¿Sabías que...

por Leandro Cagliero y Ricardo Podestá

si en un cuadrado, por cada vértice trazamos la media diagonal al punto medio del lado opuesto en sentido horario (u antihorario), el cuadrado que queda formado en el centro tiene $\frac{1}{5}$ del área del cuadrado original?

Por media diagonal nos referimos al segmento que une un vértice con el punto medio de un lado opuesto (en un cuadrado hay dos medias diagonales por vértice, que por analogía con el triángulo podemos llamarlas medianas).

¡Qué resultado más sorprendente, que de un cuadrado aparezca de repente el número 5! En la siguiente figura se puede ver la construcción:

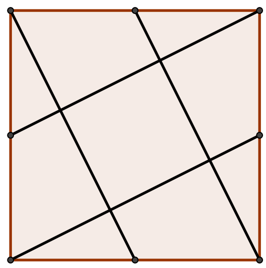

FIGURA 1.

Veamos que se puede deducir el resultado geométricamente de manera muy sencilla. Si rotamos los 4 triángulos rectángulos (mas chicos) por los vértices del cuadrado en sentido horario y apoyamos el punto medio de un lado sobre otro (en la Figura 2 vemos rotado el triángulo $\triangle RBY$), vemos que se forman 4 cuadrados congruentes con el cuadrado central (nos queda una cruz) y por lo tanto el cuadraditoo central tiene $\frac{1}{5}$ del área del cuadrado original (al igual que los otros cuatro).

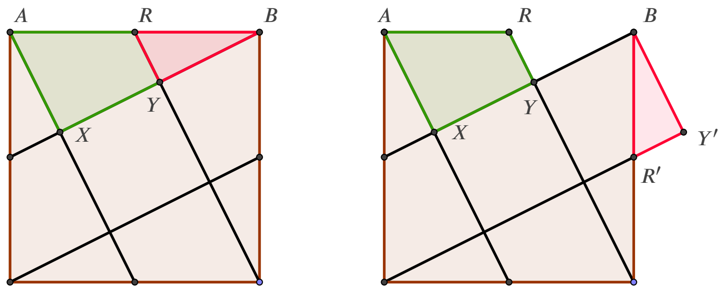

FIGURA 2.

Notar que la misma prueba funciona para paralelogramos (es decir, el paralelogramo interior formado por 2 pares de medianas paralelas que se cortan, tiene $\frac{1}{5}$ del área del paralelogramo inicial). El resultado vale en general para cuadriláteros convexos (trapezoides) y es debido a Rick Mabry (ver (Mabry, 2011), disponible electrónicamente en https://lsusmath.rickmabry.org/rmabry/corners/CrosscutConvexQuadrilaterals.pdf).

Si hacemos lo mismo con un hexágono regular, el hexágono interior formado por las medias diagonales tiene área $\frac{1}{13}$ y la estrella hexagonal tiene área $\frac{2}{13}$.

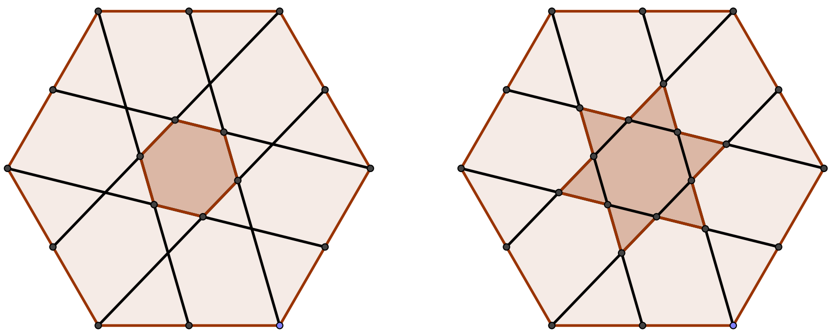

FIGURA 3.

Invitamos al lector a encontrar una demostración de este hecho, similar a la que realizamos con el cuadrado. A modo de ayuda diremos que se puede hacer apoyando 6 hexágonos congruentes al hexágono central H, tanto sobre los lados (ver (Mabry, 2018)) como sobre los vértices de H.

Como somos curiosos, podemos preguntarnos entonces ¿qué sucede con los demás polígonos regulares de un número par de lados? Para ello podemos hacer las cuentas usando coordenadas.

Llamemos P_{2k} al polígono regular de $2k$ lados inscripto en una circunferencia de centro el origen de coordenadas y radio igual a 1. Sea Q_{2k} el polígono determinado por las intersecciones de las medias diagonales de P_{2k}. Es claro que el centro de Q_{2k} será el mismo de P_{2k}, así que Q_{2k} estará inscripto en una circunferencia de centro el origen del sistema de coordenadas y cierto radio ρ. De este modo, la razón de semejanza entre P_{2k} y Q_{2k} será ρ y por lo tanto

$$\text{Área}(Q_{2k}) = \rho^2\, \text{Área}(P_{2k}).$$

Nuestro objetivo es hallar ρ.

Pensemos que el primer y segundo vértice de P_{2k} son, respectivamente,

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{k}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{k}\right) \end{pmatrix}.$$

La media diagonal correspondiente a cada uno de ellos resulta de unirlos con el punto medio del lado que está antes (en el sentido antihorario) del respectivo vértice opuesto. Es decir que debemos trazar los segmentos $\overline{v_1 w_1}$ y $\overline{v_2 w_2}$ donde

$$w_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \cos\left(\frac{(k-1)\pi}{k}\right) \\ \sin\left(\frac{(k-1)\pi}{k}\right) \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad w_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \cos\left(\frac{(k+1)\pi}{k}\right) \\ \sin\left(\frac{(k+1)\pi}{k}\right) \end{pmatrix}.$$

Ahora debemos hallar el punto donde se cortan los segmentos $\overline{v_1 w_1}$ y $\overline{v_2 w_2}$. Ese punto resulta ser

$$u = \frac{1}{3\cos\left(\frac{\pi}{k}\right) + 5}\begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{k}\right) - 1 \\ 2\sin\left(\frac{\pi}{k}\right) \end{pmatrix}.$$

Dado que u es uno de los vértices de Q_{2k}, sabemos que $\rho = |u|$ y por lo tanto

$$\rho^2 = \frac{1 - \cos\left(\frac{\pi}{k}\right)}{3\cos\left(\frac{\pi}{k}\right) + 5}.$$

Podemos verificar que para $k = 2$ y $k = 3$, el valor de ρ^2 es $\frac{1}{5}$ y $\frac{1}{13}$, como ya habíamos anticipado.

¿Habrá algún otro k para el cual ρ^2 sea un número racional? La respuesta es, un poco sorpresivamente, que no. En efecto, despejando $\cos\left(\frac{\pi}{k}\right)$ en términos de ρ^2 obtenemos que uno es racional si y solo si el otro es racional y el Teorema de Niven (ver por ejemplo (Olmsted, 1945)) nos dice que $\cos\left(\frac{\pi}{k}\right)$ es un número racional solamente cuando $k = 2$ ó $k = 3$.

Dicho de otro modo, el teorema de Niven nos dice que no puede existir una prueba geométrica como las mencionadas para el cuadrado y el hexágono regular para otro polígono regular de un número par de lados.

Bibliografía

Mabry, R. (2011). Crosscut convex quadrilaterals. *Mathematics Magazine*, *84*(1), 16–25.

Mabry, R. (2018). Proof without words: One-thirteenth of a hexagon. *Mathematics Magazine*, *91*(3), 184–185.

Olmsted, J. M. H. (1945). Rational values of trigonometric functions. *Amer. Math. Monthly*, *52*(9), 507–508.

Richad Lee Mabry (16-11-1939 – 22-3-2006), conocido como 'Rick' Mabry, fue un profesor de matemáticas norteamericano, quien recibió su Master en Ciencias por la Universidad de Oregon en 1970, dio clases en escuelas de Portland por mas de 30 años. Estaba interesado en cuestiones de combinatoria geométrica, con muchos aportes a la matemática recreativa o divulgativa en estas áreas. Algunas de sus contribuciones pueden verse en las páginas https://lsusmath.rickmabry.org/rmabry/rdmrsrch.htm y https://lsusmath.rickmabry.org/rmabry/