los racionales se pueden ordenar explícitamente?

Recordemos que un conjunto X es numerable si se lo puede poner en biyección con los naturales $\mathbb{N}$. Es decir, si existe una función

$$f : X \to \mathbb{N}$$

inyectiva y sobreyectiva. En este caso, llamamos x_n al elemento de X cuya imagen por f es n (i.e. $f(x_n) = n$) y podemos pensar que los elementos de X están ordenados, el x_1 es el primer elemento de X, el x_2 el segundo, etcétera. Es decir, le pasamos el orden de $\mathbb{N}$ a X vía la biyección.

Es bastante conocido el hecho de que los números racionales son numerables, pero la justificación que usualmente se enseña no establece una biyección explícita. Recordaremos esta justificación y luego daremos una biyección explícita de $\mathbb{Q}^+$ en $\mathbb{N}$ muy sencilla e ingeniosa ¡basada en el Teorema Fundamental de la Aritmética! Daremos de este modo una ordenación explícita de los racionales.

Producto de conjuntos numerables es numerable. Comenzamos mostrando un hecho que es bastante intuitivo, que el producto de conjuntos numerables es numerables. Dados A y B conjuntos numerables, digamos $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ y $B = \{b_1, b_2, b_3, \dots\}$, numeramos el producto cartesiano $A \times B$ “por diagonales” como muestra el diagrama.

$$\begin{tikzcd}
(a_1,b_6) & (a_2,b_6) & (a_3,b_6) & (a_4,b_6) & (a_5,b_6) & (a_6,b_6) \\
(a_1,b_5) \arrow[dr] & (a_2,b_5) \arrow[ul] & (a_3,b_5) & (a_4,b_5) & (a_5,b_5) & (a_6,b_5) \\
(a_1,b_4) \arrow[u] & (a_2,b_4) \arrow[dr] & (a_3,b_4) \arrow[ul] & (a_4,b_4) & (a_5,b_4) & (a_6,b_4) \\
(a_1,b_3) \arrow[dr] & (a_2,b_3) \arrow[ul] & (a_3,b_3) \arrow[dr] & (a_4,b_3) \arrow[ul] & (a_5,b_3) & (a_6,b_3) \\
(a_1,b_2) \arrow[u] & (a_2,b_2) \arrow[dr] & (a_3,b_2) \arrow[ul] & (a_4,b_2) \arrow[dr] & (a_5,b_2) \arrow[ul] & (a_6,b_2) \\
(a_1,b_1) \arrow[r] & (a_2,b_1) \arrow[ul] & (a_3,b_1) \arrow[r] & (a_4,b_1) \arrow[ul] & (a_5,b_1) \arrow[r] & (a_6,b_1) \arrow[ul]
\end{tikzcd} \tag{1}$$

Es decir, (a_1, b_1) es el primer elemento de $A \times B$, (a_2, b_1) es el segundo, (a_1, b_2) es el tercero y así sucesivamente. Es claro que recorriendo el conjunto $A \times B$ de esta forma le damos un orden a los elementos del producto cartesiano y por lo tanto existe una biyección de $A \times B$ con $\mathbb{N}$. Sin embargo, dar explícitamente esta biyección no es tan fácil.

Para escribir formalmente una biyección será mejor recorrer las diagonales de otra manera, siempre desde abajo hacia arriba, como en el siguiente diagrama.

$$
\begin{matrix}
(a_1,b_6) & (a_2,b_6) & (a_3,b_6) & (a_4,b_6) & (a_5,b_6) & (a_6,b_6) \\
(a_1,b_5) & (a_2,b_5) & (a_3,b_5) & (a_4,b_5) & (a_5,b_5) & (a_6,b_5) \\
(a_1,b_4) & (a_2,b_4) & (a_3,b_4) & (a_4,b_4) & (a_5,b_4) & (a_6,b_4) \\
(a_1,b_3) & (a_2,b_3) & (a_3,b_3) & (a_4,b_3) & (a_5,b_3) & (a_6,b_3) \\
(a_1,b_2) & (a_2,b_2) & (a_3,b_2) & (a_4,b_2) & (a_5,b_2) & (a_6,b_2) \\
(a_1,b_1) \longrightarrow & (a_2,b_1) & (a_3,b_1) & (a_4,b_1) & (a_5,b_1) & (a_6,b_1)
\end{matrix}
$$

Veamos cómo definir explícitamente la biyección de arriba que llamamos

$$h : A \times B \to \mathbb{N}.$$

Observamos que en cada diagonal (que va de (a_1, b_j) hacia abajo) la suma de los subíndices de elementos (a_i, b_j) en ella es constante igual a $i + j$. Además, la diagonal n-ésima tiene n elementos (pensando a (a_1, b_1) como la primer diagonal) y es claro que $n = i + j - 1$.

Dicho esto, la función h dada por el dibujo de arriba cumple

$$h(a_1, b_1) = 1$$

y para todo $(i, j) \neq (1, 1)$ tiene la expresión

$$h(a_i, b_j) = 1 + 2 + \cdots + (i + j - 2) + j.$$

En efecto, si (a_i, b_j) está en la diagonal $i + j - 1$, por lo tanto las $i + j - 2$ diagonales previas aportan $1 + 2 + \cdots + (i + j - 2)$ mientras que (a_i, b_j) ocupa la posición j en su diagonal. Finalmente, usamos que sabemos calcular la suma de n números consecutivos, en efecto

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \tfrac{1}{2} n(n + 1),$$

de donde finalmente obtenemos

(2) $$h(a_i, b_j) = \tfrac{1}{2}(i + j - 2)(i + j - 1) + j.$$

Podemos chequear, por ejemplo, que (a_3, b_4) está en la sexta diagonal y ocupa la posición 19 en el orden de las flechas y tenemos que

$$h(a_3, b_4) = \frac{5 \cdot 6}{2} + 4 = 19.$$

Perfecto, ¡sigamos!

Justificación usual de que $\mathbb{Q}^+$ es numerable. Los números racionales positivos tienen numerador y denominador; ambos son números naturales. Es decir que los racionales positivos pueden ser pensados como el producto cartesiano

$$\mathbb{N} \times \mathbb{N},$$

aunque con repeticiones, pues un mismo racional puede expresarse usando distintos pares de numeradores y denominadores: los pares ordenados $(1, 1)$ y $(2, 2)$ de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ representan el mismo racional 1. Es más, el número 1 aparecerá infinitas veces, pues $1 = (i, i)$ para todo $i \in \mathbb{N}$; el $\frac{1}{2}$ aparecerá infinitas veces, pues $\frac{1}{2} = (i, 2i)$ para todo $i \in \mathbb{N}$, y lo mismo sucede con todo racional. Esto provoca que $\mathbb{Q}^+$ no sea exactamente igual a $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

La justificación usual de que $\mathbb{Q}^+$ es numerable argumenta entonces del siguiente modo. Si queremos dar un orden concreto a los elementos de $\mathbb{Q}^+$, podemos usar lo visto para producto cartesiano de conjuntos numerables; o sea usar el orden dado en (1) tomando $A \times B = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, es decir

$$(a_i, b_j) = (i, j).$$

El punto es que hay que descartar las repeticiones. Entonces simplemente numeramos la primera vez que pasamos por cada racional e ignoramos las siguientes apariciones.

El problema de esta justificación es que ya no es posible dar una expresión explícita para la biyección como en (2) culpa de estas repeticiones. Esto hace que sea muy complicado decir cuál es el racional número 1000 ó 1000000, por ejemplo. Pero no hay que preocuparse por esto, en matemática ¡casi siempre hay una salida!

$\mathbb{Q}^+$ es explícitamente ordenable. Con esto queremos decir que podemos dar una biyección explícita de $\mathbb{Q}^+$ en $\mathbb{N}$ y por lo tanto un orden a los elementos de $\mathbb{Q}^+$.

Notablemente, usaremos el Teorema Fundamental de la Aritmética (TFA) que asegura que todo número natural distinto de 1 se puede escribir de forma única como producto de números primos, salvo el orden de los factores.

Presentamos entonces la biyección explícita,

$$f : \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{N},$$

dada por Yoram Shager en 1989 (ver [**1**]). Se define $f(1) = 1$. Ahora, si $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}^+$, suponemos que es fracción reducida (sin factores comunes) y que

$$m = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k} \qquad \text{y} \qquad n = q_1^{b_1} q_2^{b_2} \cdots q_l^{b_\ell}$$

son las factorizaciones en primos de m y n, respectivamente (es decir, los p_i's y q_j's son primos distintos y los a_i's, b_j's son naturales) que existen y son únicas por TFA. Luego, se define

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = p_1^{2a_1} \cdots p_k^{2a_k} \cdot q_1^{2b_1-1} \cdots q_\ell^{2b_\ell-1}.$$

Veamos que la función f es biyectiva. La inyectividad es consecuencia de la unicidad de factorización de m y n en primos y lo dejamos como ejercicio (¡hacelo!). Que es sobreyectiva sale analizando un poco la fórmula de f. Si queremos ver que un natural cualquiera k es imagen por f de un racional $\frac{m}{n}$, lo que hacemos es mirar la factorización prima de k y separar los primos que aparecen a potencias pares (que nos dará el numerador m) de los primos que aparecen a potencias impares (que nos dará el denominador n). Más precisamente, si $k = p_1^{2a_1} \cdots p_k^{2a_k} \cdot q_1^{2b_1-1} \cdots q_\ell^{2b_\ell-1}$ entonces llamando $m = p_1^{a_1} \cdots p_k^{a_k}$ y $n = q_1^{b_1} \cdots q_\ell^{b_\ell}$ tenemos que

$$f\left(\tfrac{m}{n}\right) = k,$$

como queríamos ver.

Con esta función, los primeros 20 racionales de la lista son

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ 2,\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{7},\ \frac{1}{4},\ 3,\ \frac{1}{10},\ \frac{1}{11},\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{13},\ \frac{1}{14},\ \frac{1}{15},\ 4,\ \frac{1}{17},\ \frac{3}{2},\ \frac{1}{19},\ \frac{2}{5}$$

(chequear). Por ejemplo, si queremos saber cual es el 10^{15}-ésimo racional (¡en el orden que estamos dando!) hacemos

$$10^{15} = 2^{15} \cdot 5^{15} = 2^{2\cdot 8-1} 5^{2\cdot 8-1} = f\left(\tfrac{1}{10^8}\right)$$

y deducimos que $\frac{1}{10^8}$ es el racional buscado.

Por último, ¿cuál es el racional que ocupa la posición 181222 (fecha en que Argentina consiguió la tercer estrella ★★★) en la lista? Como la factorización en primos es $181222 = 2 \cdot 19^2 \cdot 251$ se tiene que

$$181222 = f\left(\tfrac{19}{2\cdot 251}\right),$$

es decir, $\frac{19}{502}$ es el 181222-ésimo racional de la lista. ¡Madre mía, qué bonito!

Referencias

[1] YORAM SAGHER. *Counting the Rationals*. The American Mathematical Monthly **96:9**, p. 823, 1989.

Yoram Sagher Nació en 1939. Recibió su Licenciatura en Ciencias en el Instituto Technion de Israel y se doctoró en la Universidad de Chicago en 1967 bajo la dirección de Antoni Zygmund con la tesis titulada 'On hypersingular integrals with complex homogeneity'. Ha dirigido 13 tesis doctorales. Es Profesor de la universidad Atlántica de Florida y Profesor Emérito del Departamento de Matemática, Estadística y Ciencias de la Computación de la Universidad de Illinois (Chicago, EEUU). Sus intereses de investigación son Análisis armónico, Teoría de la interpolación y Educación matemática. Dictó una conferencia en la Reunión Anual de la Unión Matemática en Salta 1970.