con todas las comidas: la raíz cuadrada. Para ser absolutamente precisos, ni siquiera hace falta saber cómo se define la raíz cuadrada compleja: alcanza con conocer la raíz real de toda la vida (exceptuando la infancia más tierna, se entiende) y conceptos básicos de continuidad. Tampoco hace falta saber mucho de los complejos en sí: apenas las operaciones básicas y una noción bien conocida, la de módulo. En resumen, para atacar este artículo solo es indispensable prepararse un mate o un café... y animarse a encarar la lectura, sin complejos. Bueno, a decir verdad con unos cuantos, pero únicamente en el sentido matemático del término.

§2. Pero, ¿qué es una raíz cuadrada?

En la introducción hemos prometido grandes hazañas a partir de la más pura e ingenua noción de raíz cuadrada de un número complejo. Y esto es algo que todo el mundo aprendió en el colegio: dado cierto $z \neq 0$, sabemos cómo encontrar sus dos raíces recurriendo a la escritura binomial o incluso a la magnánima forma polar. Sin embargo, puede ocurrir que nos hayamos despertado poco magnánimos y no queramos saber nada de todo eso. ¡No importa! Podemos llevar a cabo nuestra tarea de manera aún más sencilla.

Por empezar, observemos que si w es una raíz cuadrada de z (es decir, $w^2 = z$), entonces también lo es $-w$, ya que $(-w)^2 = w^2 = z$. Y esas son las únicas dos raíces que existen, pues vale

$$0 = z^2 - w^2 = (z - w)(z + w),$$

de donde $z = w$, o bien $z = -w$. Además, asumiendo que ya conocemos la raíz cuadrada real, entonces alcanza con suponer que z tiene módulo 1. En efecto, dado cualquier $\tilde{z} \neq 0$, si encontramos una raíz cuadrada w de $z := \frac{\tilde{z}}{|\tilde{z}|}$, entonces $\tilde{w} := \sqrt{|\tilde{z}|}w$ verifica:

$$\tilde{w}^2 = |\tilde{z}|w^2 = |\tilde{z}|z = \tilde{z}.$$

De paso, podemos también asumir que $z \neq -1$, cuyas raíces cuadradas ya conocemos: se trata –nada menos– que de las famosas i y $-i$.

Supongamos entonces que $|z| = 1$ y $z \neq -1$. Nuestro método para hallar la raíz cuadrada va a ser puramente geométrico, pero (tal como prometimos) sin recurrir a ángulos. Podemos dejar de lado el caso $z = 1$, que es más bien facilongo. Comencemos calculando el punto medio entre z y 1, es decir, $\frac{z+1}{2}$. Dividiendo este número por su módulo obtenemos

$$w = \frac{z+1}{|z+1|},$$

que también vive en la circunferencia unitaria y equidista de 1 y z, como se puede ver en la Figura 1. Pero w^2 se encuentra exactamente a la misma distancia de w, ya que

$$|w^2 - w| = |w| \cdot |w - 1| = |w - 1|.$$

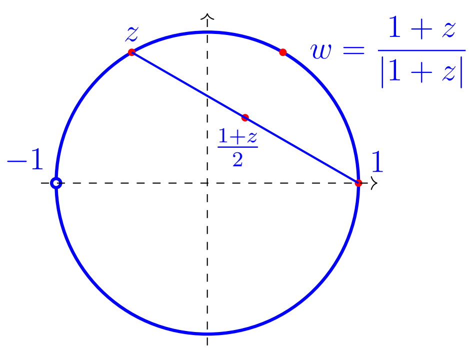

Figura 1

Dicho de otra forma, 1, z y w^2 se encuentran en una única circunferencia centrada en w. Pero, ¡atención! Dos circunferencias no se pueden cortar en más de dos puntos, de donde se deduce que $w^2 = z$. ¡Excelente noticia! Tal como anticipamos, este procedimiento nos permite definir sin mayor esfuerzo una *función* raíz cuadrada sobre el conjunto $A^+ := \mathbb{C} \smallsetminus \mathbb{R}_{\leq 0}$ de manera muy simpática:

$$r_+(z) := \sqrt{|z|}\frac{\frac{z}{|z|}+1}{\left|\frac{z}{|z|}+1\right|} = \sqrt{|z|}\frac{z+|z|}{|z+|z||}.$$

Es claro, además, que r_+ resulta continua. De paso, observemos también que $r_+(A^+) \subset A^+$, así que esta función se puede aplicar sucesivamente para obtener raíces cuartas, octavas, etc. Y, por supuesto, también tenemos una función parecida r_- definida sobre el conjunto $A^- := \mathbb{C} \smallsetminus \mathbb{R}_{\geq 0}$, entretenimiento que quedará para quienes hayan llegado hasta aquí. Pero pasemos a la próxima sección, en la que nos esperan varios asuntos importantes.

§3 Dadme una curva y extraeré sus raíces

En la sección previa vimos que cualquier número complejo $z \neq 0$ tiene exactamente dos raíces cuadradas. Vimos también que es posible definir, por ejemplo en A^+, una función continua que a cada z le asigna una de sus raíces cuadradas. Sin embargo, pronto mostraremos que esto no se puede hacer para un subconjunto arbitrario de $\mathbb{C} \smallsetminus \{0\}$; más en general, una función que no se anula no tiene por qué admitir una raíz cuadrada continua. Para nuestros fines, alcanzará con estudiar las curvas cerradas (lazos) que no pasan por el origen aunque, por comodidad, no vamos a pensar en curvas parametrizadas sino simplemente en funciones continuas $\gamma : S_R \to \mathbb{C} \smallsetminus \{0\}$, donde S_R es la circunferencia de radio R centrada en el origen, vale decir, el borde del disco que antes llamamos D_R. Por conveniencia, vamos a llamar $\mathcal{A}$ al conjunto de dichas funciones,

$$\mathcal{A} := \{\gamma : S_R \to \mathbb{C} \smallsetminus \{0\} : \gamma \text{ es continua}\},$$

que tienen la pinta que se muestra en la Figura 2.

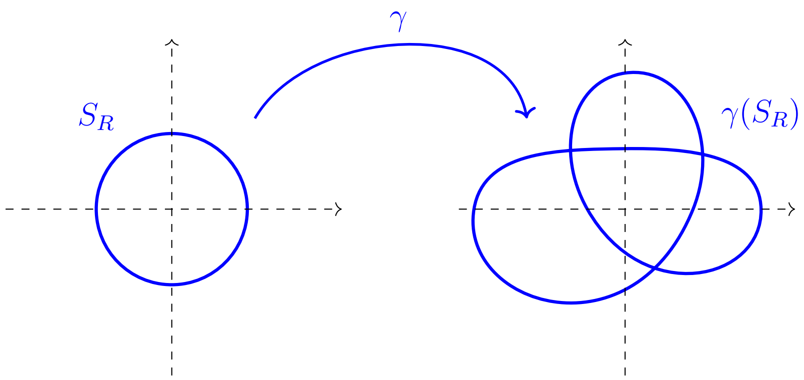

Figura 2

Entonces, dada $\gamma \in \mathcal{A}$, la pregunta es si siempre existe una raíz cuadrada continua, vale decir, cierta $\sigma \in \mathcal{A}$ tal que $\sigma(z)^2 = \gamma(z)$ para todo z. Es fácil ver que no y, en tal caso, no hay por qué enfurruñarse: al fin y al cabo, eso es lo que ocurre con funciones tan renombradas como la identidad o, más en general, con cualquier función *impar*. En efecto, si suponemos que $\gamma \in \mathcal{A}$, $\gamma(-z) = -\gamma(z)$ y γ tiene una raíz cuadrada continua σ, entonces

$$\frac{\sigma(-z)^2}{\sigma(z)^2} = \frac{\gamma(-z)}{\gamma(z)} = -1.$$

Esto dice que $\left(\frac{\sigma(-z)}{\sigma(z)}\right)^2 = -1$ para todo z, de modo que la función $\frac{\sigma(-z)}{\sigma(z)}$ solamente puede tomar los valores i y $-i$. Pero una función continua sobre la circunferencia no puede andar por ahí dando saltitos de un valor a otro, así que hay únicamente dos opciones:

$$\sigma(-z) \equiv i\sigma(z) \qquad \text{o bien} \qquad \sigma(-z) \equiv -i\sigma(z).$$

En cualquiera de los dos casos, esta conclusión nos lleva a un lamentable absurdo, ya que entonces

$$\sigma(1) = \sigma(-(-1)) = (\pm i)^2\sigma(1) = -\sigma(1).$$ [1]

En resumen,

Proposición 3.1. *Si $\gamma \in \mathcal{A}$ es impar, entonces no existe $\sigma \in \mathcal{A}$ tal que $\sigma(z)^2 = \gamma(z)$ para todo z.*

Felizmente, el mundo no acaba con estas funciones tan poco dispuestas a que hurguemos en sus raíces. Vamos a definir ahora, para cada $\gamma \in \mathcal{A}$, un número $v(\gamma)$ del siguiente modo. Si γ no tiene raíz cuadrada continua, ya sabemos que no es la muerte de nadie, lo que nos proporciona el coraje suficiente para anotar $v(\gamma) = 0$. En cambio, si γ nos honra con una raíz σ, entonces nos preguntamos si σ tiene, a su vez, una raíz cuadrada, y así sucesivamente. Si logramos extraer n raíces consecutivas y ninguna más, entonces anotamos, siempre con prolijidad, $v(\gamma) = n$. En cambio, si se pueden seguir extrayendo raíces de manera indefinida, entonces anotamos $v(\gamma) = \infty$. En resumen, $v(\gamma) = n$ significa que existe $\sigma \in \mathcal{A}$ tal que $\gamma = \sigma^{2^n}$ pero no existe $\tau \in \mathcal{A}$ tal que $\gamma = \tau^{2^{n+1}}$; en cambio, $v(\gamma) = \infty$ quiere decir que para todo n existe $\sigma \in \mathcal{A}$ tal que $\gamma = \sigma^{2^n}$. Algunas propiedades de v son muy fáciles de verificar:

[1] Este argumento es el mismo que, con cierta tosquedad, nos enseñaron en el colegio secundario a fin de advertirnos sobre los peligros de una distributividad mal aplicada:

$$1 = \sqrt{1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{-1}\sqrt{-1} = -1.$$

Errores similares se describen en el artículo (Benítez y Carena, 2021) donde, si bien se deja de lado la radicación compleja, se menciona por ejemplo que $\sqrt{(-25)\cdot(-4)} = 10 \neq \sqrt{(-25)}\cdot\sqrt{(-4)}$.

1. Si $\mathrm{Im}(\gamma) \subset A^+$ o $\mathrm{Im}(\gamma) \subset A^-$, entonces $v(\gamma) = \infty$. Esto se explica por lo que ya dijimos de la función r_+, que se puede aplicar de manera sucesiva sobre el conjunto A^+, y otro tanto vale para la función r_- definida sobre A^-. La propiedad incluye, claro está, el virtuoso caso de las funciones constantes (no nulas).
2. Si $v\left(\frac{\gamma}{\sigma}\right) = \infty$ entonces $v(\gamma) = v(\sigma)$. En efecto, si por ejemplo $v(\gamma) = n < v(\sigma)$, entonces podemos elegir $\tau, \upsilon \in \mathcal{A}$ tales que
$$\sigma = \tau^{2^{n+1}}, \qquad \frac{\gamma}{\sigma} = \upsilon^{2^{n+1}},$$
de donde se obtiene $\gamma = (\tau\upsilon)^{2^{n+1}}$, un nuevo absurdo.
3. $v(\gamma^2) = v(\gamma) + 1$. Esto esconde un pequeño abuso de notación, pero es razonable asumir que "$\infty + 1 = \infty$". Justamente, cuando $v(\gamma) = \infty$ se tiene también que $v(\gamma^2) = \infty$ y no hay nada que probar. Luego, podemos suponer $v(\gamma) = n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Escribiendo $\gamma = \sigma^{2^n}$ resulta $\gamma^2 = \sigma^{2\cdot 2^n} = \sigma^{2^{n+1}}$, de donde $v(\gamma^2) \geq n+1$. Por otro lado, si existiese σ tal que $\sigma^{2^{n+2}} = \gamma^2$, entonces $\left(\frac{\sigma^{2^{n+1}}}{\gamma}\right)^2 = 1$, que equivale a decir,
$$\frac{\sigma(z)^{2^{n+1}}}{\gamma(z)} = \pm 1 \quad \text{para todo } z \in S_R.$$
En consecuencia –otra vez, por ese asunto de los saltitos– resulta
$$\gamma = \sigma^{2^{n+1}} \qquad \text{o bien} \quad \gamma = -\sigma^{2^{n+1}}.$$
En cualquiera de ambos casos, se deduce que $v(\gamma) \geq n+1$, lo que es absurdo. Con un poco de espíritu inductivo, fácilmente podemos generalizar la propiedad y concluir que $v(\gamma^{2^m}) = v(\gamma) + m$ para todo $m \in \mathbb{N}_0$.

Llegado este punto, podemos preguntarnos para qué nos tomamos el trabajo de probar esta serie de trivialidades. Una respuesta posible es: porque tenemos muchas ganas de comprobar si, como se prometía en la introducción, realmente todo es tan fácil como aseguran los autores (mejor desconfiar de esa gente). En realidad, la función aquí llamada v tiene relación muy directa con la mencionada noción de índice y permite definirlo de manera muy sencilla, aunque esto requiere un poco más de esfuerzo. En lo que sigue mantendremos un nivel matemático absolutamente elemental y, aún así, lograremos probar varias cuestiones muy bonitas.

Por empezar, veamos que la función $v : \mathcal{A} \to \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ antes definida resulta continua. Esto puede parecer un tanto pomposo, pero nos referimos simplemente al hecho de que, para cualquier $\sigma \in \mathcal{A}$, se verifica que si γ está suficientemente cerca de σ, entonces el valor de v es el mismo para ambas. Específicamente, como σ no se anula, podemos fijar $\varepsilon > 0$ como el mínimo valor que alcanza $|\sigma|$, de modo que $|\sigma(z)| \geq \varepsilon$ para todo z. Si ahora $|\gamma(z) - \sigma(z)| < \varepsilon$ para todo z, entonces

$$\left|\frac{\gamma(z)}{\sigma(z)} - 1\right| < \frac{\varepsilon}{|\sigma(z)|} \leq 1.$$

En consecuencia, la función $\dfrac{\gamma}{\sigma}$ se mantiene siempre en un disco abierto de radio 1 centrado en 1 y, en particular, dentro de A^+. Esto quiere decir que $v\left(\dfrac{\gamma}{\sigma}\right) = \infty$, de donde (por la propiedad 2) se obtiene $v(\gamma) = v(\sigma)$.

Observación 3.2. *El resultado previo se puede expresar, de manera equivalente, diciendo que la función v es constante sobre la bola abierta de radio ε centrada en σ, donde*

$$\varepsilon := \min_{z \in S_R} |\sigma(z)|.$$

Un poco más en general, la anterior demostración muestra en realidad que el valor de v se mantiene constante para cualquier curva γ tal que $|\gamma(z) - \sigma(z)| < |\sigma(z)|$ para todo z. En definitiva, esto prueba una versión elemental de otro teorema célebre, en este caso del análisis complejo. ¿Alguien se anima a decir cuál? ¡Touché!

Una segunda consecuencia de las propiedades que emplearemos se desprende directamente de otro hecho que (¡vaya, qué afortunada casualidad!) vimos al comienzo: si $\gamma \in \mathcal{A}$ es impar, entonces no admite una raíz cuadrada continua y luego $v(\gamma) = 0$.

Finalmente, la clave de nuestras demostraciones futuras se encuentra en otra propiedad crucial que verifica nuestro numerito v. Por comodidad, dada una función $f : D_R \to \mathbb{C}$ continua que no se anula sobre el borde, llamaremos directamente $v(f)$ al valor que toma v sobre la restricción de f sobre S_R, es decir, $v\left(f|_{S_R}\right)$.

Proposición 3.3. *Sea $f : D_R \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ continua. Entonces $v(f) = \infty$.*

Demostración. Consideremos la función continua $h : [0,1] \times S_R \to \mathbb{C}$ dada por $h(s,z) := f(sz)$. Como f no se anula, si llamamos $\gamma_s(z) := h(s,z)$ entonces la función $v(\gamma_s)$ está bien definida y es continua, lo que equivale a decir que es constante. Luego (por la propiedad 1) $v(f) = v(\gamma_1) = v(\gamma_0) = \infty$, ya que $\gamma_0 \equiv f(0)$. $\square$

Aunque parezca una tontería, vamos a formular también un enunciado que es el contrarrecíproco del anterior, pero con un agregado, una pequeña sutileza que va a mostrar la fuerza de este numerito v. Para decirlo más claramente: el hecho de que $v(f) \neq \infty$ no implica solamente que f se anula, sino que su imagen contiene un entorno del origen.

Proposición 3.4. *Sea $f : D_R \to \mathbb{C}$ continua y supongamos que f no se anula en S_R. Sea $\varepsilon := \min_{z\in S_R} |f(z)|$ y supongamos $v(f) < \infty$. Entonces para todo w con $|w| < \varepsilon$ existe $z \in D_R$ tal que $f(z) = w$.*

Demostración. Dado w de módulo menor que ε, para todo z se verifica trivialmente que $|(f(z) - w) - f(z)| = |w| < \varepsilon$ y, por la Observación 3.2, ya sabemos que $v(f - w) = v(f)$. Por hipótesis $v(f) < \infty$ y entonces la Proposición 3.3 implica que $f(z) - w$ tiene que anularse en D_R. □

¡Qué bien, ya tenemos todo lo que necesitamos! Estamos en condiciones de probar todo lo anunciado, aunque debemos tener un poco de paciencia: las reglas más básicas del *suspense* nos exigen pasar antes a la próxima sección.

§4. Lo prometido es deuda

En esta sección demostraremos, por fin, todos los resultados enunciados al comienzo, a partir de las tres propiedades elementales que tiene nuestro mágico "numerito". Hilando más fino, veremos en realidad que los resultados topológicos emplean únicamente las dos primeras, mientras que la tercera, de carácter más algebraico, servirá casualmente para el TFA. Para calentar motores, comencemos por el teorema de punto fijo de Brouwer:

Teorema 4.1. *Sea $f : D_R \to D_R$ continua. Entonces existe $z \in D_R$ tal que $f(z) = z$.*

Demostración. Podemos suponer que $f(z) \neq z$ para $z \in S_R$ pues, en caso contrario, no tendríamos nada que probar. Para $(s, z) \in [0, 1] \times S_R$ consideremos ahora la función $\gamma_s(z) := z - sf(z)$, que no se anula: para $s = 1$, precisamente porque lo estamos suponiendo; para $s \in [0, 1)$, porque

$$|sf(z)| = s|f(z)| \leq sR < R = |z|$$

para todo $z \in S_R$. Como antes, debido a la continuidad de v, esto quiere decir que $v(\gamma_s)$ es constante. El valor para $s = 0$ ya lo conocemos, porque se trata de la identidad; de esta forma,

$$v(z - f(z)) = v(\gamma_1) = v(\gamma_0) = 0$$

y, por la Proposición 3.3, concluimos que $z - f(z)$ tiene que anularse. □

El teorema de Brouwer sigue valiendo si se reemplaza D_R por cualquier conjunto equivalente (en el sentido topológico). Por ejemplo, componiendo la función f con traslaciones, es inmediato verificarlo para un disco cerrado centrado en cualquier punto.

Otro de los resultados que teníamos pendientes es el de invariancia del dominio, que se puede enunciar también de la siguiente manera:

Teorema 4.2. *Sean $U \subset \mathbb{C}$ abierto y $f : U \to \mathbb{C}$ continua e inyectiva. Entonces f es abierta, es decir, la imagen de cualquier conjunto abierto es un conjunto abierto.*

Demostración. Alcanza con probar que si $V \subset U$ es un disco centrado en un punto z_0, entonces $f(V)$ contiene un disco centrado en $f(z_0)$. Ya que hablamos antes de traslaciones, se puede suponer, por comodidad, que $z_0 = 0 = f(0)$.[2] Sea entonces $D_R \subset V$ y consideremos ahora para $(s, z) \in [0, 1] \times S_R$ la función

$$\gamma_s(z) := f(z) - f(-sz),$$

que para $s = 0$ coincide con f. Como f es inyectiva, γ_s no se anula y entonces, empleando una vez más la continuidad de la función v, se obtiene

$$v(f) = v(\gamma_0) = v(\gamma_1) = v(f(z) - f(-z)).$$

Pero esta última función es impar, así que $v(f) = 0$, y la Proposición 3.4 nos garantiza que $f(D_R)$ contiene un entorno de 0. □

El teorema anterior nos está diciendo en realidad dos cosas: por un lado, que $f(U)$ es abierto en $\mathbb{C}$, por otro, que f establece un homeomorfismo entre U y $f(U)$.[3] Ninguna de las dos afirmaciones es baladí, pues por ejemplo una función continua y biyectiva puede tener inversa f^{-1} discontinua. Al lector interesado sobre estos temas le recomendamos el artículo (Cao Labora, 2020) de nuestro colega Dani Cao de la Universidad de Santiago de Compostela.

Para terminar, ¿qué tal si intentamos una prueba del Teorema Fundamental del Álgebra? Para tan honrosos fines, podemos antes hacer un cálculo muy sencillo, que nos pondrá en la pista acerca de quién es en verdad ese misterioso numerito v:

Proposición 4.3. *Sea $\gamma(z) = z^n$ para $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ y escribamos $n = 2^m k$ con k impar. Entonces $v(\gamma) = m$.*

Demostración. Basta escribir $z^n = (z^k)^{2^m}$, aplicar la generalización de la propiedad 3

$$v(z^n) = v\left((z^k)^{2^m}\right) = v(z^k) + m$$

y observar que $v(z^k) = 0$, por ser z^k una función impar. □

Teorema 4.4. *Todo polinomio $p(z)$ de grado mayor o igual que 1 tiene al menos una raíz compleja.*

Demostración. Podemos suponer que nuestro polinomio p es mónico, y considerar la función

$$h(s, z) = z^n + s(p(z) - z^n),$$

[2] En términos más precisos, esto se consigue reemplazando $f(z)$ por la función $f(z + z_0) - f(z_0)$.

[3] Esto último se debe al hecho de que, en general, una función entre dos espacios topológicos es continua si y solo si la preimagen de cualquier abierto es abierta. En el caso de f^{-1}, la equivalencia con el teorema anterior es obvia, pues la preimagen de A no es otra cosa que $f(A)$.

que para $R \gg 0$ no se anula si $z \in S_R$, puesto que z^n tiene grado n y $s(p(z) - z^n)$ tiene a lo sumo grado $n-1$. Pero $h(0,z) = z^n$ y $h(1,z) = p(z)$, de modo que

$$v(p) = v(z^n) < \infty.$$

La conclusión se deduce nuevamente de la Proposición 3.4. $\square$

§5. Comentarios finales a modo de *Epílogo*

Por supuesto, quienes tengan alguna experiencia con la variable compleja podrán aspirar a obtener alguna relación más precisa entre la función v y el índice de una curva: sin ánimos de oficiar de *spoilers*, podemos mencionar el hecho de que v no es otra cosa que la valuación 2-ádica del valor absoluto de dicho índice, vale decir, la potencia de 2 que aparece en su factorización. Esto es lo que anticipa, con toda exactitud, la proposición de la sección previa; si hacemos lo mismo para todos los primos $p > 2$, entonces podemos brindar una definición alternativa de lo que significa el valor absoluto del índice de una curva γ, pensada como un elemento de $\mathcal{A}$. Más en general, se puede probar que el valor absoluto de dicho índice se puede definir como el mayor valor n tal que existe una raíz n-ésima de γ, o bien 0, en caso de que haya raíces de orden arbitrariamente alto. A simple vista, puede llamar la atención el hecho de que, en este último caso, existen raíces de todos los órdenes; sin embargo, esto no es una sorpresa: las curvas tales que $v(\gamma) = \infty$ son aquellas que pueden "desenroscarse" para transformarse, de manera continua, en una constante. Todo esto lo explicamos con mucho detalle en nuestro trabajo (Amster y Cid, 2022) cuya escritura nos dio mucha alegría.

Este artículo también hubiera podido titularse "Ser o no ser (un cuadrado), esa es la cuestión", puesto que nuestra curva γ satisface $v(\gamma) > 0$ si y solo si pertenece a la imagen de la aplicación cuadrática

$$\mathcal{A} \to \mathcal{A}, \quad \sigma \mapsto \sigma^2.$$

La importancia de los cuadrados en matemática ha sido glosado por Olga Taussky–Todd en dos bonitos artículos divulgativos, (Taussky, 1970, 1988), y los profundos resultados de H. Hopf sobre las álgebras de división se basan en gran medida en las propiedades de la aplicación cuadrática, (Ebbinghaus y cols., 1991, Capítulo 8).

Por otra parte, nuestra amiga la raíz cuadrada también permite caracterizar las regiones simplemente conexas (es decir, sin agujeritos) como aquellas regiones conexas en la que cualquier función analítica que no se anula admite una raíz cuadrada analítica. Esta propiedad hace una aparición estelar en la demostración de un resultado tan famoso como el Teorema de la Aplicación de Riemann que asegura que cualquier abierto simplemente conexo distinto de $\mathbb{C}$ (y obviamente del vacío) es equivalente al disco unitario abierto mediante una aplicación analítica que preserva ángulos, (Conway, 1978).

Observe también el lector que en nuestra definición de la función r_+ interviene su prima $\sqrt{\cdot}$, la raíz cuadrada real. Si le han entrado sudores fríos intentando recordar el algoritmo escolar para calcular la raíz cuadrada de un número $a > 0$ entonces agradecerá saber que un método geométrico mucho más simple fue ya reportado por Herón de Alejandría en el siglo I, (Gasull, 2022; Hasselblatt y Katok, 2003): partiendo de una estimación inicial x_0 para la raíz construimos un rectángulo de área a, esto es, de lados x_0 y $\dfrac{a}{x_0}$. Luego, no es una locura pensar que el promedio de ambos lados

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{a}{x_0}\right)$$

será una mejor aproximación para intentar construir un cuadrado de área a, lo que nos lleva a repetir, sin prisa pero sin pausa,

$$x_n = H(x_{n-1}) := \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}}\right), \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

cumpliéndose que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{a}$ siempre que $x_0 > 0$ (o más en general, si $x_0 \in \mathbb{C}$ y tiene parte real positiva).

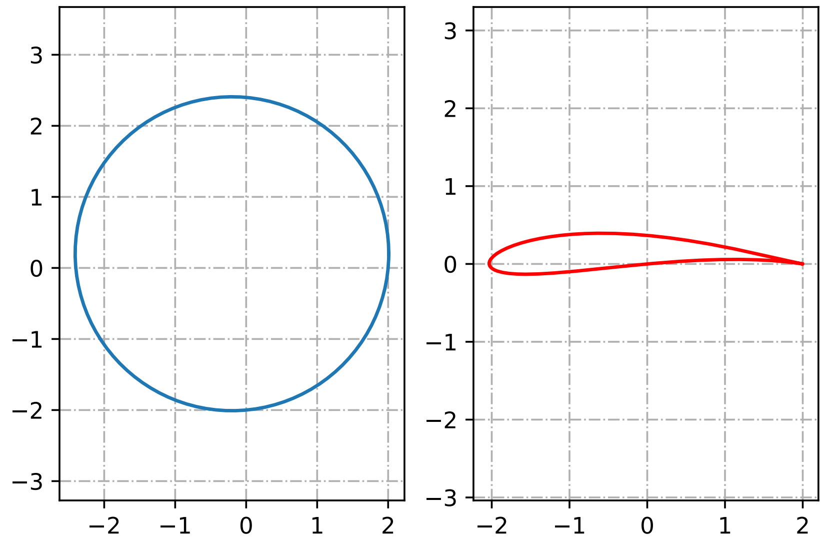

Figura 3. Transformación de Zhukovsky aplicada a la circunferencia de la izquierda.

Sorprendentemente, por aquello de la irrazonable efectividad de las matemáticas, la función H pensada como función de variable compleja

$$H\colon \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}, \quad z \to \frac{1}{2}\left(z + \frac{a}{z}\right),$$

se conoce como transformación de Zhukovsky (ver Figura 3) y encuentra aplicaciones prácticas en aeronáutica, ya que transforma una cierta circunferencia del plano complejo en un perfil similar al ala de un avión, lo que permite estudiar de forma sencilla el flujo de aire a su alrededor, (Penrose, 2005). Esto termina de confirmar un hecho que veníamos sospechando desde el comienzo: ¡la raíz cuadrada es un asunto de altos vuelos!

Bibliografía

Amster, P., y Cid, J. A. (2022). The full power of the half-power. *Expo. Math.*, *40*(4), 994–1013.

Benítez, F., y Carena, M. (2021). Reflexiones acerca de la definición de radicación y su relación con la construcción de nuevos conceptos. *RevEM UMA*, *36*(1), 9–26.

Cao Labora, D. (2020). When is a continuous bijection a homeomorphism? *Amer. Math. Monthly*, *127*(6), 547–553.

Conway, J. B. (1978). *Functions of one complex variable. Second edition*. New York–Berlin: Graduate Texts in Mathematics, 11, Springer–Verlag.

Ebbinghaus, H.-D., Hermes, H., Hirzebruch, F., Koecher, M., Mainzer, K., Neukirch, J., … Remmert, R. (1991). *Numbers*. New York: Graduate Texts in Mathematics, 123, Springer–Verlag.

Gasull, A. (2022). Los babilonios y Newton. *La Gaceta de la RSME*, *25*, 488.

Hasselblatt, B., y Katok, A. (2003). *A first course in dynamics with a panorama of recent developments*. Cambridge University Press.

Penrose, R. (2005). *The road to reality. A complete guide to the laws of the universe*. New York: Alfred A. Knopf, Inc.

Taussky, O. (1970). Sums of squares. *Amer. Math. Monthly*, *77*, 805–830.

Taussky, O. (1988). From Pythagoras' theorem via sums of squares to celestial mechanics. *Math. Intelligencer*, *10*(1), 52–55.

Pablo Amster
Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias y Naturales
Universidad de Buenos Aires – IMAS-CONICET
(✉) *pamster@dm.uba.ar*

José Ángel Cid
CITMAga, 15782 Santiago de Compostela, España
Departamento de Matemáticas, Universidade de Vigo
(✉) *angelcid@uvigo.es*

Recibido: *24 de abril de 2023.*
Aceptado: *23 de julio de 2023.*
Publicado en línea: *3 de agosto de 2023.*