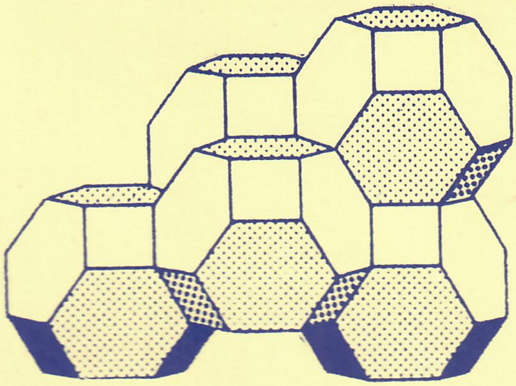
REVISTA DE EDUCACION MATEMATICA

UNION MATEMATICA ARGENTINA
FACULTAD DE MATEMATICA, ASTRONOMIA Y FISICA



PROBLEMAS Y DESAFIOS MATEMATICOS

Nº 1 - 1991

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CORDOBA

E D I T O R I A L

Iniciamos con este boletín una nueva serie de nuestra Revista de Educación Matemática, dedicada al planteo de problemas y desafíos matemáticos, que esperamos sean atrayentes para los lectores. Los acertijos y problemas, sirven para agudizar la curiosidad, estimular el espíritu creativo y son, sin duda, el despertar de muchas vocaciones científico-matemáticas.

El presente número consiste, en esencia, de los problemas planteados en los cinco primeros volúmenes de la REM. Esperamos contar con la entusiasta colaboración de los lectores, a través del envío de nuevos problemas y soluciones, las cuales, luego de una selección, serán publicadas periódicamente en un boletín de soluciones.

Confiamos reunir suficiente material para publicar un nuevo número en 1992.

La aparición de este número coincide con la inauguración de la VI Olimpíada Iberoamericana de Matemática. Aprovechamos para desearles a los organizadores y participantes de la misma una gran experiencia de confraternidad y suceso.

PROBLEMAS Y DESAFIOS MATEMATICOS

1) Sean α, β, γ los ángulos de un triángulo. Mostrar que el triángulo es isósceles si y sólo si

$$tg(\alpha - \beta) + tg\,(\beta - \gamma) + tg\,(\gamma - \alpha) = 0$$

2) Determine todas las soluciones enteras de la ecuación

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$$

3) Pruebe que hay una infinidad de números enteros m que o se pueden representar $m = x^3 + y^3 + z^3$, (x, y, z, números enteros).

4) Hallar todos los números de cuatro cifras x tales que si y es el número obtenido escribiendo en orden inverso las cifras de x, x.y es un número de ocho cifras terminado en 000.

5) Se arroja un dado varias veces hasta que la suma total sea mayor que 12. ¿Qué suma es más probable obtener?. Generalice al caso en que se trata de superar un número arbitrario m.

6) ¿En qué proporción quedan divididas el área y el volumen de una esfera de radio 1 por el plano de una de las caras del cubo inscripto?.

7) Sea S una esfera de radio r y S′ otra esfera que pasa por el centro de S y no es interior a S. Sea A el área del casquete de S′ determinado por S. Demostrar que A no depende de S′. ¿Cuánto vale A?.

8) Sean S_1 y S_2 dos esferas tangentes (la primera anterior a la otra); sea P un plano normal a la recta determinada por los centros y el punto de tangencia y tal que corte a ambas. Sobre dicho plano las esferas determinan una corona circular. Sea A el área de esta corona y A_1 y A_2 el área de los casquetes de S_1 y S_2 (respectivamente) que contienen al punto de tangencia. Demostrar que A_1 A = A_2.

9) En un triángulo dado incribir un triángulo con sus tres lados paralelos a tres líneas dadas.

10) Dado un segmento $\overline{AB}$ en el espacio para todo punto C exterior trazar los segmentos AC y BC. Determine todos los puntos para los cuales el ángulo $A\hat{C}B$ es recto.

11) Pruebe que si 6 círculos contienen un punto en común, al menos un círculo contiene el centro de otro círculo.

12) Pruebe que si a + b + c = 1, entonces $a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{1}{3}$. Generalice.

13) Encuentre el máximo común divisor (a,b) entre

$a = 11111111$ y $b = 11 \ldots 1$ (100 dígitos iguales a 1). En general, si $a_n = 11 \ldots 1$ (n dígitos iguales a 1) halle una fórmula para (a_n, a_m).

14) Entre los números naturales cuyos dígitos son todos iguales a 1 encuentre el menor número que es divisible por 33 ... 3 (100 dígitos iguales a 3).

15) (El duelo triangular)

Tres tiradores, A, B y C disputan un duelo a pistola en las siguientes condiciones. Ubicados en las esquinas de un triángulo equilátero se disparan por turnos mutuamente en un orden sorteado de antemano hasta que sólo haya un sobreviviente. Cada tirador dispara un tiro por vez en la dirección deseada. Además los tiradores saben que A siembre acierta al blanco, que B acierta un 80% de sus disparos y C un 50% de ellos. Suponiendo que cada uno de ellos sigue la estrategia más favorable y que ninguno resulta muerto por un disparo que no ha sido hecho contra él, ¿Quién tiene más chance de sobrevivir?

¿Cuáles son las probabilidades de sobrevivir de cada uno?

16) Justificar que los números complejos v, w que se obtienen por el siguiente proceso son las soluciones de

$x^2 = z_1 z_2$, siendo z_1, z_2 números complejos dados. Sea L la recta que contiene la bisectriz del ángulo z_1 ó z_2 y M su perpendicular por 0. Sea z_3 al simétrico de z_2 con respecto a M. La circunferencia determinada por z_1 z_2 y z_3 intersecta la recta L en dos puntos v,w.

17) Construir un triángulo dado: un lado, el producto de las longitudes de los otros dos lados y la diferencia de los ángulos interiores con vértices en el lado dado.

18) Si los lados de un triángulo rectángulo miden números naturales, entonces el producto de las longitudes de los tres lados es un múltiplo de 60.

19) En cada uno de los problemas siguientes, dar la (las) soluciones con al menos cuatro cifras decimales exactas.

a) ¿Para qué ángulos centrales la longitud del arco de circunferencia es el doble de la longitud de la cuerda subtendida por dicho arco?.

b) Si un sector circular es tal que la cuerda que subtiende al arco de circunferencia que lo define, lo divide en dos regiones de igual área. ¿Cuál es la medida del ángulo central?

c) Un tronco cilíndrico de madera cuyo peso específico es 2/3 flota en el agua, ¿a qué profundidad se hunde?

20) Si a, b son números reales tal que $0 \leq b - a \leq 10^{-m}$ (m algún natural). ¿Se puede asegurar que las primeras m cifras decimales de a y b coinciden?

21) Piense en triángulos ABC de base $\overline{AB}$ fija. Describir el conjunto de puntos C tal que la diferencia de los ángulos $\hat{A}$ y $\hat{B}$ es constante.

22) Fijar una circunferencia C y un punto O en C. Describir la curva determinada por los puntos medios de las cuerdas de C que pasan por O.

23) Reformular problemas 6 y 7 en el espacio o sugerir de este tipo de problemas en el plano.

24) Sean $0 < k_i < 1$ para $i = 1,2,3,\ldots$. Formamos la sucesión de sumas parciales

$$s_1 = k_1$$
$$s_2 = k_1 + k_2(1 - k_1)$$
$$\vdots$$
$$s_{n+1} = s_n + k_{n+1}(1-s_n)$$
$$\vdots$$

Observar que $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = k_1 + k_2(1-k_1) + k_3(1-k_1)(1-k_2) +\ldots$ es un número menor o igual a 1. Probar que este límite es 1 si y sólo si $\sum_{i=1}^{\infty} k_i = \infty$. Como aplicación de este resultado mostrar que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1.3...(2n-1)}{2.4...(2n)} \cdot \frac{1}{2n+2} = \frac{1}{2} \text{ y } \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2.4...(2n)}{3.5...(2n+1)} \cdot \frac{1}{2n+3} = \frac{1}{3}$$

Los siguientes ejercicios han sido seleccionados entre aquellos, ya publicados, que no han recibido solución.

25) Cuatro esferas de radio 1, tres apoyadas en el piso y la cuarta sobre ellas, son todas tangentes entre si. Circunscríbase sobre ellas un tetraedro equilátero de lado a. ¿Cuánto vale a?

26) Dados un número finito de puntos del plano con la propiedad que toda recta que une dos de ellos contiene otro punto de los dados, probar que los puntos son colineales.

27) En un triángulo dado inscribir un triángulo con sus tres lados paralelos a tres líneas dadas.

28) Use los polinomios $x^2 - 2$, $x^2 - 3$, $x^3 - 2$,..., etc. para deducir que $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{2}$ son racionales.

29) Una maestra realiza una encuesta en su grado para saber las preferencias de sus alumnos entre la gramática, la aritmética o la historia. Después que cada alumno elige la materia de su preferencia, la maestra observa que hay un número primo diferente de alumnos que prefieren cada asignatura. Además, si se multiplica el número de interesados en aritmética por la suma de los interesados en gramática o aritmética y se resta 120 resulta el número de interesados en historia ¿Cuántos alumnos hay en cada grupo?

30) Halle tres números enteros consecutivos tales que si se suman las seis fracciones simples asociadas se obtiene un número entero. Halle todas las soluciones posibles (dados a y b, diferentes de cero, las fracciones simples asociadas son $\frac{a}{b}$ y $\frac{b}{a}$).

31) Pruebe que en un triángulo rectángulo, la mediana trazada de un vértice a la hipotenusa mide la mitad de lo que la hipotenusa. Dé una demostración usando un conocido teorema sobre el círculo.

32) En un grupo de 100 alumnos, a 85 de ellos les gusta el fútbol y a 80 el básquet. Además, a 75 les gusta correr y a 70 nadar. ¿Cuál es el número mínimo de alumnos a los que les agradan las cuatro actividades?

33) Pruebe que el máximo común divisor de dos números es igual al máximo común divisor entre la suma y el mínimo común múltiplo de los números.

34) Dé una justificación a la siguiente curiosidad. Dado un número x de 3 cifras forme un nuevo número z repitiendo las tres cifras del número (por ejemplo x = 294, z = 294294). Si se divide este número por 7, el resultado por 11 y finalmente el resultado por 13, se obtiene el número original.

35) En una mesa de billar de longitud ℓ y ancho a una bola es lanzada sin efecto. Luego de tocar sucesivamente una vez cada una de las cuatro bandas, vuelve al punto de partida. Determine la distancia total recorrida por la bola en términos de ℓ y a.

36) Halle el *menor* número con la propiedad de que si el último dígito se coloca al comienzo del número (por ejemplo abc → cba) se obtiene el número original multiplicado por 9.

37) ¿Puede reconstruir la división siguiente? (La solución es única. Justifique).

```
xxxxxxxx |xxx
 xxx      xx8xx
 0xxxx
   xxx
   0xxxx
    xxxx
    0000
```

38) Cinco ladrones se encuentran en una casa y sabiéndose vigilados deciden salir uno por uno, a intervalos. Un detective que los sigue sabe que hay cinco ladrones de los cuales el más alto es el jefe. Dado que el detective sólo puede seguir a uno de ellos una vez que comiencen a salir, cuál es la estrategia más favorable para capturar al jefe y cuál la probabilidad de hacerlo?. Considere luego el caso en que el número de ladrones es n.

39) Determine todas las horas del día en que coindiden las agujas de un reloj (por ejemplo, a las 12 hs.)

40) Un censista visita a un aficionado a la matemática. Luego de preguntarle la edad y otros datos personales el censista pregunta: ¿Quiénes más viven en la casa? obteniendo como respuesta: -"Viven tres personas más. El producto de sus edades es 1296 y su suma es el número de esta casa". El censista piensa y pregunta:- ¿La edad

de alguno de los tres coindide con la suya? Ante la respuesta negativa el censista se retira satisfecho. ¿Cuál es el número de la casa?.

41) Un hombre cobra un cheque en un banco. En la calle el hombre nota que el cajero ha intercambiado el valor de los pesos con el de los centavos. Luego de gastar 5 centavos el hombre observa que tiene exactamente el doble del valor original del cheque. ¿Cuál era éste?.

42) Para resolver mentalmente:

a) Un ladrillo pesa un kilogramo más medio ladrillo. ¿Cuánto pesa un ladrillo y medio?

b) Dos bolas de billar son lanzadas simultáneamente una hacia otra a velocidades constantes de 1/3 y 2/3 metros por segundo respectivamente. Inicialmente se hallan a 2 m de distancia. ¿A qué distancia se encuentran 1/2 segundo antes de chocar?

43) Un hombre baja lentamente por una escalera mecánica en movimiento a velocidad constante, un escalón por vez, llegando a la parte inferior después de dar 50 pasos. Al subir a velocidad constante (cinco veces más rápido que al bajar) un escalón por vez, llega a la parte superior en 125 pasos. ¿Cuántos escalones están a la vista si la escalera se halla en reposo?

44) Cada día, al mediodía, un barco parte de Bahía Blanca hacia Génova y, simultáneamente, un barco parte de Génova a Bahía Blanca. Si el viaje demora exactamente 15 días, ¿Cuántos buques provenientes de Génova encontrará cada buque saliendo de Bahía Blanca durante el viaje?

45) Un ladrón roba una cantidad de manzanas de una huerta. Al salir es interceptado sucesivamente por tres cuidadores, dándoles, a cada uno, la mitad de las manzanas que tiene en el momento más dos manzanas. Si consigue escapar con una manzana, ¿Cuántas robó inicialmente?

46) Tengo el doble de la edad que tu tenías cuando yo tenía la edad que tu tienes. Cuando tu tengas mi edad actual, nuestras edades sumarán 63 años. ¿Cuáles son las dos edades?.

47) Un grupo de exploradores sale de su campamento, recorriendo 100 km hacia el sur, luego 100 km hacia el este y finalmente 100 km hacia el norte, llegando así de regreso al campamento. Suponiendo que la tierra es una esfera perfecta, determine todas las ubicaciones posibles del campamento.

48) Un almacenero desea vender 1 kg de azúcar a dos clientes, pero su balanza funciona incorrectamente (los brazos son ligeramente desiguales). La primera vez coloca una pesa de 1 kg en un platillo y el azúcar en el otro y la segunda vez invierte los platillos. ¿Conviene al almacenero este procedimiento?.

49) Un grupo de 6 alumnos sale a juntar duraznos en una quinta. al cabo de una hora, los alumnos han reunido cantidades diferentes y uno de ellos sólo tiene 2 duraznos. Al observar que un alumno ha reunido mucho más duraznos que el resto, la maestra propone para equilibrar, que éste le dé a los demás una cantidad igual a la reunida por cada uno.
Hecho esto, la maestra comprueba que las cantidades iniciales de duraznos no han cambiado, sino sólo sus dueños. ¿Cuántos duraznos había juntado cada uno?.

50) Dos estaciones A y B se encuentra a 120 Km de distancia. En el mismo instante en que un tren parte de A hacia B a 40 Km/h, otro tren parte de B hacia A a 20 Km/h, por la misma vía.
En el instante de la partida, una mosca parte del primer tren hacia el segundo, a 100 Km/h. Al alcanzar, invierte de inmediato el vuelo hacia el primero, y así sucesivamente continúa volando entre los trenes hasta el

eventual choque. ¿Cuál es la distancia total recorrida por la mosca? ¿Puede hallar la respuesta de dos maneras distintas?

51) El problema de la moneda falsa puede enunciarse como sigue. Se tienen N monedas, una de las cuales es falsa, y ligeramente más liviana o pesada que las restantes, todas idénticas. Se trata de hallar la moneda falsa, y determinar cuál es su defecto (es decir si es más liviana o más pesada) por comparación, mediante una balanza de dos platillos en un número mínimo de pesadas. Por ejemplo si $N = 2$, claramente no hay solución. Si $N = 3$, 2 pesadas bastan: se comparan las monedas 1 y 2. Si $1 = 2$, entonces la 3 es falsa y basta comparar 3 con 1 ó 2 para saber el defecto. Si $1 < 2$ se compara 1 con 3; si $1 = 3$ la 2 es falsa y más pesada, si $1 < 3$, entonces 1 es falsa y más liviana.
Pruebe que si $N = 4$, son necesarias 3 pesadas. Pruebe además que si $N = 12$, también 3 pesadas bastan (!).

52) En el problema anterior, ¿Qué puede decir, si $4 < N < 12$?

53) Pruebe que una casa en la que cada habitación tiene un número par de puertas, posee necesariamente un número par de puertas de entrada.

54) Una bola de 10 cm de diámetro se halla dentro de una caja cúbica cuyo lado es de 10 cm. En el espacio entre la bola y cada uno de los vértices de la caja se coloca una esferita de diámetro d. ¿Cuál es el mayor diámetro posible para las esferitas?

55) Dado un polígono regular de n lados inscripto en una circunferencia de radio 1, calcular el producto de las distancias de un vértice a cada uno de los otros, en función de n. Sugerencia: utilice números complejos.

56) En cierto momento de la historia existen tres grandes potencias que se reparten la tierra. Por razones estratégicas se decide que ninguna nación posea un punto de la esfera terrestre y su antípoda (se supone que la frontera es propiedad común). No existe restricción alguna sobre el número de regiones que cada potencia pueda poseer, es decir que cada nación podría tener una o más regiones distribuidas por el globo. ¿Es tal división posible?

57) Sea $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ un conjunto de 4 elementos de $\mathbb{R}^3$. Supongamos todos de longitud 1 y que además el ángulo entre dos cualesquiera de ellos es siempre el mismo. Mostrar que si $\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ es otro conjunto

con la misma propiedad, entonces existe o una rotación o una rotación seguida de una reflexión que lleva v_j en w_j para $j = 1,2,3,4$. ¿Cuánto vale el ángulo común?. Generalice a n-dimensiones.

En la serie de problemas que aquí presentamos, los numerados del 5 al 9 corresponden a la Olimpíada Brasileña de Matemática y los siete problemas siguientes a la Olimpíada Nacional de Matemática de Chile, ambas realizadas en setiembre de 1990.

58) En el triángulo $\hat{ABC}$ sea $\overline{CM}$ la bisectriz del ángulo $\hat{C}$. Probar que $\overline{BC} + \overline{AC} \geq 2\ CM$. Mostrar que $\overline{AM} = \overline{MB}$ si y solo si $\overline{AC} = \overline{BC}$

59) Sea r una recta paralela al segmento $\overline{AB}$. Sea C un punto arbitrario sobre r. Probar que el perímetro de $\hat{ABC}$ es mínimo cuando $\overline{AC} = \overline{BC}$.

60) Probar que entre todos los triángulos de igual área el de perímetro mínimo es el equilátero.

61) En un tablero 3 x 3 se intenta disponer los números naturales del 1 al 9 inclusive sin repetir ninguno de modo que la suma de cualquier fila sea la misma que la

de cualquier columna. Probar que tal cosa es imposible.

62) Los lados del triángulo T de vértices (0,0), (3,0), (0,3) son espejos. Demuestre que una de las imágenes del triángulo T_1 de vértices (0,0), (0,1) y (2,0) es el triángulo de vértices (24,36), (24,37), (26,36).

63) Sea k un entero positivo tal que $\frac{k(k+1)}{3}$ es un cuadrado perfecto. Demuestre que $\frac{k}{3}$ y $(k + 1)$ son cuadrados perfectos.

64) Una función f definida en el conjunto de los números enteros es tal que $f(x) = x - 10$ si $x > 100$ y $f(x) = f(x + 11)$ si $x \le 100$. Determine el conjunto de valores de la función f.

65) Un juego es disputado por dos adversarios A y B, cada uno de los cuales dispone de diez fichas numeradas de 1 a 10. El tablero de juego consiste de dos filas de casilleros numerados de 1 a 1492 la primera, y de 1 a 1989 la segunda. En la n-ésima jugada $(n = 1,2,3,\ldots,10)$ A coloca su ficha número n en cualquier casillero vacío y B coloca enseguida su ficha número n en cualquier casillero vacío de la fila que no contiene la ficha número n de A. B gana el juego si, después de la décima jugada, ambas filas exhiben los

números de las fichas en el mismo orden relativo. En caso contrario gana A. ¿Cuál de los jugadores tiene una estrategia vencedora?. Si cada jugador tuviera k fichas numeradas de 1 a k, ¿cuál de ellos tendría una estrategia ganadora?. Si en la primera fila hubiera un casillero por cada racional, y en la segunda uno por cada entero, ¿cuál de ellos tendría una estrategia ganadora?

66) Un tetraedro es tal que el centro de la esfera circunscripta a él está dentro del tetraedro. Demuestre que al menos una de sus aristas tiene longitud mayor o igual a la longitud de la arista del tetraedro regular inscripto en la misma esfera.

67) Encuentre la suma de los 120 números 12.345, 12.354, 12.435,..., 54.321 que resultan de efectuar todas las permutaciones de los cinco dígitos 1,2,3,4,5.

68) Encuentre todos los números naturales n tales que $\frac{n+81}{2n-5}$ es un número natural.

69) Sobre cada punto de la recta numérica de la forma a/b (donde a y b representan números enteros que no poseen divisores comunes) se dibuja una circunferencia tangente a la recta en ese punto, de radio $1/2b^2$.

Demuestre que estas circunferencias no se cortan y, que las que corresponden a a/b y c/d son tangentes si y solamente si $ad - bc = \pm 1$.

70) Encontrar el número mínimo de cortes que es necesario realizar para dividir completamente, en cubitos de 1 cm. de arista, un cubo de madera de 4 cm. de arista utilizando una sierra que permite solamente cortes horizontales y verticales, permitiéndose reordenar las piezas después de cada corte.

71) Encuentre todos los pares (x,y) de números racionales que son solución de la ecuación $y^2 - (x - 1)x^2 = 0$.

72) Un niño recibe una cierta cantidad de dinero de su padre. Este dinero lo puede recibir de tres maneras diferentes:

i) Anticipo de 1 peso y el resto en cuotas mensuales de 39 pesos.

ii) Anticipo de 10 pesos y el resto en cuotas mensuales de 11 pesos.

iii) Anticipo de 2 pesos y el resto en cuotas mensuales de 7 pesos.

Determine el monto mínimo a recibir.