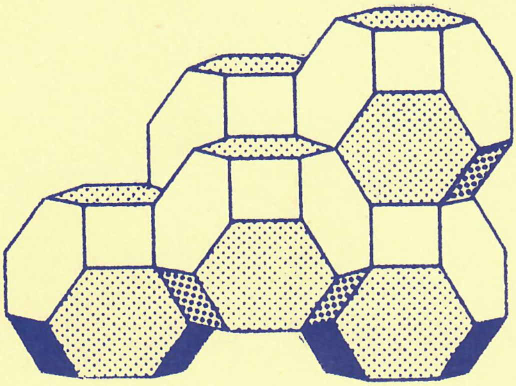
REVISTA DE EDUCACION MATEMATICA

UNION MATEMATICA ARGENTINA
FACULTAD DE MATEMATICA, ASTRONOMIA Y FISICA



PROBLEMAS Y DESAFIOS MATEMATICOS

Nº 2 - 1992

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CORDOBA

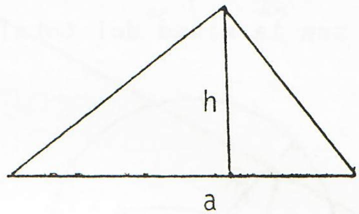
EDITORIAL

Con este boletín, continuamos con la nueva serie de nuestra revista dedicada al planteo de problemas y desafíos matemáticos.

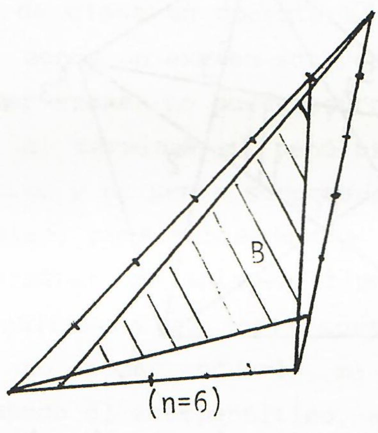
En este número se publican los problemas planteados en los primeros seis volúmenes de la REM y que no fueron incluídos en el anterior boletín, como también algunos otros que el lector encontrará interesantes.

Varios de estos problemas ya han sido resueltos y publicados sus soluciones, pero siempre son bienvenidas las distintas y variadas formas de encarar y resolver una misma situación. Esperamos continuar recibiendo las soluciones que Uds. envían.

1) Cuántos triángulos rectángulos no congruentes hay con una dada hipotenusa *a* y correspondiente altura *h* ? (ver figura)

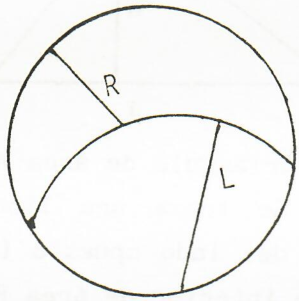


2) Los tres lados de un triángulo de área A son divididos en n partes iguales. Se traza una línea recta de cada vértice al "punto $\frac{1}{n}$" del lado opuesto (ver figura) obteniéndose un triángulo interior de área B. Muestre que si n = 3, entoces B = $\frac{1}{7}$ A. Determine B en función de A cualquiera sea n.

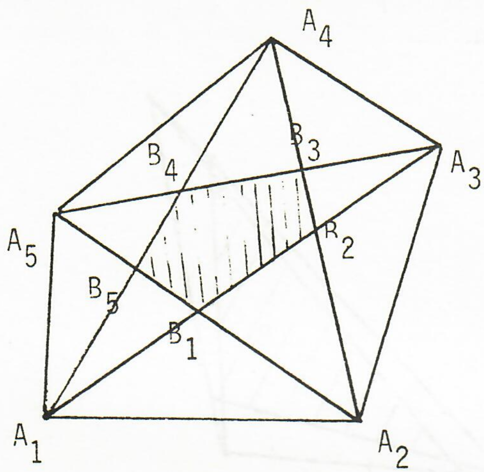


3) Consideremos un corral circular de radio conocido R. En él se encierra un caballo atándolo en un punto del

perímetro con una cuerda de longitud L (ver figura). Se desea conocer L de modo que el caballo pueda moverse sólo en un área que sea la mitad del total.

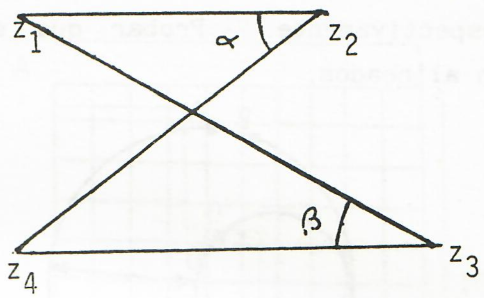


4) En el dibujo



Probar que el polígono A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 es regular si y sólo si lo es B_1, B_2, B_3, B_4, B_5.

5) Sean z_1, z_2, z_3, z_4 cuatro puntos distintos en el plano

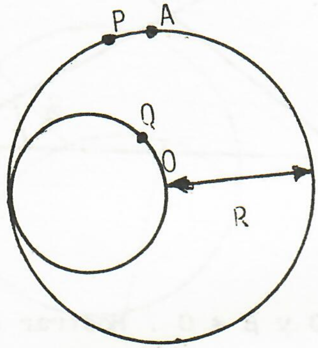


Supongamos $\alpha \neq 0$ y $\beta \neq 0$. Mostrar que los puntos están sobre una misma circunferencia si y sólo si $\alpha = \beta$

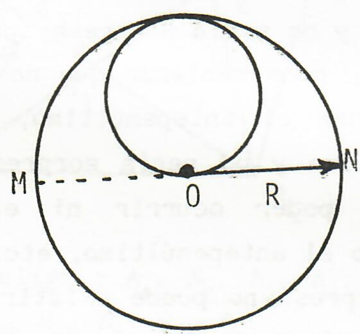
6) El primer día de clase un docente afirma que durante el curso habrá al menos un examen sorpresa. Un alumno argumenta: el primer examen no puede ocurrir el último día de clase, si no, al terminar el penúltimo sabría que debe ocurrir el último y no sería sorpresa; pero entonces tampoco el penúltimo, pues sabiendo que no puede ocurrir el último, al terminar el antepenúltimo, sabría que debe ocurrir el penúltimo y no sería sorpresa. Por el mismo argumento al no poder ocurrir ni el último ni el penúltimo, tampoco el antepenúltimo, etc., etc., por tanto tal examen sorpresa no puede existir. ¿Hay error en el argumento del estudiante?

7) Con los datos de la figura, un par de móviles P y Q parten en el mismo instante desde los puntos A y O respectivamente, ambos con la misma velocidad constante y recorriendo

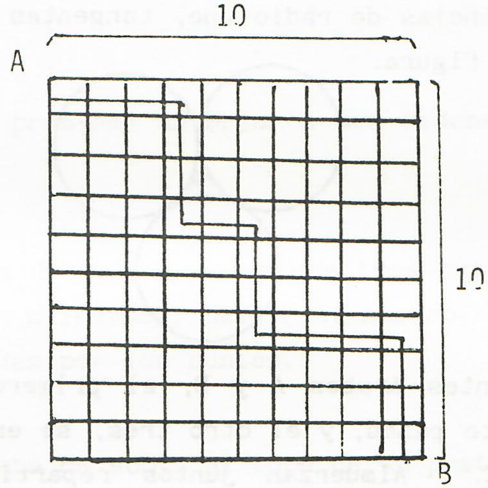
en sentido antihorario las circunferencias externa e interna respectivamente. Probar que en todo momento O, Q, P están alineados.



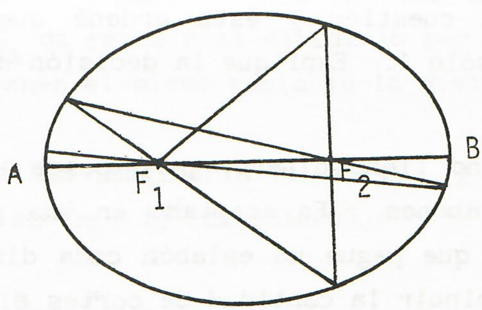
8) Con los datos de la figura imagine el punto O de la circunferencia interior pintado de rojo. La circunferencia interior comienza a rodar sin resbalar sobre la externa. Probar que el punto pintado de rojo se desplaza a lo largo del segmento $\overline{MN}$ ¿Puede reducir este problema al problema 7?



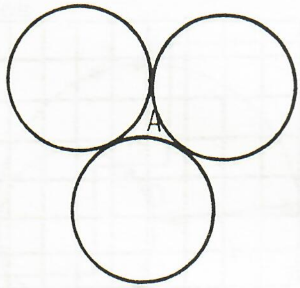
9) En un tablero de damas ¿Cuántas "escaleras" hay desde el punto A hasta el punto B?



10) En una elipse se coloca una fuente de luz en uno de sus focos. Sabiendo que todo rayo de luz que pasa por uno de los focos se refleja pasando por el otro, demostrar que el n-ésimo rayo reflejado se acerca tanto como se quiera al semieje mayor $\overline{AB}$ de la elipse, si se toma n suficientemente grande.



11) Encuentre el área A de la región delimitada por tres circunferencias de radio uno, tangentes como muestra la siguiente figura:



12) Dos viajantes árabes A y B, el primero de los cuales tiene cinco panes, y el otro tres, se encuentran con un tercero C. Almuerzan juntos repartiendo en partes iguales los panes. De éste modo el último les da como retribución por la comida 8 monedas de oro. Cuando llegó el momento de repartirse las 8 monedas se estableció el siguiente diálogo:

A: Dado que yo tenía 5 panes y tú 3, a tí te corresponden 3 y a mí 5 monedas.

B: De ninguna manera, tomemos 4 monedas cada uno, y yo te devolveré un pan.

Como la discusión se prolongaba pidieron a C que decidiera la cuestión y éste ordenó que A tomara 7 monedas y B sólo 1. Explique la decisión de C.

13) Un viajante no tiene dinero, pero posee una cadena de oro de 7 eslabones. Es aceptado en una posada con la condición de que pague un eslabón cada día de estadía. Buscando disminuir la cantidad de cortes el posadero dará de vuelto eslabones ya cortados cada vez que se pue-

da. ¿Cuál es el menor número de cortes que se deben realizar?

14) Generalice el problema anterior a una cadena de n eslabones.

15) Dados n puntos del plano tales que tres cualesquiera de ellos no están alineados, hallar el número total de rectas determinadas por los puntos.

16) Un insecto trata de subir al tope de un poste de 8 pies. De día sube 2 pies y de noche, mientras duerme, se resbala 1 pie. ¿Cuánto tiempo tardará en alcanzar el topè del poste?

17) Sean n, p números naturales con $p < n$. Supongamos tener 2n números naturales $x_1, \ldots, x_{2n}$ tales que $x_1 + \ldots + x_n$ es divisible por 3 y tales que $x_{n+j} = x_j$ para $j = 1, 2, \ldots, n$. Sea $S_k = x_k + x_{k+1} + \ldots + x_{k+p}$ para $k = 1, 2, \ldots, n$.
Denotemos con m_r para $r = 1,2$ la cantidad de índices k tales que S_k da resto r al dividirlo por 3. Mostrar que m_1 y m_2 tienen el mismo resto en la división por 3.

18) Sea i la unidad imaginaria ($i^2 = -1$). ¿Para cuántos valores de n es $(n + i)^4$ un entero?

19) ¿Cuándo es $\sqrt[n]{m} \geq \sqrt[m]{n}$?

20) Un huso en una esfera es la parte de superficie comprendida entre dos meridianos. Demostrar que el área de un huso es el producto del diámetro de la esfera por la longitud del arco de ecuador determinado por el huso.

21) Demostrar que tres puntos colineales distintos no pueden estar sobre una circunferencia de radio finito.

22) Probar que la suma de las medidas de los ángulos de un poliedro convexo es 4 rectos por (V-2) siendo V el número de vértices.

23) Convengamos en medir ángulos en grados sexagesimales. Sea A la medida de un ángulo menor que un recto. Probar que

a) cos(A) es irracional salvo que $A = 0^\circ$ ó $A = 60^\circ$.
b) sen(A) es irracional salvo que $A = 0^\circ$ ó $A = 30^\circ$.
c) tg(A) es irracional salvo que $A = 0^\circ$ ó $A = 45^\circ$.

Ayuda:

i) Compruebe por inducción que

$$2\cos(nA) =$$
$$= (2\cos A)^n + a_{n-1}(2\cos A)^{n-1} + \ldots + a_1(2\cos A) + a_0$$

con $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ enteros

ii) Demuestre que si α es una raíz racional de

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 = 0$$

con $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ enteros, entonces α es un entero.

24) Pruebe que los números cuya expansión decimal se da a continuación son irracionales

$0,1234567891011\ldots$

$0,246810121416\ldots$

$0,357911131517\ldots$

$0,1010010001000010000 0\ldots$

$0,357111317192329313741434751\ldots$ (los primos)

$0,a_1a_2a_3a_4\ \ldots$

donde $a_1 = 1$, $a_i = 1$ si i es primo y $a_i = 0$ si $i \geq 2$ y no es primo.

25) Sea x un número irracional positivo y n un número natural. Probar que existe un natural m tal que

$0 < x - \frac{m}{n} < \frac{1}{n}$

Ayuda: Escriba $nx = a_1 + a_2$, con a_1 natural y $0 < a_2 < 1$.

26) Sea x un número irracional positivo, probar que existen naturales m y n tales que

$$0 < x - \frac{m}{n} < \frac{1}{n^2}$$

27) Sea p un número natural que no es el cuadrado de un número natural. Probar que si m,n son naturales, entonces

$$\left|\sqrt{p} - \frac{m}{n}\right| > \frac{\sqrt{p}}{n^2} \qquad \text{si} \qquad \frac{m}{n} > 2\sqrt{p}$$

$$\left|\sqrt{p} - \frac{m}{n}\right| > \frac{1}{3\sqrt{p}}\,\frac{1}{n^2} \qquad \text{si} \qquad \frac{m}{n} < 2\sqrt{p}$$

28) Sea p un número natural que no es el cuadrado de un número natural. Probar que hay a lo sumo un número

finito de fracciones reducidas $\frac{m}{n}$ tales que

$$|\sqrt{p} - \frac{m}{n}| < \frac{1}{n^3}$$

Encuentre los posibles valores de m.

Analice afirmaciones del mismo tipo para

$$|\sqrt{p} - \frac{m}{n}| < \frac{1}{n^4}, \qquad |\sqrt{p} - \frac{m}{n}| < \frac{1}{n^5}, \ldots$$

29) Si $a_0, a_1, \ldots, a_n$ son números enteros con $a_n \neq 0$ y $\frac{r}{s}$ es una fracción reducida que es raíz de $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$ entonces s divide a a_n y r divide a a_0.

Analice el valor de verdad de la recíproca de esta afirmación.

30) Pruebe que $\sqrt[3]{2} - \sqrt{3}$, $\sqrt[3]{5} - \sqrt{3}$, $\sqrt{2} + \sqrt{3}$, $\sqrt[3]{2} + \sqrt{3}$ son números irracionales.

31) Analizar la validez del siguiente razonamiento

sea $x \in R$,

$x^2 = x - 1 \Rightarrow x^2 - x + 1 = 0 \Rightarrow (x + 1)(x^2 - x + 1) = 0$

$\Rightarrow x^3 + 1 = 0 \Rightarrow x^3 = -1 \Rightarrow x = -1$.

Por lo tanto $1^2 = -1 -1$, o sea $1 = -2$, o sea $3 = 0$.

32) Sea $f: N \rightarrow N$ definida por

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ es par} \\ 3n + 1 & \text{si } n \equiv 1\ (4) \\ 3n - 1 & \text{si } n \equiv 3\ (4) \end{cases}$$

Probar que cualquiera sea n, iterando

$$n \to f(n) \to f(f(n)) \to \ldots$$

en algún momento se obtiene 1. Por ejemplo:

$$14 \to 7 \to 20 \to 10 \to 5 \to 16 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1.$$

<u>Nota</u>. Señalamos un famoso problema abierto: el llamado algoritmo de Siracusa: Sea $S: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$$S(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ es par} \\ 3n + 1 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

"Dado cualquier $n \in \mathbb{N}$, repitiendo la aplicación S se llega alguna vez a 1". Por ejemplo

$$7 \to 22 \to 11 \to 34 \to 17 \to 52 \to 26 \to 13 \to 40 \to 20$$
$$\to 10 \to 5 \to 16 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1.$$

No se sabe hasta el presente si la afirmación es correcta, sin embargo ha sido verificada su validez para todo $n \leq 2^{50}$ por computadoras.

A manera de ejercicio aplicar el algoritmo a $n = 31$.

Notar que si en algún paso se obtiene una potencia de 2 el algoritmo "converge" a 1.

33) Sean $x, y \in \mathbb{R}$

a) Probar que i) $x^2 + xy + y^2 \geq 0$

ii) vale = si y solo si $x = y = 0$

b) Probar que $x^2 - xy + y^2 \geq 0$

con = si y sólo si $x = y = 0$

c) Probar que $x^2 \pm x + 1 > 0$.

34) Probar que $\forall\, a \in Z$, a impar $16 \mid (a^4 - 1)$.

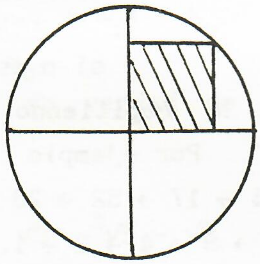
35) Sean $a, b \in R$, $a > 0$, $b > 0$. Probar $a^2 + b^2 = 7ab \Rightarrow$
$\log\left(\frac{a+b}{3}\right) = \frac{1}{2}(\log a - \log b)$

36) En la figura dados:

a: radio de la circunferencia

A: área del rectángulo.

Calcular: el perímetro del rectángulo.



37) Sean m y n impares, $m < n$, $\text{mcd}(m,n) = 1$. Se tienen tres recipientes C_1, C_2, C_3 con capacidad para m, n, y $m + n$ litros, respectivamente. El recipiente C_3 se encuentra lleno de líquido, C_1 y C_2 estando vacíos. Se desea distribuir el contenido de C_3, usando sólo los tres recipientes, de manera que C_2 y C_3 contengan, cada uno, $\frac{m+n}{2}$ litros. ¿Cómo hacerlo? (Sugerencia: considere primero el caso en que $m = 3$, $n = 5$).

38) Si dos cuerdas de una circunferencia se intersectan en ángulos rectos, la suma de los cuadrados de las longitudes de los cuatro segmentos determinados es igual

al cuadrado del diámetro.

39) Sean a, b, c, d números racionales. A un número irracional. ¿Cuándo es el número $\frac{aA+b}{cA+d}$ racional?

40) Construir ejemplos de números irracionales.

41) Encontrar criterios distintos de los cuatro usuales para decidir cuando dos triángulos isósceles son congruentes.

42) Sea $f_1 = f_2 = 1$ y f_n $(n \geq 3)$ tal que

$$f_n + f_{n+1} = f_{n+2}$$

i) Probar por inducción que

$$f_n^2 = f_{n-1}\, f_{n+1} + (-1)^{n+1}$$

ii) Dibujar un cuadrado de lado f_{2n} y recortarlo como indica la figura A, luego pegarlo como indica la figura B.

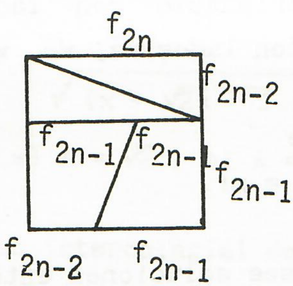


Fig. A

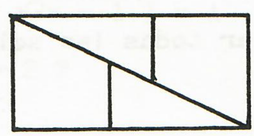


Fig. B

rectángulo de la figura B tiene base $(f_{2n-1} + f_{2n})$ y ura f_{2n-1}, por tanto su área es una unidad menor que la del cuadrado de la figura A. Explicar.

43) Dos circunferencias tienen radios de 8 y 5 unidades respectivamente siendo la distancia entre sus centros de 15 unidades. Calcular la longitud de uno de los segmentos de tangente entre ambas circunferencias.

44) En una elección con 6 candidatos votan 400 personas. Si un candidato tiene más votos que cualquiera de los restantes ¿Cuál es el mínimo número de votos que puede haber obtenido?

45) Pruebe que hay una infinidad de pares diferentes (x,y) de números reales tales que $x^y = y^x$, con $x \neq y$.

46) Halle las dimensiones de un paralelepípedo rectángulo si éstas están expresadas por tres números consecutivos y la diagonal del mismo mide $5\sqrt{2}$.

47) Pruebe que si existe un triángulo con lados a, b, c entonces existe un triángulo con lados $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$.

48) Hallar todas las soluciones de

$$n!(n-1)! = m!$$

49) Pruebe que $x^2 - 3y^2 = 17$ no posee soluciones enteras.

50) Pruebe que $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$ nunca es entero si $n > 1$.

51) ¿Cuál es mayor $\sqrt[9]{9!}$ o $\sqrt[8]{8!}$? Generalice.

52) Probar que números con expresión decimal abcabc ó abab nunca son cuadrados.

53) Hallar la última cifra del desarrollo decimal de 2^{100}.

54) Hallar las 2 últimas cifras de $7^{7^{7^{7}}}$.

55) Hallar el mínimo $n \in \mathbb{N}$ tal que $7^{1665} \mid n!$.

Los problemas numerados del 56 al 59 corresponden a problemas presentados en distintas competencias matemáticas:

56) (Competencia Eötvos 1894). Pruebe que las expresiones $2x + 3y$ y $9x + 5y$ son divisibles por 17 para el mismo conjunto de valores enteros x e y.

57) (Olimpíada Internacional de Matemática 1959)
¿Para qué valores de x es

$$\sqrt{(x + \sqrt{2x - 1})} + \sqrt{(x - \sqrt{2x - 1})} = A$$

dados a) $A = \sqrt{2}$, b) $A = 1$, c) $A = 2$?

58) (Torneo Intercolegial de Matemática - Bs. As. 1970). El producto de un número de 3 cifras por 7 termina en 638. Hallar el número. (Nota de la redacción: tratar de justificar la unicidad de la solución).

59) (Olimpíada Brasileña de Matemática. 1984).

Sea P un punto interior del triángulo ABC. Considere las perpendiculares l_a, l_b, l_c que parten de P sobre los lados a, b y c respectivamente. Sean h_a, h_b y h_c las alturas correspondientes a los lados a, b y c respectivamente. Muestre que

$$\frac{l_a}{h_a} + \frac{l_b}{h_b} + \frac{l_c}{h_c} = 1$$

60) Series

a) Si $0 < a < 1$ calcular $a + 2a^2 + 3a^3 + 4a^4 + \ldots$

b) Hallar $\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \ldots + \frac{(n-1)}{n!} + \ldots$

c) Hallar $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3}{n!}$

d) Evaluar $\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2 + k^2} \right)$

61) Sabemos que la serie armónica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge. Analizar qué sucede con la suma $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ si:

a) los n recorren los naturales cuyo desarrollo decimal no contiene el dígito 9.

b) los n recorren los naturales cuyo desarrollo decimal no contiene ningún bloque de tres ceros consecutivos (por ejemplo $n = 1000$, $n = 100001$).

c) Generalizar b) a otros bloques.

62) Anillos de Boole.

Un anillo asociativo R, se dice booleano, si $x^2 = x$ para todo x en R.

a) Si R es un anillo booleano probar que es conmutativo y de característica 2.

b) Si R es finito y booleano, probar que posee identidad. ¿Y si no es finito?

c) Sea X un conjunto y sea $R = P(X) :=$ conjunto de partes de X. Probar que respecto de $x.y := x \cap y$ (intersección) y $x + y := (x-y) \cup (y-x)$ (diferencia simétrica), R es un anillo de boole.

d) Sea R un anillo con la propiedad que $x^6 = x$ para todo x en R. Probar que R es booleano. (¿Para qué otros n, $x^n = x$ implica booleano?).

e) Sea R un anillo finito. Probar que R es booleano si y sólo si todo elemento excepto uno dado, es divisor de cero.

63) Anillo.

Sea K un cuerpo conmutativo. Sea $Q(K) :=$ la totalidad de sumas de cuadrados en K.

Sea $A \subset K$ la totalidad de elementos x en K con la propiedad que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n + x$ y $n - x$ pertenecen a Q(K). Probar que A es un subanillo de K.

64) Polinomios.

Determinar todos los polinomios $f(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ con $a_i = \pm 1$ $(0 \leq i \leq n,\ 1 \leq n < \infty)$ tales que f(X) tiene todas sus raíces reales.

65) Matrices.

Sean A y B matrices cuadradas en K^{nxn}, K un cuerpo, tales que $A.B - B.A = A$. Probar que A es nilpotente (i.e. $A^n = 0$).

66) Función recurrente: Sea $f(x,y)$ una función de dos variables que satisface

a) $f(0,y) = y + 1$

b) $f(x + 1,0) = f(x,1)$

c) $f(x + 1, y + 1) = f(x, f(x + 1, y))$

cualesquiera sean x, y enteros no negativos. Determinar $f(4,1981)$.

67) Triángulo. Construir un triángulo dados los vértices exteriores de los triángulos equiláteros exteriores que se apoyan en cada lado del triángulo.

68) Hallar un número de 3 cifras que sea igual a la suma de su tercera cifra (es decir la de las unidades) más el cuadrado de la segunda más el cubo de la primera.

69) Hallar todos los números de 4 cifras con las propiedades siguientes

a) la primera y la tercera cifra son iguales.

b) la segunda y la cuarta cifra son iguales.

c) este número más 1 es un cuadrado perfecto.

70) Un número está compuesto de cuatro dígitos. El último es dos veces mayor que el primero; el segundo es la

tercera parte del tercero y la suma del primero y el último es el doble del tercero. ¿Cuál es el número?

71) Un hombre tenía $ 20 y quería comprar 20 animales. ¿Cuántos de cada clase podría comprar si los patos cuestan $ 2, los pollos $ 0.50 y las palomas $ 0.25?

72) Susana tiene solamente 1/6 de la edad de su madre. La edad de la madre cuando es dividida por 2,3,4,6 y 8 deja residuo de un año. Cuando es dividida por 5 no deja residuo alguno. ¿Cuántos años tienen la madre y la hija?