

Revista de Educación Matemática

Comité Editorial

Leandro Cagliero, FAMAF, UNC - CONICET, Argentina

Cristina Esteley, FAMAF, UNC, Argentina

Patricio Herbst, Universidad de Michigan, Estados Unidos

Teresa Krick, UBA - CONICET, Argentina

Juan Carlos Pedraza, UBA, Argentina

Ricardo Podestá, FAMAF, UNC - CONICET, Argentina

Juan Pablo Rossetti, FAMAF, UNC - CONICET, Argentina

Mónica Villarreal, FAMAF, UNC - CONICET, Argentina

Jhony Alexander Villa-Ochoa, Universidad de Antioquia, Colombia

Director

Leandro Cagliero

Vicedirectores

Juan Carlos Pedraza

Mónica Villarreal

Secretaria de Edición

Luisa Isabel Gallardo

Registro Nacional de la Propiedad Intelectual N° 168024

ISSN 0326-8780 (versión impresa)

ISSN 1852-2882 (en línea)

<https://revistas.unc.edu.ar/index.php/REM>

Revista de Educación Matemática

Volumen 33, N° 1 – 2018

ÍNDICE

-
- Editorial 3
 - Curiosidades del 2018 5

ARTÍCULOS

- **EL MATEMÁTICO QUE DESAFIÓ A LOS DIOS**
Christián C. Carman 9
 - ◆ *Nota editorial: Matemático o filósofo* 24
 - ◆ *Nota editorial: El Arenario* 25
 - **USO DIDÁCTICO DEL ERROR: UNA EXPERIENCIA DE AULA**
V. Messina, S. Seminara, S. del Puerto, T. Gil, C. Pano 27
 - **UNA MESA INESTABLE**
Hugo Álvarez 43
 - ◆ *Nota editorial: Algo más sobre mesas inestables* 55
-
- Sección de Problemas 57

También encontrarás curiosidades bajo los títulos *¿Sabías que...?* y *¡Sucesiones al toque!*

Editorial

EN enero de 1967, a los 30 años de edad, Robert Langlands era profesor asociado de Princeton y le escribió una carta de 17 páginas al gran matemático francés André Weil, de 60 años, y le decía:

“Si usted está dispuesto a leerla como pura especulación, le estaré agradecido; si no, estoy seguro de que tendrá a mano un cesto de basura.”

En ella se esbozaba una teoría que proponía una nueva manera de pensar en matemática al sugerir la profunda conexión existente entre dos ramas que antes se consideraban independientes entre sí: la teoría de números y el análisis armónico. Esta teoría se conoce hoy como el Programa de Langlands y es, según gran parte de la comunidad científica, uno de los mayores proyectos de investigación de la matemática moderna.

Robert Langlands fue galardonado con el premio Abel 2018, premio que es otorgado por gobierno noruego y es tan prestigioso como la Medalla Fields, “*por su programa visionario que conecta la Teoría de representaciones con la Teoría de números*”. Esta editorial es muy breve para hablar en detalle sobre el Programa de Langlands, simplemente mencionamos puede pensarse como una enorme extensión del *Principio de reciprocidad cuadrática de Gauss* el cual, dado un primo p y un número r , describe un método para determinar si hay algún cuadrado perfecto que tenga resto r al dividirlo por p .

ESTE número de la *Revista de Educación Matemática* contiene tres artículos. En *El matemático que desafió a los dioses* reproducimos gran parte de la conferencia que el Prof. Cristián Carman ofreció en la Jornada de Visibilización de la Matemática que tuvo lugar durante la Reunión Anual de la UMA del año pasado en Buenos Aires que, conmemorando los 100 años de la llegada de Rey Pastor a Argentina, se organizó junto con la Real Sociedad Matemática Española. En su conferencia, Cristián nos relata detalles de la increíble historia del *Mecanismo de Anticitera*, una especie de planetario portátil que, según estudios del Dr. Carman y otros científicos, data de la época de Arquímedes. Los invitamos a ver la charla en la página de visibilidad de la UMA <http://visibilidaduma.dm.uba.ar/> o en

YouTube. Es apasionante ver cómo el trabajo conjunto de científicos de distintas ciencias (matemáticos, astrónomos, filósofos, arqueólogos, historiadores...) logró comprender en detalle el complejo funcionamiento de esta sofisticada computadora analógica de la antigüedad.

En el trabajo *Uso didáctico del error: una experiencia de aula* encontraremos una propuesta interesante sobre lectura académica y el análisis de errores para la enseñanza de la matemática basada en el planteo de actividades que aprovechen los errores que pueden detectarse en algunos textos de matemática. Este artículo es parte de los resultados de un proyecto sobre alfabetización académica con alumnos de Álgebra y Geometría Analítica de las carreras de ingeniería de la Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Buenos Aires.

Finalmente nos encontraremos con el artículo *Una Mesa Inestable* del Prof. Hugo Alvarez, que muy lamentablemente falleció el 16 de marzo pasado, a pocos días de habernos enviado su trabajo. El Prof. Alvarez, quien ha publicado en otras ocasiones en nuestra revista, fue docente e investigador de la UNSL y tuvo una destacada labor permanente en favor de la educación pública en general. En el Noticiero de la UMA <http://www.union-matematica.org.ar/noticiero/index.php> podremos encontrar una semblanza de su trayectoria. En el artículo que publicamos en este número, Hugo nos presenta de una manera muy instructiva los detalles centrales de la matemática involucrada en la tarea de estabilizar una mesa sobre un piso irregular. La lamentable desaparición física de Hugo no nos permitió realizar las acostumbradas revisiones finales de los artículos aceptados y, junto con su hijo Agustín, decidimos publicarlo casi textualmente como fue enviado a nuestra revista.

Además de la usual sección de problemas encontraremos, por ser el primer número del año, muchas propiedades divertidas del número 2018, varias de ellas son asombrosas.

No quiero dejar de cerrar esta editorial sin recordar que este año la comunidad educativa en general, y en particular la Universidad Nacional de Córdoba, celebra el Centenario de la Reforma Universitaria, un acontecimiento emancipatorio que además de fundar las bases de nuestro sistema universitario nacional, con impacto en toda Latinoamérica, trascendió lo académico y su acción positiva se extendió inmediatamente a numerosos problemas sociales.

Leandro Cagliero

NOTA: Es muy importante para la RevEM contar con la colaboración de ustedes a través del envío de contribuciones de calidad para publicar. Solicitamos enviar los artículos preferentemente a través del sistema en la página web, pero si tienen inconvenientes pueden hacerlo a la dirección de correo electrónico que figura abajo.

Página web: <https://revistas.unc.edu.ar/index.php/REM/index>

Correo electrónico: revm@famaf.unc.edu.ar

Curiosidades del 2018

Todos los números tienen alguna curiosidad, aquí compartimos algunas de 2018.

Expresiones con los dígitos

- 2018 puede ser escrito usando los 10 dígitos de forma descendente de las siguientes maneras

$$2018 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{6 \cdot 5} \cdot 4 \cdot 3 + 2 \cdot 1,$$

$$2018 = (10 + 987 \cdot (6 - 5) + 4 \cdot 3) \cdot 2 \cdot 1,$$

$$2018 = 10 \cdot 9 + 8 \cdot 7 - 6 + 5^4 \cdot 3 + 2 + 1,$$

$$2018 = 98 + 7 \cdot 6 + 5^4 \cdot 3 + 2 + 1,$$

y de forma ascendente como

$$2018 = 1 \cdot 2 \cdot 34 + 5 \cdot 6 \cdot (7 \cdot 8 + 9).$$

- ¡Chau 2017, bienvenido 2018!

$$2018 = 2017^0 + \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{5 + 4 + 3 + 2 + 1} + 0!$$

donde $0! = 1$ es el factorial de 0.

- 2018 puede ser escrito usando sus propios dígitos y las operaciones elementales como sigue

$$2018 = (20 + 1 + 8^0)^2 + (20 + 1 \cdot 8^0)^2 + (2^2 + 0 + 1 + 8)^2.$$

Primos

- 2018 es producto de 2 primos y escrito de atrás para adelante también:

$$2018 = 2 \cdot 1009 \quad \text{y} \quad 8012 = 2 \cdot 4051.$$

Cuadrados, cubos y otras potencias

- 2018 como suma de cuadrados:

$$\begin{aligned}2018 &= 43^2 + 13^2, \\2018 &= 44^2 + 9^2 + 1^2, \\2018 &= 36^2 + 19^2 + 19^2, \\2018 &= 35^2 + 28^2 + 3^2, \\2018 &= 35^2 + 27^2 + 8^2, \\2018 &= 33^2 + 23^2 + 20^2, \\2018 &= 33^2 + 28^2 + 12^2 + 1^2, \\2018 &= 44^2 + 7^2 + 5^2 + 2^2 + 2^2 \\2018 &= 35^2 + 26^2 + 8^2 + 7^2 + 2^2,\end{aligned}$$

y como suma de cuadrados consecutivos!

$$2018 = 7^2 + 8^2 + 9^2 + \dots + 17^2 + 18^2.$$

- suma de cubos y potencias cuartas:

$$\begin{aligned}2018 &= 11^3 + 7^3 + 7^3 + 1^3, \\2018 &= 6^4 + 5^4 + 3^4 + 2^4.\end{aligned}$$

- Además, tenemos las siguientes expresiones

$$\begin{aligned}2018^2 &= 1680^2 + 1118^2, \\2018^2 &= 2016^2 + 88^2 + 18^2, \\2018^2 &= 1472^2 + 1172^2 + 566^2 + 460^2, \\2018^3 &= 1691^3 + 1490^3 + 421^3,\end{aligned}$$

Ternas pitagóricas

- 2018 satisface las siguientes ternas pitagóricas

$$\begin{aligned}2018^2 &= 1118^2 + 1680^2, \\1018082^2 &= 2018^2 + 1018080^2.\end{aligned}$$

Es decir, existen triángulos rectángulos con longitudes de lados enteras, uno de ellos de largo 2018.

Raíces cuadradas

- Usando $\sqrt{3}$ tenemos

$$2018 = \frac{(2 + \sqrt{3})(4 + \sqrt{3})^4 + (2 - \sqrt{3})(4 - \sqrt{3})^4}{2}.$$

2018 a partir de 2017

- $2018 = 2017 + 1$.
- $2018 = \sum_{k=1}^{2017} \frac{2k}{2017} = \frac{2}{2017} + \frac{4}{2017} + \dots + \frac{2 \cdot 2017}{2017}$.
- La raíz cuadrada de 2018 tiene la siguiente elegante expresión en fracciones continuas:

$$\sqrt{2018} = 1 + \frac{2017}{2 + \frac{2017}{2 + \frac{2017}{2 + \frac{2017}{2 + \frac{2017}{2 + \dots}}}}}$$

Año maligno

- Teniendo en cuenta las connotaciones del número 666 y dado que

$$2018 = 666 + 666 + 666 + 6 + 6 + 6 + .666\dots + .666\dots + .666\dots$$
 donde $.666\dots = \frac{2}{3}$, ¿se puede considerar al 2018 como un año maligno?

Sucesión curiosa usando primos

- Consideremos la sucesión a_n cuyo término n -ésimo es el menor número que es producto de 2 primos y a la vez suma de n primos distintos. Los primeros términos son

$$a_2 = 9 = 3 \cdot 3 = 2 + 7,$$

$$a_3 = 10 = 2 \cdot 5 = 2 + 3 + 5,$$

$$a_4 = 21 = 3 \cdot 7 = 2 + 3 + 5 + 11,$$

$$a_5 = 34 = 2 \cdot 17 = 2 + 3 + 5 + 7 + 17,$$

$$a_6 = 49 = 7 \cdot 7 = 2 + 3 + 5 + 7 + 13 + 19,$$

$$a_7 = 58 = 2 \cdot 29 = 2 + 3 + 5 + 7 + 11 + 13 + 17.$$

Resulta que 2018 es el término 33 de esta sucesión. Es decir, $a_{33} = 2018$. Sabemos que $2018 = 2 \cdot 1009$. ¿Se animan a encontrar los 33 primos que suman 2018?

¿Sabías que el número 13.532.385.396.179 tiene una propiedad muy especial!?

Sea $n \geq 2$ un número natural cualquiera y sea $n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_k^{e_k}$ su factorización única en primos, los cuales los tomamos ordenados de menor a mayor. A partir de ésta, nos armamos un nuevo número n' simplemente 'bajando' los exponentes. Es decir, n' se obtiene concatenando los números $p_1, e_1, p_2, e_2, \dots, p_k, e_k$. Por ejemplo, si $n = 6 = 2 \cdot 3$ entonces $n' = 23$, mientras que si $n = 2^5 \cdot 3^4 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11$ entonces $n' = 2534537211$.

Supongamos que comenzamos con un número cualquiera n y construimos el número n' . Buscamos la factorización prima de éste y nos armamos el nuevo número n'' bajando los exponentes de n' ; y seguimos así, hasta llegar a un punto fijo. Obviamente que si llegamos a un número primo, el proceso termina. Por ejemplo

$$9 = 3^2 \rightarrow 32 = 2^5 \rightarrow 25 = 5^2 \rightarrow 52 = 2^2 \cdot 13 \rightarrow 2.213 \text{ es primo.}$$

En 2014, el matemático John Conway conjeturó ('climb-to-a-prime conjecture') que al llevar a cabo el proceso de iteración previo siempre termina en un número primo. Para algunos números todavía no se sabe. Por ejemplo, si uno comienza con el número 20 nadie sabe si el proceso termina en un primo o no. De hecho, Conway ofreció 1000 dólares de recompensa a quien resolviera la conjetura (ver <https://oeis.org/A248380> donde además hay 4 otros problemas para los cuales Conway ofrece u\$s 1000).

Recientemente, en junio de 2017, el matemático aficionado James Davis observó lo siguiente: la factorización prima de $n = 13.532.385.396.179$ es

$$13.532.385.396.179 = 13 \cdot 53^2 \cdot 3853 \cdot 96179.$$

Obviamente que al hacer n' se obtiene el mismo número y por lo tanto el proceso de iteración termina con un número que no es primo. De este modo, la conjetura de Conway es falsa. No sabemos si James Davis ha reclamado justamente su premio.

John Horton Conway es un famoso y carismático matemático inglés (26/12/1937), investigador en diversas áreas como teoría de grupos, teoría de números, teoría de juegos, teoría de códigos y combinatoria, topología y teoría de nudos, entre otras. Es conocido por sus libros y por ser el creador de varios juegos matemáticos (entre ellos el 'juego de la vida'), además de los números surreales. Ha sido galardonado con los premios Berwick Prize (1971), Pólya Prize (1987) Nemmers Prize in Mathematics (1998) y Leroy Steele Prize (2000).

EL MATEMÁTICO QUE DESAFIÓ A LOS DIOSES

Christián C. Carman

Buenas tardes. Estoy sumamente contento de estar en este festival de matemática. Siempre me encantó la matemática. Desde muy pequeño. Recuerdo que, cuando en el secundario, nos enseñaron cómo resolver ecuaciones, me pareció un juego fantástico. Me pasaba horas despejando la x . Por eso, apenas terminé el colegio y pude decidir que iba a estudiar... ¡estudié filosofía!

No me arrepiento. ¡Recordemos que en el portal de la Academia de Platón, probablemente la escuela filosófica más importante de toda la historia, había un cartel que advertía: “No entre aquí quien no sabe geometría”!

Es un gran honor para mí estar acá, en el Centro Cultural de la Ciencia, es un espacio muy lindo. Hace unos días traje a mis hijos al museo. No los podía sacar de ahí. Hasta que vieron la plaza. Después no los podía sacar de la plaza, que también tiene un diseño hermoso.

Hablando de chicos. El año pasado estábamos cenando en familia: mi mujer, María Emilia, enfrente y dos chicos a cada lado de la mesa: Agustín de 10 años, Ana Belén de 8, Juani de 7 y Santiago de 5 años. Se imaginan que las cenas son siempre un caos, porque todos quieren hablar. Entonces tratamos de imponer ciertos rituales, como que el que quiere hablar tiene que levantar la mano, como en el colegio. Ese día Juani, que cursaba en primer grado, estaba desesperado levantando la mano, incluso antes de que diéramos la orden. Cuando lo miramos, con la mano todavía levantada y mirada desafiante, nos ordenó: “Háganme sumas”. Había aprendido a sumar en el colegio y estaba desesperado por demostrar su nueva habilidad. Empezamos a hacerle sumas. Juani, le preguntamos, ¿cuánto es $3 + 2$? Había desarrollado una técnica impresionante para sumar, no sé si se la enseñaron en el colegio. Tal vez es el último grito de la pedagogía en matemática, no lo sé. Pero ponía 3 dedos en una mano, 2 en la otra, y como no tenía con que contar usaba las mejillas. Apoyando sobre sus mejillas una a una la yema de los dedos seleccionados, contaba, primero con los de una mano y luego con los de la otra: 1, 2, 3, 4, ..., 5! Estuvimos un rato largo haciéndole cuentas. Pero enseguida,

sus dos hermanos mayores, Agustín y Ana, se confabularon contra él y sin hablarse -como viejos jugadores de truco- se pusieron de acuerdo para hacerle todas sumas que daban por resultado 7. Él no se daba cuenta hasta que hacía la suma y cuando empezó a notar que todas sumaban 7 se llenaba de bronca porque sabía que lo estaban cargando, pero no podía saber el resultado hasta que concluyera su método de cálculo. Le decían: "Juani, ¿cuánto es $4 + 3$?" Él sumaba, decía "7", y se enojaba. De nuevo, "Juani, ¿cuánto es $6 + 1$?" De nuevo le daba 7 y de nuevo se enojaba. Por supuesto, yo no podría estar a la altura de los chicos. Entonces le dije: "Juani, ¿cuánto es $5 + 7$?" Juani puso 5 dedos en una mano, y quiso seleccionar 7 dedos de otra, pero en seguida se encontró con una gran dificultad. Entonces, me miró fijo y me dijo "¡esa cuenta es imposible!".

Ese problema que tiene Juani, o sea, que su método para contar no le permitía contar más de 10, es un problema que también tuvieron los griegos en la antigüedad. Los antiguos griegos tenían un sistema numérico que les permitía contar hasta cien millones. No podían expresar números más grandes. El que intentó resolver este problema, fue Arquímedes. Ustedes saben que Arquímedes fue un gran genio en matemáticas, probablemente el más grande de toda la historia. Escribió una pequeña obrita que le dedica al rey de Siracusa: *El Arenario*. Algunos dicen que es el primer paper de la historia, porque es una obra de unas pocas páginas que se plantea un problema puntual e intenta resolverlo. Arranca diciendo que hay gente que dice que no existe un número tan grande que permita contar los granos de arena que hay en las playas de Siracusa. Pero Arquímedes afirma. "Yo les voy a mostrar que es posible contar los granos de arena, no los que hay en las playas de Siracusa, ni siquiera en las playas de toda Sicilia, sino los granos de arena que llenan el universo". Entonces toma el tamaño del universo y el volumen de un grano de arena y calcula un número inmenso: la cantidad de granos de arena que entrarían en el universo. Es solo una excusa para desarrollar un sistema numérico mucho más potente. Un sistema que permita expresar números muy, muy grandes.

Ustedes saben que Arquímedes fue realmente un genio, tanto que muchos siglos después un poeta romano llamado Claudio Claudiano, escribió un poema en el que decía que los dioses se sentían nerviosos por Arquímedes. Que le tenían miedo a ese anciano de Siracusa. Y efectivamente, muchas cosas de las que hacía Arquímedes parecían desafiar a los dioses. El salmo 93 dice: "El mundo está firme y no se moverá jamás"; Arquímedes dice: "Denme un punto de apoyo y moveré el mundo". Pero no es por eso que los dioses estaban nerviosos, según el poeta. Ustedes saben también que Arquímedes fue uno de los primeros que logró encerrar ese número tan escurridizo, el número π , un número irracional, entre dos números racionales, entre dos fracciones. Volver racional lo irracional, también es

un desafío a los dioses. Pero tampoco por eso el poeta dice que los dioses le tenían miedo.

El Poema del poeta arranca así:

“Cuando Zeus miró hacia abajo y vio los cielos representados en una esfera de cristal, dijo a los otros dioses: ¿Acaso ha ido tan lejos el poder del esfuerzo mortal? ¿Es la obra de mis manos imitada en una frágil esfera? Un anciano de Siracusa ha imitado en la Tierra las leyes de los Cielos, el orden de la naturaleza y las reglas de los dioses.”

Arquímedes había creado un aparato que reflejaba el cosmos. Un mecanismo que aparentemente se movía reflejando la posición del sol, de la luna y de los planetas. Cicerón nos habla de ese instrumento. Dice que cuando los romanos invadieron Siracusa, los soldados romanos habían recibido la estricta orden de parte de su general, de no hacerle daño a Arquímedes. De tomarlo prisionero, pero sin dañarlo. El general romano, Marco Claudio Marcelo, quería conocerlo en persona, porque lo admiraba profundamente. De todas maneras, un soldado romano mata a Arquímedes en una situación por lo menos confusa. Aparentemente cuando le dijeron a Arquímedes, “levántate que te vamos a llevar prisionero” contestó: “Primero voy a terminar la demostración de este teorema en el que estoy trabajando, recién después los voy a acompañar”. Parece que al soldado no le gustó mucho y lo mató. Fue un terrible error porque, como dijimos, el general romano admiraba profundamente a Arquímedes. De hecho, de todos los tesoros que se pudo llevar de la ciudad, cuando la saquearon, se llevó solo este aparato que había hecho Arquímedes. Cicerón estuvo con el nieto de Marco Claudio Marcelo, el general que había conservado el aparato y éste le mostró cómo funcionaba. Según Cicerón, era una especie de planetario portátil que mostraba la posición del sol, de la luna y las estrellas; y cuando lo hacía funcionar predecía eclipses. Imagínense lo espectacular que debe haber sido ese aparato. ¡Quién podría estar ahí mirando ese aparato, investigándolo, estudiándolo!

Sin embargo, como tantas maravillas de la antigüedad se había perdido para siempre. O tal vez no, porque en 1900 se encontró un barco hundido cerca de la isla de Anticitera, una pequeña isla del Mediterráneo, ubicada entre Creta y Citera. Un grupo de buzos griegos buscaban esponjas -en esa época las esponjas no eran sintéticas-. Los agarró una fuerte tormenta y tuvieron que dirigir la embarcación hacia la costa de la isla. Era Pascua, entonces el capitán le dijo a uno de los buzos “no podemos comer carne, viene el Viernes Santo... ¿por qué no bajas a buscar algunos peces para preparar una cena?” Cuando el buzo bajó se encontró en el fondo del mar un barco lleno de tesoros, aparentemente de la época de los griegos. Encontraron impresionantes estatuas de bronce y de mármol, joyas, muebles y muchos otros tesoros.

En los años 70 vuelve a hacer una expedición el famoso Jacques Cousteau, con el objetivo de encontrar más tesoros. No halló mucho. Pero encontró monedas, que son muy importantes para datar el naufragio. En la antigüedad, cada nuevo emperador sacaba de circulación las monedas del emperador anterior que solía tener grabada su cara y ponía las propias. Así, las monedas duraban solo el período de ese emperador, por eso permiten datar con bastante precisión el naufragio. Una estatua de bronce podía perfectamente tener 200 o 300 años, pero las monedas del barco, tendrían unos pocos. Según el estudio que hicieron de las monedas, probablemente el naufragio fue entre el 70 al 50 A.C. Hace dos o tres años empezó una expedición en el mismo lugar, tratando de encontrar otras cosas y ya encontraron algunas ánforas.

Pero lo que a nosotros nos interesa es otro tesoro que encontraron: un montón de fragmentos de bronce de lo que parece ser una especie de reloj antiguo, llenos de engranajes y de inscripciones en griego. Estas inscripciones nos permiten más o menos datar el mecanismo. Ustedes saben que la caligrafía, la forma en la que escribimos las letras va cambiando con los años. Nosotros, nuestros abuelos y San Martín o Belgrano tenemos caligrafías muy distintas. Hay gente que se aprovecha de esta diferencia y estudiando las formas de las letras a lo largo del tiempo, son capaces de datar un escrito. En este caso particular, no resulta tan fácil porque las inscripciones de este mecanismo son muy pequeñas y talladas en bronce. No tenemos muchas inscripciones parecidas como para compararlas. Pero, según los estudios, serían más o menos del 200 al 100 a.C.



FIGURA 1. El engranaje mayor del mecanismo, aproximadamente 140 milímetros de diámetro.

El primero que se destaca por sus investigaciones acerca del mecanismo es Derek De Solla Price, un británico que trabajó desde los años 50 hasta su muerte en los 80. Trató de descifrar el misterio de este mecanismo: cuál era su estructura, para qué servía, qué mostraba. Para ello logró sacar radiografías de los fragmentos, junto con un colega del museo con el objetivo de ver el interior de esos fragmentos. Ello le permitiría ver los engranajes que están ocultos, en el interior de los fragmentos, cuántos dientes tienen y cómo están conectados. Porque, claro, el museo no permite romper los fragmentos para ver su interior. Así, las radiografías resultaron vitales. Como se ve en la Figura 2, al lado trató de dibujar los engranajes y sus dientes. Una tarea quijotesca. No es fácil a través de una radiografía.

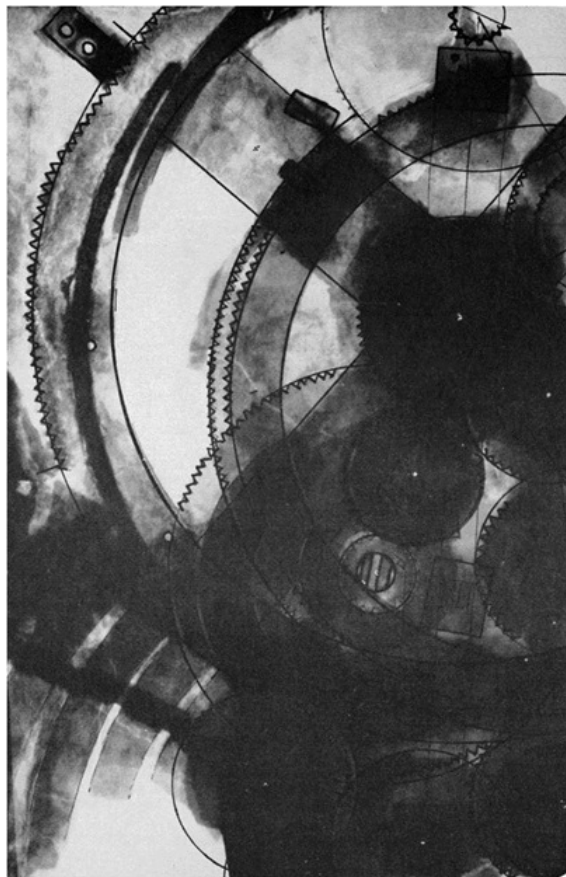


FIGURA 2. Detalle de la radiografía de los engranajes ([1]).

Pero ¿por qué era importante para Solla Price contar los dientes de los engranajes? Si yo tengo un engranaje que tiene 40 dientes que mueve un engranaje que tiene 20 dientes, el segundo dará dos vueltas por cada vuelta del primero. Y si el tercero mueve, a su vez, a uno de 10 dientes, el tercero dará dos vueltas por cada

vuelta del segundo y, por lo tanto, cuatro vueltas por cada vuelta del primero. Así, contando la cantidad de dientes y viendo como están conectados, es posible conocer el período de revolución de un engranaje respecto de otro. Y si ese período tiene algún significado, nos puede dar alguna pista de para qué servía este aparato.

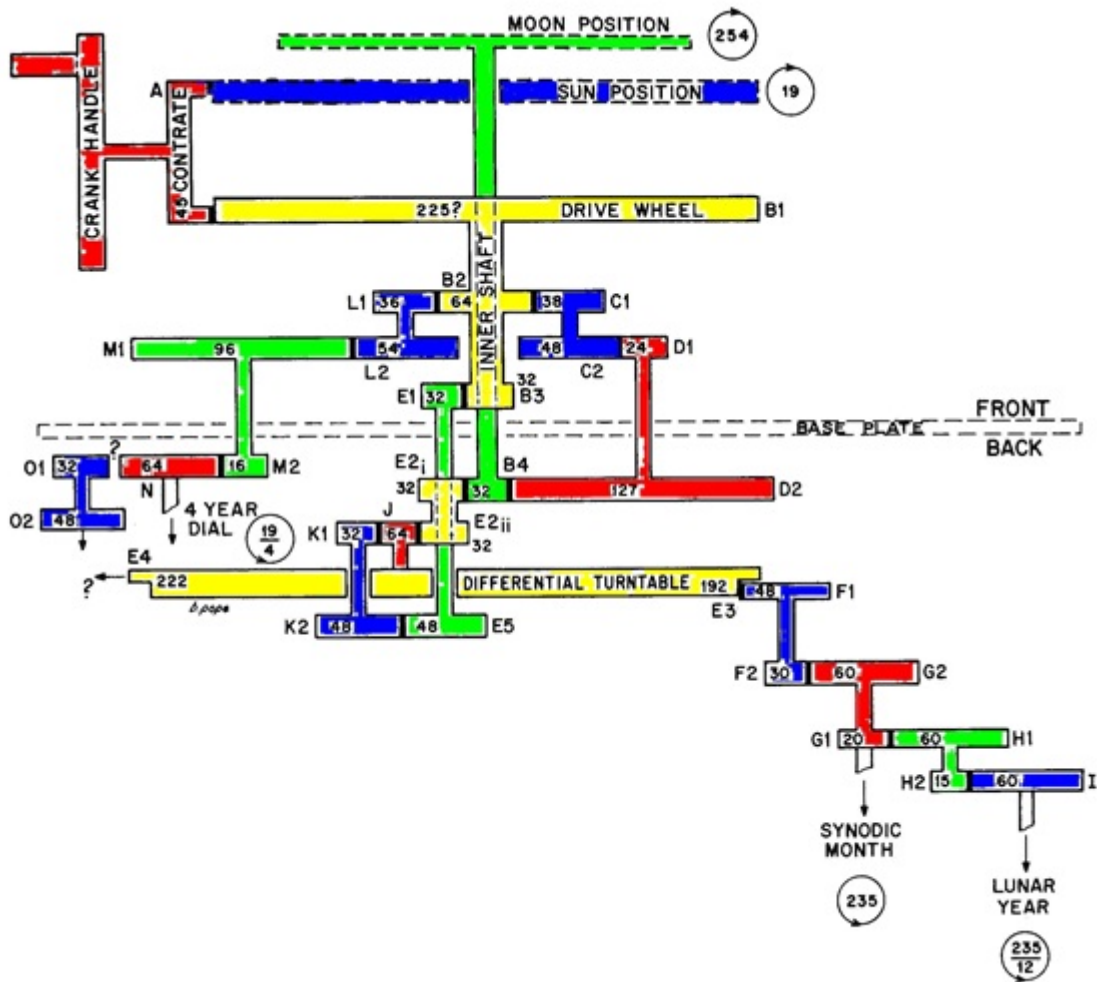


FIGURA 3. Esquema del mecanismo propuesto por Solla Price ([1]).

En la Figura 3 se ve la propuesta de Solla Price, dónde cada segmentito representa un engranaje. El esquema muestra cómo están conectados y la cantidad de dientes que tenía cada uno. No veremos ahora todos los detalles, pero concentremos en una partecita. Solla Price detecta que hay un engranaje de 64 dientes que mueve a uno de 38. El de 38 dientes, es solidario con uno de 48 (es decir están soldados, se mueven juntos). El que tiene 48 dientes mueve a uno de 24, que es

solidario con uno de 127. El de 127 dientes mueve, finalmente, a uno de 32. Curiosamente, el último de 32 dientes y el primero de 64 son concéntricos. Ustedes son matemáticos así que no van a tener problemas en saber cuántas vueltas da el engranaje de 32 por cada vuelta del de 64. Multiplicando y dividiendo la cantidad de dientes de cada uno obtenemos $13,36842105$ que es 254 dividido 19. Y nosotros sabemos que los griegos sabían que la luna da 254 vueltas en el zodiaco cada 19 años, es decir cada 19 vueltas del sol. Por lo cual es muy razonable asumir que si el primer engranaje, el de 64 dientes estaba conectado a un puntero que mostraba la posición del sol en el zodiaco, toda esta cadena de engranajes estaba armada para que otro puntero concéntrico con el primero mostrara la posición de la luna en el zodiaco, dando 254 vueltas cada 19 vueltas del primero.

Esto tiene sentido, porque en uno de los fragmentos se conserva una parte de dos escalas concéntricas: en la interior podemos leer el nombre de un signo del zodiaco: "Libra" y tenemos una división de 30 marquitas, por lo cual suponemos que había 12 divisiones, con 30 marcas cada una, representando los 360 grados en los que ya los griegos dividían el círculo. Cada uno de los 12 sectores representaría un signo del zodiaco. La aguja del sol y la de la luna irían mostrando su posición en esa escala.

En la escala exterior puede leerse "Pajón" y luego "Payni", nombres de meses del calendario egipcio. Esto no implica que el mecanismo tuviera alguna vinculación con Egipto. Los astrónomos griegos utilizaban el calendario egipcio porque era muy cómodo para calcular intervalos de tiempo. El calendario egipcio no tenía años bisiestos. Eso hacía que se les desajustara respecto del sol, pero era cómodo para hacer cuentas. Como nuestro calendario tiene años bisiestos, hay que tenerlos en cuenta cuando calculamos intervalos de tiempo, y eso no es tan fácil. En el calendario egipcio, además, todos los meses tenían 30 días. Había 12 meses de 30 días y luego 5 días al final del ciclo que no pertenecían a ningún mes. Así, cuántos días había desde el primero de Epifi de tal año, por ejemplo, al 18 de Payni de cual año es mucho más fácil que calcular cuántos días pasaron desde el 25 de marzo de 1962 al 14 de febrero de 1974. Porque en el caso de nuestro calendario hay que tener en cuenta cuántos días tiene cada mes, ver si hubo bisiestos, etc. Así, para astronomía, por lo general los griegos utilizaban el calendario egipcio. Por lo cual que esté el calendario egipcio no nos dice nada de un origen egipcio del aparato, más bien confirma que es de los griegos.

El sol da una vuelta por año. Así, el puntero del Sol mostraría al mismo tiempo la posición del sol en la escala interior y el día del año en la escala exterior.

El siguiente que trabajó en el mecanismo es Michael Wright. Una de sus contribuciones más importantes está relacionada con cómo el mecanismo mostraba las fases de la Luna, es decir, cómo indicaba si había luna nueva, cuarto creciente, luna llena o cuarto menguante. En uno de los fragmentos encuentra los restos de un

dispositivo que permitía hacer rotar una pelotita, mitad pintada de negro y mitad pintada de blanco. Al ver la pelotita en una pequeña ventanita, se representaban las fases de la luna.

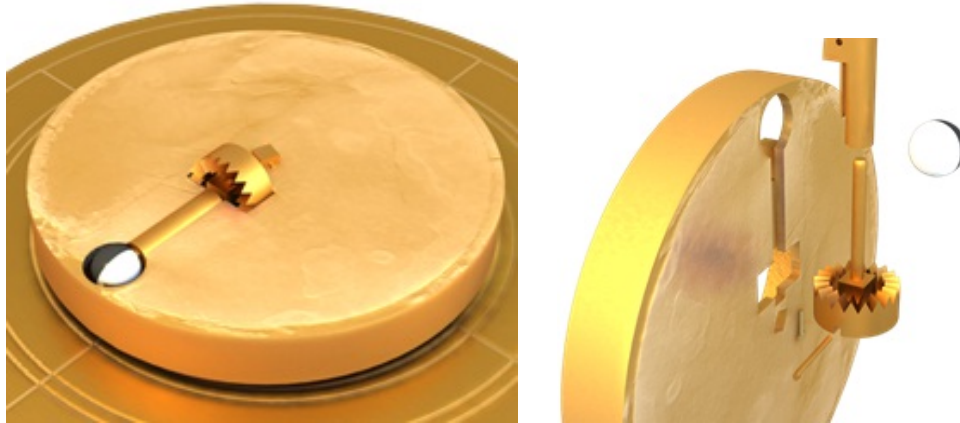


FIGURA 4. Esquema del mecanismo propuesto por Solla Price ([2]).

El tercer protagonista en la historia del descubrimiento de las funciones y estructura del mecanismo es Tony Freeth. Hizo un doctorado en matemática pero se dedica a hacer documentales científicos. Tiene un amigo astrónomo Mike Edmunds que estaba buscando un tema para un tesista y se topa con la obra de Price. Le pareció a Edmunds que, además de un tema interesante para que alguien hiciera un doctorado, era ideal para que se hiciera un documental sobre él. Y le sugiere a Tony Freeth que lo haga. Estamos en el año 2000. Freeth cada vez se entusiasma más en el mecanismo. Arrancó con la idea de hacer un documental que mostrara las investigaciones realizadas sobre esa fantástica máquina, pero él y su equipo terminaron haciendo descubrimientos muy importantes sobre el mecanismo. Armó un equipo internacional y multidisciplinario. Consigue investigadores muy valiosos y muchos recursos, y vuelve a estudiar los fragmentos.

El primer paso fue contactar a una empresa que construye tomógrafos para hacer tomografías a las hélices de las turbinas de los aviones, para que no tengan grietas que puedan generar accidentes, y convencerla de que hiciera un tomógrafo especial para estudiar el mecanismo. Por supuesto, es posible cargar las tomografías en un software y así resulta mucho más fácil contar todos los dientes y ver cómo están conectados los engranajes entre sí. Es una tecnología mucho más potente que las radiografías que había utilizado Price unas décadas antes.

La segunda tecnología que Freeth y su equipo incorporan a las investigaciones del mecanismo es una que se llama mapeo de textura polinómica (PTM). La

desarrolló Tom Malzbender para Hewlett-Packard. Ustedes saben que los dibujos animados tiene dos desafíos muy grandes. Uno es el movimiento del pelo. En general el pelo se mueve, pero de una manera hiper-compleja. Generar una ecuación para el movimiento del pelo que se ajuste lo suficiente a la real como para que el movimiento no parezca artificial es un tremendo desafío. De hecho, es posible medir la calidad de un dibujo animado viendo cómo se mueve el pelo. Si el pelo se reduce a una especie de casquito inerte, que no tiene ningún movimiento, no es de muy buena calidad. Si, en cambio, el pelo se mueve de una manera natural, como en las últimas animaciones de Pixar, la calidad de la animación es muy superior.

Pero otro de los desafíos es cómo se refleja la luz en las distintas texturas cuando la fuente de luz o el objeto se van moviendo. La luz se refleja de manera muy distinta, digamos, en la camisa, la piel, y el pantalón. Si, además, la piel está transpirada, se refleja de otra manera. De nuevo, lograr realismo en el reflejo de la luz es un gran desafío. En esto estaba trabajando Tom Malzbender. Y se le ocurrió una idea genial: si a un muñeco, por ejemplo de Shrek, con las texturas correctas y le sacamos muchas fotos, todas con una cámara fija, pero cada una con un flash a distintos ángulos, obtendremos todos los ángulos posibles de luz. Después se carga eso en un software que él desarrolló y nos podemos hacer una fiesta, porque es posible jugar con absolutamente todas las luces. Su tecnología pudo mejorar mucho ese aspecto de las animaciones. Pero se le tenía reservada otra aplicación, absolutamente impensada. Malzbender asistió a una conferencia en la que un arqueólogo se quejaba porque quería leer las inscripciones en un monumento y las letras estaban tan desgastadas que tenía que ir bien temprano a la mañana, cuando el sol le daba de costado y las sombras le permitían leer un poco, después se iba a un café todo el día y volvía recién al atardecer, cuando la luz le volvía a dar de costado, pero desde el otro lado, para tratar de seguir leyendo la inscripción. En seguida pensó que su tecnología podía servir para leer inscripciones arqueológicas. Y efectivamente resultó muy útil. Hoy ya es una tecnología estándar para los arqueólogos. Tony Freeth se entera de esta tecnología y lo convoca a Malzbender para que la aplique a los fragmentos del mecanismo. El resultado es impresionante: se ha podido leer muchísimas más letras de lo que hasta ese momento se había logrado.



FIGURA 5. Reconstrucción del mecanismo según Tony Freeth y su equipo ([3])

Con estas nuevas tecnologías ellos propusieron una nueva reconstrucción del mecanismo. Sería más o menos del tamaño de una caja de zapatos. Una caja de madera lo protegía, con una tapa adelante y una tapa atrás. En la parte de adelante están las dos escalas concéntricas, la del zodiaco y la del calendario egipcio y sobre ellos giraría el puntero del Sol y el de la Luna que tendría, además, la pelotita que mostraba las fases de la Luna. Todo esto, como vimos, ya había sido descubierto. Pero ellos encuentran que la cadena de engranajes, que ya hemos visto, que va desde el engranaje de 64 dientes vinculado con el puntero del Sol al del 32 que movía el puntero de la Luna era, en realidad, mucho más compleja. En realidad, el engranaje de 127 dientes no mueve al de 32 que terminaba en el puntero de la Luna, sino a otro engranaje de 32. Éste mueve a su vez a uno de 50 dientes, que mueve a otro de 50, que mueve a otro de 50, que mueve a otro de 50 y el movimiento de este último sube a través de un eje interno y mueve a un engranaje de 32 dientes, que mueve a su vez a otro de 32. Recién este último es el que mueve el puntero de la luna. Ahora, todos los pares de engranajes que se mueven entre sí tienen la misma cantidad de dientes: 50 y 50 dos pares y otro par con engranajes de 32. Esto es tremendamente complicado de descifrar porque al tener la misma cantidad de dientes, no cambia el período de rotación en absoluto. ¿por qué el que diseñó el mecanismo no colocó el puntero en el primero de 32, como había propuesto Solla Price. ¿Por qué agregó estos seis engranajes que no cambian el período?

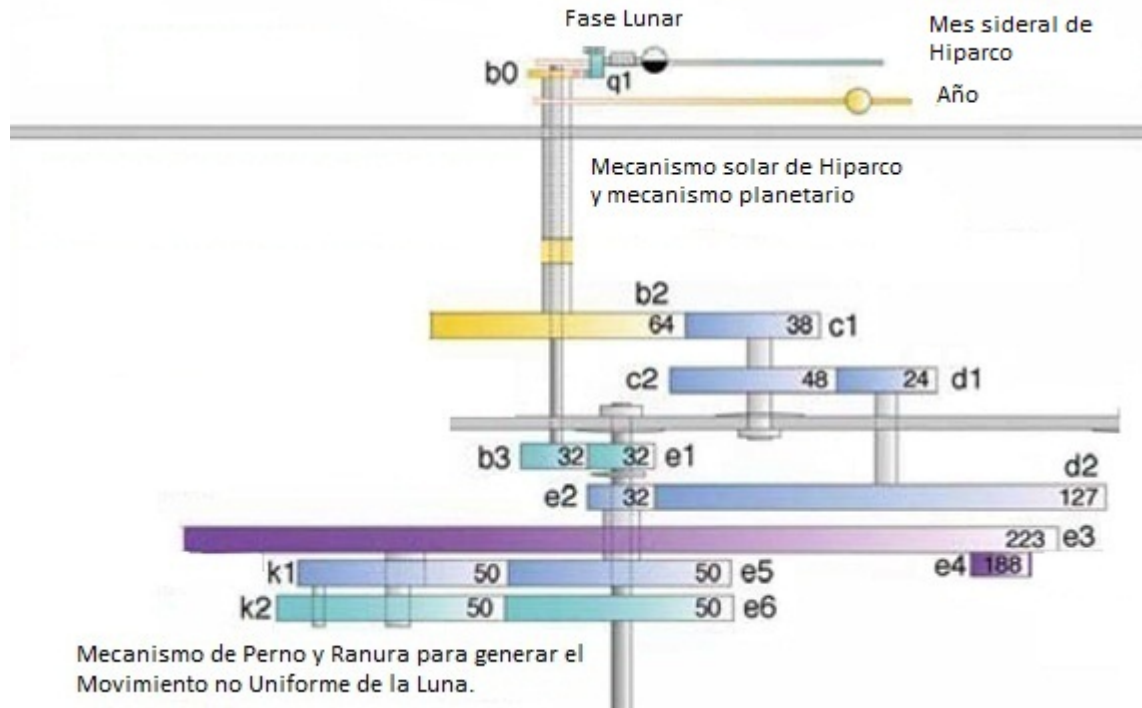


FIGURA 6. Esquema del sistema de engranajes según Tony Freth y equipo.

La gran genialidad de Freeth consiste en descubrir para qué servía esto. El secreto estaba en cómo están conectados dos engranajes de 50 dientes. El engranaje de arriba tiene un pequeño perno que engancha en una ranura que tiene el de abajo y lo hace girar, como nuestro dedo índice hacía girar el disco de los viejos teléfonos. Giran, por lo tanto, con el mismo período. Pero, aunque parecen concéntricos, los ejes están ligeramente corridos. Eso genera que el engranaje que es movido, el que tiene la ranura, gire al mismo período que el que mueve, pero que vaya variando su velocidad. Que no vaya a una velocidad constante.

Los griegos sabían que la luna no va a una velocidad constante. Este modelo mecánico reflejaba lo que ellos conocían de la luna y hacía que la aguja de la luna no fuera a una velocidad constante. Aceleraba cuando la luna va más rápido y desaceleraba cuando la luna va más despacio. ¡Recordemos que estamos en el siglo 2 a.C.!

La otra gran contribución del equipo de Freeth es haber comprendido las características fundamentales de la parte trasera del mecanismo. Ellos descubren que atrás había dos grandes relojes en forma de espiral.

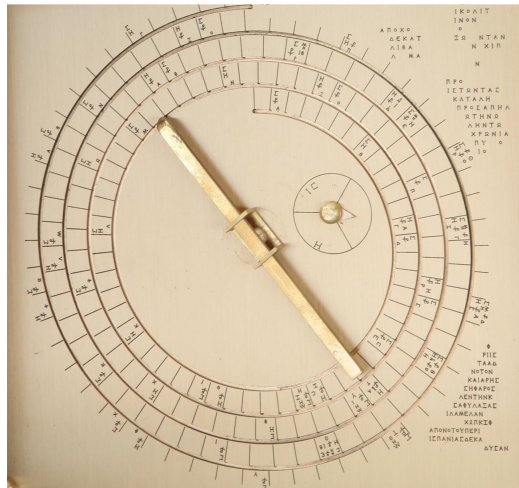


FIGURA 7. Detalle de la parte posterior del mecanismo en el que se observa el predictor de eclipses ([3]).

El de abajo es un predictor de eclipses. Los eclipses se repiten cada 223 meses lunares (unos 18 años, 10 días y ocho horas). Ello quiere decir que si hoy sucede un eclipse a las 13 del mediodía, habrá otro muy parecido dentro de 223 meses, pero a las 20 horas. El espiral está dividido en 223 celdas, cada una representa un mes. La mayoría está vacía, pero cuando hay una inscripción, ésta indica que va a suceder un eclipse. La inscripción nos informa si el eclipse será solar o lunar, si lo vamos a poder observar (por ejemplo, un eclipse lunar que sucede de día no es observable) e, incluso, a qué hora sucedería. Hace unos pocos años, además, descubrieron que también informaba de qué color se vería la Luna en los eclipses lunares. Dijimos que los eclipses se repiten cada 223 meses, pero con un atraso de 8 horas. Por lo tanto, las horas de los eclipses que aparecen en las inscripciones se desactualizarían de un período a otro. Para evitar eso, el mecanismo contaba con un pequeño relojito subsidiario que daba una vuelta cada tres ciclos y le indicaba al usuario si tenía que sumarle 8 horas 16 horas o no sumarle nada a la hora que aparecía en las inscripciones.

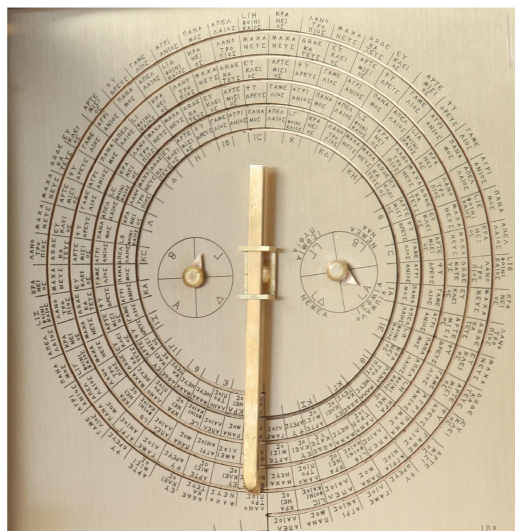


FIGURA 8. Detalle de la parte posterior del mecanismo en el que se observa el calendario luni-solar ([3]).

El espiral de arriba es un calendario lunisolar que reparte los 235 meses en 19 años. Cada una de las celdas indica el nombre del mes, junto con otros datos relevantes. Los punteros de estos diales en forma de espiral funcionaban como las púas de los viejos tocadiscos. La púa, al girar, iba recorriendo las distintas vueltas de la espiral, señalando primero la primera vuelta, después la segunda, la tercera, la cuarta y cada 19 años el usuario tenía que tomarse el trabajo de sacar la púa y volver a acomodarla al principio del espiral.

El calendario lunisolar que el mecanismo incorporaba tenía un problema. Así como nosotros tenemos que agregar un día cada cuatro años, en los años bisiestos, este calendario exigía que se omitiera un día cada 4 ciclos -es decir cada 76 años-. Pero quién se iba a acordar de omitir un día cada siete décadas y pico. Para eso el mecanismo contaba con otro relojito que le indicaba al usuario que tenía que omitir un día.

Pero tenía, además, otro relojito subsidiario. Este último es fascinante, porque daba una vuelta cada 4 años y le indicaba al usuario ¡cuándo iban a ser las olimpiadas!

¿Se trata del mecanismo que Cicerón nos dice que hizo Arquímedes? ¿el mismísimo aparato de Arquímedes se ha conservado hasta hoy por un capricho del destino que quiso hacer naufragar dos embarcaciones griegas en el mismo lugar con unos 2000 años de diferencia? La verdad es que no estamos seguros. Hay algunos indicios que nos llevan a pensar que podría ser el de Arquímedes. Hay otros que nos hacen pensar que si no es el de Arquímedes puede ser la versión

2,0 o 3,1 del mecanismo de Arquímedes. Está claro que un mecanismo con esta complejidad, no es el primero que uno hace. Tiene aplicaciones, tiene detalles que lo acercan más a la última versión del Iphone que a los viejos movicomms que teníamos a principio de los años noventa. Por ejemplo, nadie pondría en el primer modelo un movimiento irregular de la luna, eso seguro que aparece en una segunda o tercera versión.

Según la mitología griega, Salmoneo era un tirano que se la creía tanto, que desafiaba a Zeus. El sostenía que era más importante que Zeus. Y se hacía adorar por sus súbditos como si fuera Zeus. Parece que cuando Zeus se movía hacía ruido ensordecedor, parecido a los truenos. De la misma manera que nosotros cuando éramos chicos poníamos en las bicicletas bombitas de agua que, al golpear con los rayos simulaban el ruido de un motor, Salmoneo, había hecho poner un dispositivo que hacía que, cuando se moviera, generara un ruido semejante al de los truenos. Era alguien que desafiaba a Zeus. Pero no es Salmoneo el que inquieta a los dioses, según el poeta, sino el Anciano de Siracusa.

El poema de Claudio Claudiano concluye diciendo:

"Alguna influencia dentro de la esfera dirige los diferentes cursos de las estrellas y acciona la masa real con movimientos definidos. Un falso zodiaco se mueve por sí solo a la largo del año y una luna de juguete crece y mengua mes por mes. Ahora la atrevida invención se alegra de hacer que su propio cielo gire y pone a los astros en movimiento por el ingenio humano. ¿Por qué debería ofender, el inofensivo Salmoneo y su trueno simulado? Aquí la débil mano del hombre ha demostrado ser rival de la Naturaleza"

Hay otro poema que siempre me gustó. Es de un astrónomo griego, el más grande de toda la antigüedad y probablemente uno de los más grandes de toda la historia: Claudio Ptolomeo. No conocemos prácticamente nada de su vida, de lo que le gustaba, de lo que añoraba, de lo que lo motivaba. Sin embargo, este poema se ha conservado. Con ese poema en homenaje a Ptolomeo me gustaría terminar. Dice así:

"Yo sé que mis días están marcados por la muerte pero cuando investigo los astros que giran sin cesar mis pies ya no pisan más la tierra y al lado del mismísimo Zeus reclamo la parte que me corresponde de la inmortalidad."

Muchas Gracias.

Referencias

- [1] Derek De Solla Price. *The Antikythera Mechanism: A Calendar Computer from ca. 80 B.C.* Transactions of the American Philosophical Society Vol. 64, No. 7 (1974), pp. 1-70.
- [2] Copyright: Marcelo Di Cocco y Cristián Carman.
- [3] Copyright: K. Efstathiou, Aristotle University of Thessaloniki.

CHRISTIÁN C. CARMAN
Universidad Nacional de Quilmes (UNQ).
CONICET, Argentina.
✉ ccarman@gmail.com

Recibido: 17 de marzo de 2018.
Aceptado: 26 de marzo de 2018.
Publicado en línea: 11 de mayo 2018.

Matemático o filósofo

Nota editorial por Juan Carlos Pedraza

CHISTIÁN Carman nos cuenta en su charla con cierta ironía que estudió filosofía por su gusto por las matemáticas. Sin embargo, los vínculos entre matemática y filosofía son muy estrechos a lo largo de la historia. Se sabe muy poco de Pitágoras, uno de los matemáticos más célebres de la antigüedad y de toda la historia. Los pitagóricos eran una comunidad mística muy cerrada dedicada al estudio de la filosofía (amor por la sabiduría) y la matemática (aquello que se aprende). De hecho, estas dos palabras se suponen acuñadas por Pitágoras.

LA siguiente anécdota, tal vez apócrifa, muestra el carácter de los pitagóricos y este estrecho vínculo entre filosofía y matemática: durante unos juegos olímpicos, León, príncipe de Philius, le preguntó a Pitágoras cómo se describiría a sí mismo. Pitágoras respondió:

La vida, príncipe León, bien podría compararse con estos juegos públicos, pues entre la enorme muchedumbre aquí reunida, algunos vienen atraídos por la adquisición de ganancias, otros guiados por la esperanza y la ambición de fama y gloria. Pero entre ellos hay unos pocos que han venido a observar y a entender todo lo que aquí sucede.

*Lo mismo ocurre en la vida. A algunos los influye el amor a la riqueza, mientras que otros son guiados ciegamente por el loco anhelo de poder y dominación, pero algunos se entregan a descubrir el significado y propósito de la vida misma. Ellos buscan develar los secretos de la naturaleza. Estos últimos son a los que yo llamo filósofos, pues aunque ningún hombre es completamente sabio en todos los aspectos, ellos pueden amar el conocimiento como ningún otro. Príncipe, **soy un filósofo.***

SON muchos los matemáticos que han sido filósofos famosos o a la inversa. Vayan como ejemplos de una larga lista, además de Pitágoras, los nombres de René Descartes (1596–1650), Blaise Pascal (1623–1662), Gottfried Leibniz (1646–1716) y el más reciente Bertrand Russell (1872–1970).

El Arenario

Nota editorial por Juan Carlos Pedraza

ARQUÍMEDES ES, sin duda, uno de los genios más grandes de todos los tiempos. *El Arenario* es una obra de divulgación donde trata de hacerle entender a Gelón, rey de Siracusa, un método que él ha desarrollado para expresar números sumamente grandes.

"Algunos piensan, rey Gelón, que el número de los granos de arena es infinito en multitud; y con arena me refiero no sólo a la que existe alrededor de Siracusa y del resto de Sicilia, sino también a la que se encuentra en cada región habitada o deshabitada. También hay algunos que, sin considerarlo infinito, piensan que no ha sido nombrado ningún número lo suficientemente grande como para exceder su multitud." [1]

Arquímedes se propone en esta obra, contar los granos de arena necesarios para llenar el Universo. Se enfrenta con dos problemas.

LA primera dificultad que tuvo que superar es que el sistema de numeración existente podía expresar solo números menores a una *miríada* (10.000). Mediante la idea de pensar en "miríadas de miríadas", Arquímedes inventa un nuevo sistema de numeración, que le permite llegar a $10^4 \cdot 10^4 = 10^8$ (una miríada de miríada). No se detuvo allí: a los números menores a 10^8 los llamó de *primer orden* y al número 10^8 lo consideró la unidad de los números de *segundo orden*. Así se llega a $10^8 \cdot 10^8 = 10^{16}$ (una miríada de miríada de segundo orden). De la misma manera obtuvo los números de *tercer orden*, etcétera. A estos órdenes se los conoce como las "octadas de Arquímedes". Con sus octadas llegó a una miríada de miríadas de órdenes y obtuvo el increíble número

$$(10^8)^{(10^8)} = 10^{8 \cdot 10^8}.$$

Tampoco se detuvo allí: a estos números los llamó del *primer período* y el $10^{8 \cdot 10^8}$ pasó a ser la unidad de los números del *segundo período* comenzando un nuevo proceso exponencial que lo llevó a una mirada de miríadas de períodos. Es decir:

$$((10^8)^{(10^8)})^{(10^8)} = 10^{8 \cdot 10^{16}}$$

EL segundo problema a resolver era "medir" el diámetro de un Universo que imaginaba esférico. Para ello utilizó el modelo heliocéntrico de Aristarco

(que quedaría sepultado en el olvido con Ptolomeo, hasta la llegada de Copérnico, dos mil años después).

Sin entrar en los detalles de los cálculos, con estas suposiciones basadas en el trabajo de Aristarco, su padre, el astrónomo Fidias y el propio Arquímedes, llegó a la conclusión de que el diámetro del Universo era de unos 10^{14} estadios (unos 2 años luz) y que para llenarlo no se necesitaban más de 10^{63} granos de arena.

TERMINA Arquímedes su trabajo diciendo:

"Concibo que estas cosas, rey Gelón, le parecerán increíbles a la gran mayoría de las personas que no han estudiado matemáticas...Y fue por esta razón que pensé que el tema no sería inapropiado para su consideración."

Referencias

- [1] Heath, T. L. *The Works of Archimedes*. Cambridge. The University Press, (221 – 232) 1897.

USO DIDÁCTICO DEL ERROR: UNA EXPERIENCIA DE AULA

V. Messina, S. Seminara, S. del Puerto, T. Gil, C. Pano.

§1. Introducción

Uno de los obstáculos con los que se encuentra un estudiante para comprender un asunto matemático tiene que ver con la aparición de los que comúnmente se denominan errores. Éstos pueden ser desde la falta de una tilde necesaria sobre la letra de una palabra hasta afirmaciones sin sustento lógico, pasando por cálculos incorrectos y razonamientos inesperados. Los alumnos comenten errores en los exámenes, en los escritos que producen o presentan, y en las respuestas a las preguntas que, como docentes, les hacemos.

Pero no sólo los estudiantes cometen errores: los profesores no estamos exentos de hacerlo y también los libros de texto los contienen.

Desde el año 2013 llevamos a cabo un proyecto sobre alfabetización académica con alumnos de Álgebra y Geometría Analítica, asignatura del primer año de las carreras de ingeniería de la Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Buenos Aires. Para realizar una actividad en el marco de ese trabajo, elegimos el capítulo sobre secciones cónicas de un libro de texto (Kozak, Pastorelli, y Vardanega, 2007), con la intención de que los estudiantes lo leyeran, para luego realizar algunas tareas de escritura. Al revisarlo nosotros para preparar la actividad, descubrimos errores en una cantidad que nos llamó la atención; muchos de esos errores eran de tipeo, pero también encontramos algunos errores de cálculo, omisiones, etiquetas equivocadas en algunos gráficos, etc. Nos preguntamos qué hacer con esos errores, y cómo podrían incidir en la lectura comprensiva que debían hacer nuestros alumnos. Comenzamos entonces a indagar sobre los errores en libros de texto y nos encontramos con que son más frecuentes de lo que pensamos.

El tema tiene, incluso, trascendencia en los medios de comunicación. Por ejemplo, Excélsior, el portal de noticias líder en México, publicó el 9 de agosto de 2013:

Los libros de texto que el próximo 19 de agosto recibirán los 26 millones de alumnos de preescolar, primaria y secundaria del país tienen imprecisiones que van desde errores ortográficos y dedazos, hasta instrucciones incorrectas.

Tal como lo señaló el pasado 30 de julio la subsecretaria de Educación Básica, Alba Martínez Olivé, los textos que son la base académica para las clases diarias de los niños y en los que se basan los maestros "tienen defectos", porque no sólo hay palabras mal escritas, sino que también presentan errores de diversos tipos (Hernández, 2013).

La edición en línea de La República, un conocido diario peruano, publicó el 12 de mayo del mismo año:

Denuncian errores en libros de matemática en colegios privados de nuestro país.

Según Panorama, libros elaborados por el Grupo Editorial Córdova tienen cuantiosos y groseros errores en sus textos escolares. Un reportaje de Panorama **denunció la calidad** de la serie de libros "Mentemati", del **Grupo Editorial Córdova**, para alumnos de todos los niveles de educación primaria. En estos libros se ha encontrado gran cantidad de **errores matemáticos y ortográficos** en casi **todas las páginas**. (Redacción LR, 2013; las negritas son del original).

También en el ámbito académico se ha estudiado e investigado el tema. En un artículo de Fernández Palop, Caballero García, Fernández Bravo y Cela (2013) se puede leer:

Analizando libros de texto de Matemáticas de 6º de Educación Primaria de las cuatro editoriales más utilizadas en la Comunidad de Madrid, encontramos lo siguiente:

En la exposición de contenidos, vemos errores de concepto, descripciones ambiguas de algoritmos, contenidos en los que se han omitido condiciones de restricción y aparecen como generales...

En los ejercicios resueltos, encontramos respuestas en las que el razonamiento que se lleva a cabo es contrario al razonamiento lógico, o bien que se pretende aplicar un concepto erróneo...

Por último, en los ejercicios propuestos, vemos problemas mal definidos (Noda Herrera, 2000; Simon, 1973), que pueden ser interpretados de varios modos con distintas soluciones y en la guía didáctica aparece una única solución; o que carecen de los datos necesarios para ser resueltos y en la guía didáctica se utilizan dichos datos; o bien en los que aparecen símbolos matemáticos utilizados con un significado distinto del que la matemática dicta, o cuyo enunciado es absurdo o sin solución y en la guía didáctica aparece una solución... (p. 133).

Estos últimos autores exponen ejemplos de errores encontrados, justifican en cada caso su condición de error y los ordenan según una serie de características.

Beyer (2014), en un extenso artículo acerca de los errores, malentendidos y obstáculos en los procesos de enseñanza y aprendizaje, escribió:

Si examinamos los textos escolares de matemáticas es posible que nos encontremos muchas sorpresas. Una de ellas es hallar en muchos de ellos un buen número de errores, alguno de los cuales incluso son de tipo conceptual. Muchos más son los malentendidos; y mayor aún son las deficiencias didácticas presentes en una buena cantidad de textos en uso en las aulas venezolanas (p. 15).

Este autor muestra una serie de casos donde exhibe los errores y explica en qué consiste la equivocación. También presenta varias clasificaciones de los errores y expone algunas estrategias para enfrentarlos con los alumnos.

El error es intrínseco a toda producción humana y no puede soslayarse su presencia. En los procesos de enseñanza y aprendizaje, docentes y alumnos convivimos con el error.

En una práctica educativa tradicional, que pretende dirigir sus acciones fundamentalmente hacia la obtención de resultados exitosos, el error es considerado como algo punible, que debe erradicarse; es un estorbo para alcanzar la meta cuando lo que importa es el resultado. De la Torre (2013) propone, sin embargo, una visión diferente:

Otra cosa es que veamos el aprendizaje, la formación, como un proceso en el que la característica principal sea la indeterminación. En este sentido, el error acompaña al proceso. Las intervenciones del profesor no pretenden allanar el camino de dificultades, ni evitar los errores, ni provocarlos, **sino utilizarlos cuando surgen** (p. 32; las negritas son nuestras).

Visto de este modo, y en lo que respecta a las producciones de los alumnos, el error adquiere las características de un "signo", un "llamado de atención" que amerita una consideración más positiva, como revelador de dificultades y orientador a la hora de tomar decisiones sobre la introducción de cambios en los procesos de enseñanza y aprendizaje. La utilización didáctica del error como situación de aprendizaje está en sintonía con esta orientación, y son numerosos los trabajos de investigación sobre el uso positivo de estos errores. En particular, miembros de nuestro grupo de trabajo han realizado varias experiencias en este sentido (del Puerto et al., 2004, 2005, 2006).

Pero como hemos señalado, los errores no son patrimonio exclusivo de los estudiantes, los errores en los libros de texto parecen ser inevitables. Errores de todo tipo escapan a los correctores, en la vertiginosa carrera por publicar las obras que demanda un sistema educativo en permanente expansión. Los imperativos de productividad y competitividad han alcanzado también a la industria editorial. Este negocio no evadió la lógica ecuación "deducción de costos y aumento de la producción = mayores ganancias" y, como consecuencia, se debilitaron los controles de calidad editorial (Senz Bueno, 2005).

Ante esta realidad, varios autores (Whiting, 1991; Slisko, 1995; Campanario, 2001, 2003) han sugerido sacar provecho de estos errores utilizándolos como elementos de trabajo en el aula, para estimular el desarrollo de capacidades metacognitivas de control y autoevaluación de la comprensión. Macías et al. (2007) pasan revista a algunos de estos trabajos. En términos más generales, Briceño (2009), al referirse al uso didáctico del error, realiza una interesante síntesis:

Desde la perspectiva constructivista y cognitivista, el error es una importante fuente de aprendizaje en tanto sirva como catalizador de la duda, la autocrítica, la reflexión, el desequilibrio cognitivo y la toma de conciencia acerca de las contradicciones. Tanto el error como el fracaso son elementos concomitantes en el aprendizaje y la adquisición de nuevos conocimientos, puesto que un error visto más como un gestor de conocimiento u organizador didáctico reflexivo que como un elemento negativo sinónimo del fracaso, es un elemento positivo generador de nuevos aprendizajes (p. 22).

Detectar errores en un texto, e intentar remediarlos, puede resultar una tarea enriquecedora para el alumno ya que pone a prueba hasta qué punto ha comprendido los nuevos contenidos.

§2. Nuestra experiencia

Atendiendo a este hecho, y en virtud de los errores detectados en el texto seleccionado sobre secciones cónicas, decidimos diseñar una tarea para que los alumnos trabajaran tratando de detectarlos y corregirlos, luego de haber recibido clases tradicionales (expositivas) sobre los contenidos involucrados. Seleccionamos dos párrafos del capítulo, divididos cada uno en dos secciones, con la consigna de que descubrieran y marcaran errores y reescribieran el texto correctamente. La experiencia se llevó a cabo con un grupo de 36 alumnos de primer año de Ingeniería Química, agrupados por parejas, durante dos clases de Álgebra y Geometría Analítica, en el primer cuatrimestre de 2015.

En las Figuras 1 y 2 mostramos las dos consignas dadas a los alumnos (una por clase) y en las Figuras 3 y 4, algunas de las respuestas obtenidas.

La docente presente en el aula pudo observar cómo los alumnos discutían con entusiasmo para marcar los posibles errores, y revisaban en detalle los apuntes de clase, para corroborar si sus correcciones eran atinadas. La mayor parte de los errores fueron detectados por un alto porcentaje de las parejas; los estudiantes manifestaban muchas dudas antes de marcar cada error y les costaba menos rehacer correctamente los desarrollos. Ante la duda, varias parejas marcaron como errores cosas que eran correctas. No contamos con datos que den cuenta de las causas de este tipo de decisiones; hubiera sido interesante indagar y profundizar sobre este aspecto.

En el ejercicio incluido en la Figura 1 hay un error de intercalación de un "0" en un lugar que no corresponde y algunos errores tipográficos por ausencia del signo menos. Presumimos que serían detectados por todos los alumnos a partir de una lectura atenta, sin embargo, un 25 % de las parejas de alumnos no los advirtió, según creemos, porque la interpretación global del texto es posible aún con estos errores. Luego hay un error de cálculo, que es arrastrado a lo largo de todo el desarrollo posterior. Esto conduce a una errónea determinación de la posición del foco de la parábola y de la ecuación de la recta directriz, y que se vuelca en el gráfico correspondiente; en este caso un 83 % de las parejas descubrió los errores en el desarrollo y un 67 % advirtió y corrigió el error en el gráfico.

Trabajo práctico: Ecuación de la parábola.

El siguiente desarrollo, extraído de un libro de texto de Álgebra y Geometría Analítica, contiene varios errores. Algunos son simples errores de tipeo, pero otros son errores de cálculo, que conducen a conclusiones equivocadas.

Les pedimos que lo revisen con detalle, descubran los errores, y reescriban el desarrollo de manera correcta, subrayando o resaltando en color las correcciones.

No olviden revisar también el gráfico.

Pueden consultar los apuntes de clase o un libro de texto si lo desean.

Ejemplo 18

Determinar si la gráfica de la ecuación $4y^2 + 8x - 12y + 13 = 0$ representa una parábola con directriz paralela a algún eje. De ser así, determinar su foco, su vértice y su directriz.

Solución

Si es una de las parábolas buscada equivaldrá a $x-h = \frac{(y-k)^2}{4c}$ o a $y-k = \frac{(x-h)^2}{4c}$

Reescribiendo $4y^2 + 8x - 12y + 13 = 0 \Rightarrow 4y^2 - 12y = -8x - 13 \Rightarrow 4(y^2 - 3y) = 8x - 13 \Rightarrow$

$$4\left(y^2 - 3y + \left(\frac{3}{2}\right)^2\right) = -8x - 13 + 4\left(\frac{3}{2}\right)^2 \Rightarrow 4\left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = -8x - 4 \Rightarrow$$

$$4\left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = -2\left(x + \frac{1}{2}\right) \Rightarrow -2\left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{1}{2}\right) \Rightarrow \frac{\left(y - \frac{3}{2}\right)^2}{-\frac{1}{2}} = \left(x + \frac{1}{2}\right)$$

Comparando $x-h = \frac{(y-k)^2}{4c}$ con $\frac{\left(y - \frac{3}{2}\right)^2}{-\frac{1}{2}} = \left(x + \frac{1}{2}\right)$ puede concluirse que la segunda

Figura 3-57

ecuación es un caso particular de la primera, donde

$$h = -\frac{1}{2}; \quad k = \frac{3}{2} \quad \text{y} \quad 4c = \frac{-1}{2} \Rightarrow c = -\frac{1}{8}$$

Luego es una parábola con vértice en $V = (h; k) = \left(-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$, foco

$F = (h+c; k) = \left(-\frac{5}{8}; \frac{3}{2}\right)$, directriz $x = -\frac{3}{8}$, y eje de simetría $y = \frac{3}{2}$.

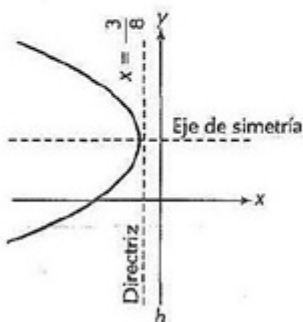


FIGURA 1. La primera tarea de corrección propuesta a los alumnos.

Trabajo Práctico: Ecuaciones de parábola e hipérbola.

Como vimos la clase pasada, en los libros a veces encontramos errores...

¿Puedes analizar las siguientes resoluciones, tomadas de un texto de la materia, para ver si son correctas o contienen equivocaciones? En caso de encontrarlas, te pedimos que las resaltes en color y las reescribas correctamente.

Puedes consultar tus apuntes de clase, o la bibliografía, si lo necesitas.

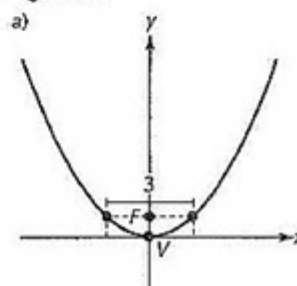
Ejemplo 21 a) Determinar una ecuación para la parábola del primer gráfico de la figura 3-61, dar su foco y su directriz.

Solución

a) La parábola tiene vértice en el origen y su eje focal es coincidente con el eje y. Luego la ecuación ordinaria es $y = \frac{x^2}{4c}$. A partir de la figura, su lado recto es 3 (o dos puntos de la parábola son $(\pm \frac{3}{2}; c)$) y $c > 0$ (la parábola abre hacia arriba).

Al utilizar estos datos resulta que $4c = 3$; $c = \frac{3}{4}$. Luego, una ecuación de la parábola es $y = \frac{x^2}{3}$ (o bien $3y = x^2$). Su foco es $F = (c; 0) = (\frac{3}{4}; 0)$, y su directriz $y = -c$; $y = -\frac{3}{4}$

Figura 3-61



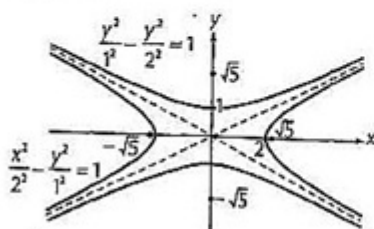
Ejemplo 26 Graficar las hipérbolas $4y^2 - x^2 + 4 = 0$ y $4y^2 - x^2 - 4 = 0$ y sus asíntotas. Determinar la hipérbola de mayor excentricidad.

Solución

Escritas en su forma canónica son $\frac{y^2}{1} - \frac{x^2}{4} = 1$ y $\frac{y^2}{1} - \frac{x^2}{4} = -1$. Tienen asíntotas; $\frac{x^2}{4} - y^2 = 0$, $y = \pm 0.5x$ (son hipérbolas conjugadas).

La distancia del centro al foco (para ambas) es $c = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$

Figura 3-75



La hipérbola $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ tiene excentricidad $e = \frac{\sqrt{5}}{2} \approx 1.12$

La hipérbola $\frac{y^2}{1} - \frac{x^2}{4} = 1$ tiene excentricidad $e = \frac{\sqrt{5}}{1} = 2.24$

Es la de mayor excentricidad.

En el caso de la elipse, la excentricidad será mayor cuanto más se acerque el foco al vértice homólogo. En las hipérbolas, cuanto más se aleje.

FIGURA 2. La segunda tarea de corrección propuesta a los alumnos.

Por mostrar sólo algunos ejemplos concretos, en la Figura 3 observamos la respuesta de la pareja n° 15, que no advirtió, en la línea 5 del Ejemplo 18 que aparece

en la Figura 1, la intercalación de un cero que no corresponde ni la ausencia de un signo menos, pero consideró como erróneo el valor de h , que es correcto.

Ejemplo 18 Determinar si la gráfica de la ecuación $4y^2 + 8x - 12y + 13 = 0$ representa una parábola con directriz paralela a algún eje. De ser así, determinar su foco, su vértice y su directriz.

Solución
Si es una de las parábolas buscada equivaldrá a $x - h = \frac{(y - k)^2}{4c}$ o a $y - k = \frac{(x - h)^2}{4c}$

Reescribiendo $4y^2 + 8x - 12y + 13 = 0 \Rightarrow 4y^2 - 12y = -8x - 13 \Rightarrow 4(y^2 - 3y) = -8x - 13 \Rightarrow$

$$4\left(y^2 - 3y + \left(\frac{3}{2}\right)^2\right) = -8x - 13 + 4\left(\frac{3}{2}\right)^2 \Rightarrow 4\left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = -8x - 4 \Rightarrow$$

$$4\left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = -2\left(x + \frac{1}{2}\right) \Rightarrow -2\left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{1}{2}\right) \Rightarrow \frac{\left(y - \frac{3}{2}\right)^2}{\frac{1}{-2}} = \left(x + \frac{1}{2}\right)$$

Comparando $x - h = \frac{(y - k)^2}{4c}$ con $\frac{\left(y - \frac{3}{2}\right)^2}{\frac{1}{-2}} = \left(x + \frac{1}{2}\right)$ puede concluirse que la segunda ecuación es un caso particular de la primera, donde

$$h = \frac{-1}{2}; k = \frac{3}{2} \text{ y } 4c = \frac{-1}{2} \Rightarrow c = \frac{-1}{8}$$

Luego es una parábola con vértice en $V = (h; k) = \left(\frac{-1}{2}; \frac{3}{2}\right)$, foco $F = (h + c; k) = \left(\frac{-5}{8}; \frac{3}{2}\right)$, directriz $x = \frac{-3}{8}$, y eje de simetría $y = \frac{3}{2}$.

Figura 3-57

FIGURA 3. El trabajo de la pareja n° 15.

En el primer ejercicio de la Figura 2 se ubica erróneamente el foco de la parábola en el eje de abscisas (cuando lo correcto es en el eje de ordenadas); un 94% de las parejas de alumnos lo detectó. En el segundo ejercicio hay un error tipográfico en la ecuación de una de las hipérbolas del gráfico, que fue detectado por casi un 75% de los pares de alumnos, pero sólo un 17% advirtió que se afirma que $\frac{\sqrt{5}}{1} = 2,24$, en lugar de $\frac{\sqrt{5}}{1} \cong 2,24$. En este ejercicio, sin embargo, y con referencia a la última afirmación que aparece a la derecha de la Figura 3-75 de nuestra Figura 2, es llamativo que casi un tercio de las parejas corrigió errores inexistentes, como escribir "menor" en lugar de "mayor", y "acerque" en lugar de "aleje".

En la Figura 4 observamos el trabajo de la pareja n° 5, que marca bien dos errores, pero omite corregir donde dice que el número irracional "raíz cuadrada de 5" es "igual" al número racional 2,24.

Ejemplo 26 Graficar las hipérbolas $4y^2 - x^2 + 4 = 0$ y $4y^2 - x^2 - 4 = 0$ y sus asíntotas. Determinar la hipérbola de mayor excentricidad.

Solución

Escritas en su forma canónica son $\frac{x^2}{2^2} - \frac{y^2}{1^2} = 1$ y $\frac{y^2}{1^2} - \frac{x^2}{2^2} = 1$. Tienen asíntotas; $\frac{x^2}{4} - y^2 = 0$, $y = \pm 0.5x$ (son hipérbolas conjugadas).

La distancia del centro al foco (para ambas) es $c = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$

Figura 3-75

La hipérbola $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ tiene excentricidad $e = \frac{\sqrt{5}}{2} \cong 1.12$

La hipérbola $\frac{y^2}{1} - \frac{x^2}{2^2} = 1$ tiene excentricidad $e = \frac{\sqrt{5}}{1} = 2.24$

Es la de mayor excentricidad.

En el caso de la elipse, la excentricidad será mayor cuanto más se acerque el foco al vértice homólogo. En las hipérbolas, cuanto más se aleje.

FIGURA 4. El trabajo de la pareja nº 5.

§3. Reflexión sobre la experiencia

Los cambios vertiginosos que sufren los conocimientos técnicos, así como el enorme volumen de información disponible y su diversificación, exigen que el futuro ingeniero sea capaz de aprender por sí mismo, sea capaz de orientar y dirigir su auto-instrucción (ver, por ejemplo, Kindelán y Martín, 2008).

El aprendizaje autónomo, en el sentido que le otorga Hans Aebli, requiere de capacidades metacognitivas (Aebli, 2001). Los alumnos tienen escasa oportunidad de ejercitar estas capacidades durante el cursado de sus asignaturas de grado, en las que el acento está puesto principalmente en los contenidos específicos. Por otra parte, es deseable que desarrollen esas capacidades mientras avanzan en su formación profesional; se trata de habilidades que tienen relación con el control de los propios procesos cognitivos, pero que también repercuten en las concepciones epistemológicas que los estudiantes tienen sobre el conocimiento científico.

En efecto, que el alumno detecte errores o imprecisiones en un libro (que es considerado, en general, como una referencia incuestionable) repercutirá necesariamente en las concepciones que tiene sobre la validez de sus conocimientos y el rigor de las fuentes que se los proveen. Ejercitar esta habilidad de detección y análisis de errores en clase, a nuestro entender y el de otros autores ya citados, contribuye a desarrollar estrategias útiles. Campanario (2003) va más allá y asegura que es posible observar en los alumnos "una sensación (...) de mayor confianza

en los propios conocimientos y una actitud más crítica hacia las deficiencias detectadas en los manuales universitarios" (p. 163). No hemos podido constatar aún esta actitud superadora que describe Campanario, pero sí podemos decir que los alumnos se abocaron con entusiasmo a una actividad que requirió poner en juego habilidades metacognitivas, tal como las de control y autoevaluación ya mencionadas, que por lo general, tienen pocas oportunidades de ejercitar en el aula de matemática.

§4. Los errores en el Capítulo

Como el eje de nuestro trabajo es la alfabetización académica, nos interesa puntualizar algunos aspectos relativos a este campo.

Señalamos anteriormente que descubrimos los errores en el texto seleccionado cuando lo *leímos* para preparar la actividad para nuestros alumnos, y aquí destacamos la palabra "leímos" por la necesidad de situarnos en el concepto de lectura que guiara la nuestra, de manera que nos sirviera para el desarrollo de la actividad con los alumnos y nos ayudara a explicar la cantidad de errores encontrada.

Distinguimos dos puntos de vista sobre la lectura, su comprensión y el sentido de lo que se lee. Por un lado, puede definirse la lectura como decodificación; desde aquí el sentido está en el texto y en las partes que lo componen, en sus palabras, oraciones o párrafos y la comprensión consiste en la extracción de ese sentido por parte del lector. Si éste no puede decodificar alguna de las partes no comprende el texto. Dos buenos decodificadores entenderán lo mismo si leen el mismo texto.

Por otro lado, encontramos un enfoque constructivo de la lectura. Solé (2002) sostiene que "leer es un proceso de interacción entre el lector y el texto, proceso mediante el cual el primero intenta satisfacer (obtener una información pertinente para) los objetivos que guían su lectura" (p. 19). Dentro de este mismo enfoque Dubois (2007) señala que "el sentido lo aporta el propio lector de acuerdo con los conocimientos y experiencias archivados en su memoria" (p. 25). El lector es un sujeto activo que procesa y examina el texto con objetivos que lo guían y con conocimientos previos que pone en relación con lo que lee. Dos lectores con objetivos y saberes diferentes, pueden discrepar en el sentido que le otorguen al texto leído. Esto nos lleva a pensar que en realidad el sentido dado a un texto no es una réplica que el lector hace del significado que el autor quiso imprimirle, sino que es una construcción. En el caso de la lectura individual la construcción es propia del lector.

La expresión latina *errare humanum est* significa literalmente *errar es humano*. El uso habitual de ella en latín parece que la pinta con el color de la verdad. Nosotros entendemos que como seres humanos podemos equivocarnos, está en nuestra naturaleza. Escribir es un acto humano, los textos que escribimos no están exentos

de errores. Para descubrir los errores de un escrito debemos leerlo atenta y reflexivamente. Esto hicimos con el capítulo en cuestión.

La lectura académica es atenta y minuciosa, pone el foco en las palabras, símbolos y gráficos que contienen las páginas, y en sus relaciones para formar unidades superiores en significado de la disciplina. En un principio no busca la relación con otros temas o no se interesa por las aplicaciones. Importa cómo los elementos textuales operan entre sí para determinar el sentido del texto que permita su comprensión. Comprensión que a su vez resignifica a los primeros términos y facilita la comunicación.

Para la comprensión de un texto como el siguiente es condición necesaria (aunque puede no ser suficiente) el conocimiento del significado de los términos que contiene y de la notación utilizada:

Si x_1 y x_2 son dos vectores linealmente independientes de un espacio vectorial sobre el cuerpo \mathbb{R} de los números reales y $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0 \Rightarrow kx_1$ y kx_2 son vectores linealmente independientes.

Radford (2006) señala que "...ha habido una toma de conciencia colectiva del hecho de que, dada la generalidad de los objetos matemáticos, la actividad matemática es, esencialmente, una actividad simbólica" (p. 7) y toma a ésta como una razón del interés suscitado por la semiótica en el campo de la educación matemática.

La comprensión de la proposición anterior referida a independencia lineal requiere del conocimiento del lenguaje matemático en sus distintos registros de representación semiótica. Es ésta una lectura cercana a la que se entiende como de decodificación. Pero también la lectura académica es reflexiva. "Reflexionar sobre el texto quiere decir dialogar con uno mismo sobre la comunicación escrita, hacerse preguntas, plantearse dudas con respecto a la información que nos brinda el autor" (Dubois, 2007, p. 29). Incluye la búsqueda de ejemplos, contraejemplos y aplicaciones. Busca relacionar un concepto o procedimiento con otros conocidos. Trata de comparar el texto con lo leído en otro lugar o lo escuchado, si el lector es un alumno, en la clase. El lector rehace la demostración o los cálculos habidos e intenta formas alternativas. Es una lectura cercana al enfoque constructivo.

Leímos el capítulo que nos permitió llevar adelante nuestra experiencia, no con el profesionalismo de los correctores especializados porque no lo somos, pero sí hicimos una lectura académica como la descrita y encontramos los errores que figuran en el Anexo 1. Agrupamos los errores en cinco categorías:

1. Errores por omisión o falta de una condición o expresión simbólica necesaria para completar el sentido de una expresión, imponer una restricción o no distorsionar una definición. Por ejemplo, el error N° 8 del Anexo 1.

2. Errores tipográficos, que consisten en las sustituciones de algunos caracteres por otros y también en su ausencia donde debieran estar o en su presencia donde no debieran estar. Por ejemplo, el error N° 11 del Anexo 1.
3. Errores de cálculo numérico o algebraico como, por ejemplo, el error N° 31 del Anexo 1.
4. Errores por intercalación de palabras o expresiones matemáticas que no se corresponden con el desarrollo temático en curso. Por ejemplo, el error N° 58 del Anexo 1.
5. Errores por incorrecta correspondencia entre la representación gráfica y su enunciación textual. Por ejemplo, el error N° 63.

El 82 % de los errores encontrados en el capítulo fue tipográfico, el 12 % del tipo 1; se hallaron además 2 del tipo 3 y sólo 1 del tipo 4 y del tipo 5.

§5. De cómo se evitan los errores en los libros de texto

El autor de un texto, por más experimentado que sea, puede incurrir en errores u omisiones en el escrito que entrega a la editorial. Cometer errores es, sin duda alguna, una de las acciones más habituales del ser humano. El editor es el responsable de someter el escrito a corrección. Para eso suele apoyarse en correctores especializados que trabajan bajo su coordinación. "La corrección del texto que remite el autor es tarea fundamental, dado que toda editorial debe aspirar a la perfección de sus libros. Y perfección significa fallo cero. Jamás podemos resignarnos a convivir con las malditas erratas" (Pimentel, 2007, p. 90). Según este mismo autor, existen dos tipos de correcciones:

- La ortotipográfica, con la que se trata de enmendar las faltas de ortografía y el uso inadecuado de los signos tipográficos. El corrector detecta y elimina las faltas de ortografía; resuelve las fallas de acentuación y puntuación; revisa las posibles transposiciones u omisiones de caracteres, así como el uso apropiado y coherente de comillas, mayúsculas, cursivas, abreviaturas y, en el caso de textos matemáticos, de la notación típica.
- La de estilo, que es una corrección literaria que actúa sobre los planos sintáctico, gramatical y expresivo con el fin de pulir el texto y optimizar sus recursos. El corrector suprime los errores y las imprecisiones de vocabulario, elimina muletillas y vicios léxicos, combina correctamente las palabras y los grupos que estas forman para expresar significados, adapta el texto a la lengua propia de la comunidad de sus usuarios, cuidando siempre de proteger el estilo propio del autor.

Para el caso de los libros de texto de matemática, se debe agregar la corrección de contenidos: un especialista en la materia, revisa y corrige la rigurosidad en la presentación de los asuntos de la disciplina.

El texto es del autor, él tiene la libertad para aceptar o no las correcciones. Por eso es importante el trabajo coordinado entre autor y correctores para aclarar las dudas y resolver los desacuerdos.

§6. Para finalizar

Nuestra actividad se desarrolla en la universidad. Nos atrevemos a recomendar a nuestros colegas profesores que revisen los libros que recomiendan. Los lean académicamente, aprovechen los errores si los hay, creen con ellos situaciones de aprendizaje. Por ejemplo, proponer ejercicios con consignas como: "En la página x donde dice xxx debe decir... (complete lo que corresponde)", "El desarrollo del ejemplo x tiene un error que conduce a un resultado incorrecto. Rehágalo para obtener el resultado correcto", "En la página x hay dos errores, encuéntrelos y dé razones de su aparición", "Señale los errores, si los hubiere, en el trabajo de un compañero y corríjalos". Pongan atención y concentración en sus clases y escritos para evitar los errores. El trabajo sobre el error no sólo es para remediarlo: es un constructor de conocimientos y su aprovechamiento constituye una innovación didáctica.

A aquellos que con mucho esfuerzo asumen la tarea de escribir un libro, les proponemos que elijan un editor responsable, que someta sus originales a revisión por correctores especializados. A los que gustan escribir apuntes para subirlos a un sitio virtual o para que sean fotocopiados por sus alumnos, les sugerimos que los hagan revisar por una persona conocedora del tema. No estamos exentos de cometer errores. Somos humanos. Y si, aún con todos los recaudos, los errores aparecieran, es posible hacer un uso didáctico de ellos, proponiendo a los alumnos tareas de detección, análisis y corrección que pueden contribuir al desarrollo de su capacidad de auto-instrucción.

Recordemos que el gran desafío que tenemos como profesores universitarios es, aunque no esté explicitado, formar profesionales autónomos, competentes, críticos, creativos, con aptitud para rectificarse cuando se equivocan, capaces de interpretar y producir cambios no sólo en los ámbitos de sus desempeños sino más allá, en un mundo que deseamos sea siempre mejor.

§7. ANEXO 1.

Errores encontrados en el Capítulo 3 de Kozak et al. (2007)

- N° 8 Página 168, Ejemplo 4, línea 9.
Donde dice " $(\neq y - \frac{1}{1+x^2} = 0)$ ", debe decir " $(\neq y - \frac{1}{1+x^2} = 0, \forall y \neq 0)$ ".
- N° 11 Página 170, sección 3,3,1, línea 8.
Donde dice " $y = y - h$ " debe decir " $y = y - k$ ".

- N° 31 Página 196, ejemplo 18 (11 errores). En el Ejemplo 18 que muestra la Figura 1 se puede apreciar la versión original. Se transcribe la resolución correcta del mismo, ya que presenta varios errores.

Determinar si la gráfica de la ecuación $4y^2 + 8x - 12y + 13 = 0$ representa una parábola con directriz paralela a algún eje. De ser así, determinar su foco, su vértice y su directriz.

Solución. Si es una de las parábolas buscada equivaldrá a

$$x - h = \frac{(y - k)^2}{4c} \quad \text{ó} \quad y - k = \frac{(x - h)^2}{4c}$$

Reescribiendo,

$$4y^2 + 8x - 12y + 13 = 0 \Rightarrow 4y^2 - 12y = -8x - 13 \Rightarrow 4(y^2 - 3y) = -8x - 13$$

$$\Rightarrow 4\left(y^2 - 3y + \left(\frac{3}{2}\right)^2\right) = -8x - 13 + 4\left(\frac{3}{2}\right)^2 \Rightarrow 4\left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = -8x - 4$$

$$\Rightarrow 4\left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = -8\left(x + \frac{1}{2}\right) \Rightarrow -\frac{1}{2}\left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{1}{2}\right) \Rightarrow \frac{\left(y - \frac{3}{2}\right)^2}{-2} = \left(x + \frac{1}{2}\right)$$

Comparando $x - h = \frac{(y-k)^2}{4c}$ con $\frac{\left(y - \frac{3}{2}\right)^2}{-2} = \left(x + \frac{1}{2}\right)$ puede concluirse que la segunda ecuación es un caso particular de la primera, donde $h = -\frac{1}{2}$, $k = \frac{3}{2}$ y $4c = -2 \Rightarrow c = -\frac{1}{2}$. Luego es una parábola con vértice en $V = (h; k) = \left(-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$, foco $F = (h + c; k) = \left(-1; \frac{3}{2}\right)$, directriz $x = 0$, y eje de simetría $y = \frac{3}{2}$. \square

Se deja como ejercicio verificar, utilizando la definición de parábola con foco en $\left(-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$ y directriz $x = 0$ que la ecuación es $4y^2 + 8x - 12y + 13 = 0$ (o una equivalente).

- N° 58 Página 217, ejemplo 25, línea 5.
Donde dice "semieje mayor $\sqrt{200} \cdot 10$ " debe decir "semieje mayor: $\sqrt{200}$ ".
- N° 58 Página 217, ejemplo 25, línea 7.
Donde dice "semieje mayor" debe decir "semieje mayor: $\sqrt{169}$ ".
- N° 63 Página 196, sección 3,7,2, ejemplo 18 figura 3 – 57:
Donde dice " $x = \frac{3}{8}$ " debe decir " $x = -\frac{3}{8}$ ".

Nota: El lector interesado puede solicitar la lista completa de los errores del capítulo a cualquiera de los autores del artículo.

Referencias

- [1] AEBLI, H. (2001). *Factores de la enseñanza que favorecen el aprendizaje autónomo*. Madrid: Narcea Ediciones.
- [2] BEYER K., W. O. (2014). *Los textos escolares y el error en matemáticas*. Matua: Revista del Programa de Matemáticas I, 1 (1), 1 – 25.
- [3] BRICEÑO E., MILAGROS T. (2009). *El uso del error en los ambientes de aprendizaje: una visión transdisciplinaria*. Revista de Teoría y Didáctica de las Ciencias Sociales, 14, 9 – 28.

- [4] CAMPANARIO, J. M. (2001). *¿Qué puede hacer un profesor como tú o un alumno como el tuyo con un libro de texto como éste? Una relación de actividades poco convencionales*. Enseñanza de las Ciencias, 19(3), 351 – 364.
- [5] CAMPANARIO, J. M. (2003). *De la necesidad, virtud: cómo aprovechar los errores y las imprecisiones de los libros de texto para enseñar física*. Enseñanza de las Ciencias, (21)1, 161 – 172.
- [6] DE LA TORRE, S. (2013). *Aprender de los errores: el tratamiento didáctico de los errores como estrategia de innovación*. Buenos Aires: Magisterio del Río de la Plata.
- [7] DEL PUERTO, S., MINNAARD, C., y SEMINARA, S. (2004). *Errores en el Aprendizaje de las Matemáticas*. 1º Parte. Elementos de Matemática, 19(74), 5 – 18.
- [8] DEL PUERTO, S., MINNAARD, C., y SEMINARA, S. (2005). *Errores en el Aprendizaje de las Matemáticas*. 2º Parte. Elementos de Matemática, 19(74), 5 – 18.
- [9] DEL PUERTO, S., MINNAARD, C., y SEMINARA, S. (2006). *Análisis de los errores: una valiosa fuente de información acerca del aprendizaje de las Matemáticas*. Revista Iberoamericana de Educación, N° 38/4. Recuperado de www.rieoei.org/deloslectores/1285Puerto.pdf
- [10] DUBOIS, M.E. (2006). *Sobre lectura, escritura y algo más*. P.(Ed.) Textos en Contexto 7. Buenos Aires: Lectura y Vida/ Asociación Internacional de Lectura.
- [11] FERNÁNDEZ PALOP, P., CABALLERO GARCÍA, P., FERNÁNDEZ BRAVO, J. A. y CELA, C. J. (2013). *¿Yerra el niño o yerra el libro de Matemáticas?*. Números, 83, 131 – 158.
- [12] HERNÁNDEZ, L. (2013, 9 de agosto). *Errores en libros de texto: abundan dazos, confunden colores y escriben "ocaciona"*. . Excelsior. Recuperado de <http://www.excelsior.com.mx/nacional/2013/08/09/912863>
- [13] KINDELÁN, M., y MARTÍN, A.(2008). *Ingenieros del Siglo XXI: importancia de la comunicación y de la formación estratégica en la doble esfera educativa y profesional del ingeniero*. ARBOR Ciencia, Pensamientos y Cultura, 184(732), 731 – 742.
- [14] KOZAK, A.M., PASTORELLI, S., y VARDANEGA, P. (2007). *Nociones de geometría analítica y álgebra lineal*. Buenos Aires: McGraw-Hill Interamericana.
- [15] MACÍAS, A., MAZZITELLI, C., y MATURANO, C. (2007). *Las estrategias metacognitivas y su relación con el contexto educativo*. Revista del Instituto de Investigaciones en Educación en las Ciencias Experimentales (IIECE). Recuperado de <http://www.feeye.uncu.edu.ar/web/posjornadasinve/area2/Aprendizaje%20-%20eleccion%20de%20carrera/009%20-%20Mazzitelli%20y%20Maturano%20-%20UN%20San%20Juan.pdf>
- [16] PIMENTEL, M. (2007). Manual del Editor. *Cómo funciona la moderna industria editorial*. Córdoba: Berenice.
- [17] RADFORD, L. (2006). *Semiótica y educación matemática: introducción*. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 9 (Extra - 1), 7 – 22.
- [18] REDACCIÓN LR (2013, 12 de mayo). *Denuncian errores en libros de matemática en colegios privados de nuestro país*. La República. Recuperado de <http://larepublica.pe/12-05-2013/denuncian-errores-en-libros-de-matematica-en-colegios-privados-de-nuestro-pais>
- [19] SENZ BUENO, S. (2005). *En un lugar de la «Mancha»... Procesos de control de calidad del texto, libros de estilo y políticas editoriales*. Panace@, 6(21 – 22), 355 – 370.
- [20] SLISKO, J. (1995). *The limitless world of textbook mistakes*. The Physics Teacher, 33, 381.
- [21] SOLÉ, I. (2002). *Estrategias de lectura*. Barcelona: Editorial Graó - ICE.
- [22] WHITING, W. B.(1991). *Errors: A Rich Source of Problems and Examples*. Chemical Engineering Education, 25(3), 140 – 144.

MESSINA, VICENTE.

*Departamento de Ciencias Básicas, Facultad Regional Buenos Aires,
Universidad Tecnológica Nacional, (UTN).*

(✉) vrnessi@gmail.com

SEMINARA, SILVIA.

*Departamento de Ciencias Básicas, Facultad Regional Buenos Aires,
Universidad Tecnológica Nacional, (UTN).*

(✉) seminarasilvia@gmail.com

DEL PUERTO, SILVIA.

*Departamento de Ciencias Básicas, Facultad Regional Buenos Aires,
Universidad Tecnológica Nacional, (UTN).*

(✉) spuerto29@gmail.com

GIL, TERESA.

*Departamento de Ciencias Básicas, Facultad Regional Buenos Aires,
Universidad Tecnológica Nacional, (UTN).*

(✉) tgil@fibertel.com.ar

PANO, CARLOS

*Departamento de Ciencias Básicas, Facultad Regional Buenos Aires,
Universidad Tecnológica Nacional, (UTN).*

(✉) cpano@doc.frba.utn.edu.ar

Recibido: 10 de abril de 2017.

Aceptado: 21 de marzo de 2018.

Publicado en línea: 11 de mayo 2018.

UNA MESA INESTABLE

Hugo Alvarez

§1. Problema y solución

Quiero exponer un problema que ocurre con una cotidianidad capaz de despertar la curiosidad del lector. Admite una solución de modesta Matemática, pero su exposición permite codearse con muchas formas de pensar útiles en la disciplina. Soy de los que creen que la Matemática, como otras artes, está dentro de uno. Y el docente debe ayudar a que el alumno la encuentre. Será por eso que preferimos hablar de Educación Matemática en vez de Enseñanza de la Matemática.

Escribo sobre una mesa inestable (sin ignorar el doble sentido de la palabra "sobre")*: apoya tres patas en el suelo y la cuarta queda en el aire. Como decía al principio, el problema es frecuente. Nos ocurrió en un patio con una mesa de cuatro patas. En esos casos se busca algo con qué suplementar la pata que no apoya. Pero mis hijos me acercaron una solución empírica que habían aprendido de su hermanastro. Girando la mesa en su sitio, apoyada sobre tres patas, en algún momento apoya las cuatro. Probamos y funcionó, y recorrimos todo el patio comprobando que siempre funcionaba. Entonces Agustín, que aún no era un matemático certificado por el sistema, se preguntó si se podría demostrar.

Si los extremos inferiores de las cuatro patas no están en un mismo plano, el problema no tiene interés porque en una superficie perfectamente plana, caso que no tiene sentido excluir, el método no funcionaría. Supondré entonces que los extremos de las patas son los vértices de un **cuadrado** (más adelante hablaremos del caso en que los extremos de las patas son los vértices de un rectángulo general). Al tratar de apoyarlos sobre una superficie S , que no es plana, ocurre que tres de ellos, digamos a , b y c , lo hacen, pero el cuarto, d , queda en el aire. Supondremos que la superficie S es suficientemente regular. Que no tiene escalones ni pliegues. Para quien conozca el lenguaje, es el gráfico de una función continua $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$S = \{(x, y, z) : z = f(x, y)\}.$$

*Recuerdo haber leído de Dalmiro Saenz: Como es difícil escribir sobre uno mismo escribiré sobre una mesa.

En este caso, S divide al espacio en dos regiones separadas por ella

$$S^+ = \{(x, y, z) : z > f(x, y)\} \quad \text{y} \quad S^- = \{(x, y, z) : z < f(x, y)\}.$$

Con esta notación, tenemos $\mathbf{a} \in S$, $\mathbf{b} \in S$, $\mathbf{c} \in S$ y $\mathbf{d} \in S^+$.

La cuestión es si podemos encontrar otra ubicación cercana para la mesa en la que sus cuatro patas se apoyen sobre S . Con ese fin, comenzamos con un procedimiento matemático. En el espacio, y manteniendo la recta \overline{ab} como eje, rotamos el cuadrado $\square abcd$ en el sentido que empuja el vértice c a través de S , hasta que el punto d alcance la superficie, cosa que hará en algún punto d' .

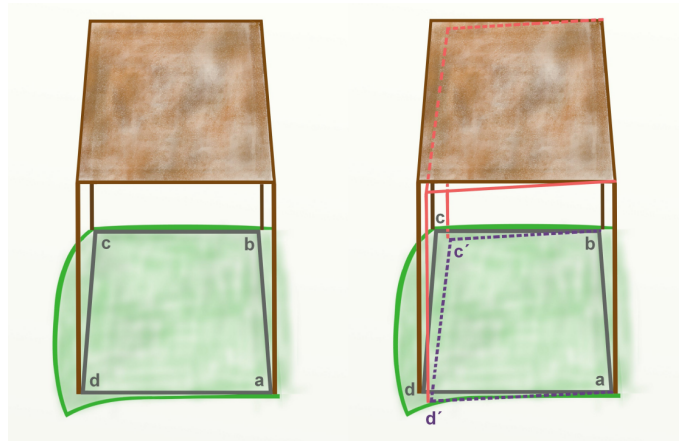


Figura 1*

Aunque este movimiento no es físicamente posible, ya que el punto c debería atravesar la superficie, nos permite determinar el punto d' . La síntesis del resultado es la siguiente.

\mathbf{a}, \mathbf{b} quedan fijos

$$\mathbf{c} \in S \mapsto \mathbf{c}' \in S^-$$

$$\mathbf{d} \in S^+ \mapsto \mathbf{d}' \in S$$

Una vez encontrado el punto d' , se destacan dos triángulos planos congruentes cuyos vértices pertenecen a S :

$$\triangle abc \quad \text{y} \quad \triangle d'ab$$

(Cuando los vértices de una figura plana Q pertenecen a S , que no es plana, en general no estará Q contenida en S . En estos casos diremos que Q *apoya* en S). Ambos son triángulos isósceles rectángulos y sus catetos son congruentes al lado del cuadrado original.

*Las ilustraciones de las Figuras 1-4 son de Natalí Sofía Bocco <na_tulita@hotmail.com>

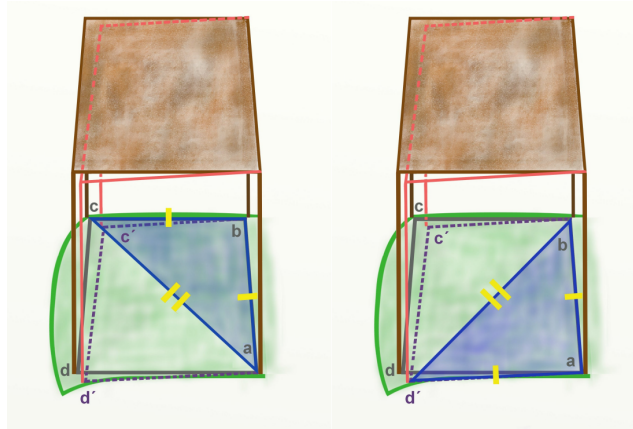


Figura 2a

Ahora hacemos un segundo movimiento como muestra la Figura 2b.

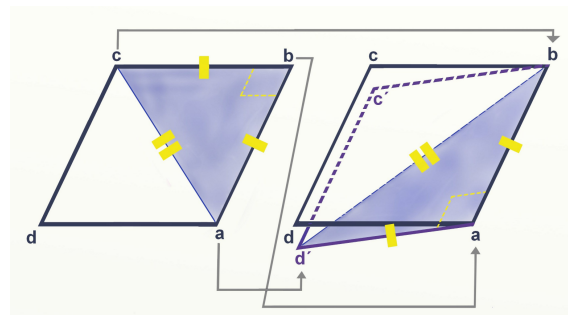


Figura 2b

Se trasladan los vértices del triángulo $\triangle abc$, isósceles y rectángulo en b , arrastrándolos sobre S , hacia los vértices del triángulo congruente $\triangle d'ab$

$$\left. \begin{array}{l} a \mapsto d' \\ b \mapsto a \\ c \mapsto b \end{array} \right\} \text{ en } S.$$

Entonces, como el cuarto vértice del cuadrado debe acompañar obligatoriamente a los otros tres,

$$d \in S^+ \mapsto c' \in S^- .$$

En efecto, los puntos a, b, c determinan un cuadrado cuyo cuarto vértice es d y los puntos d', a, b determinan otro cuadrado que se completa con c' . Pero nuevamente nos encontramos con una imposibilidad física; el extremo de una pata pasaría de un punto en S^+ a un punto en S^- , lo que significa atravesar S . Esa es, sorprendentemente, la solución del problema. Puesto que las otras tres patas se están deslizando sobre S en todo momento, cuando la cuarta llega a tocar S y antes de atravesarla, tenemos la mesa apoyada correctamente en la superficie, sobre sus cuatro patas.

§2. Los peros

La primera sección contiene inexactitudes. Para algunas afirmaciones faltan hipótesis y, puestas éstas, faltarán demostraciones. Pero creo que es interesante y comprensible para alumnos de escuela media. Quiero abogar por una posición heterodoxa. Tal parece que no podemos enseñar si las cosas no están perfectas en todos sus detalles. Como si tuviésemos miedo de que un matemático nos esté mirando. Cuando enseñamos, el primer compromiso es con el alumno y el segundo con la Matemática. En este punto quiero recordar las palabras de Pedro Puig Adam:

Es importante que el maestro sepa más de lo que debe enseñar.

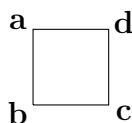
Pero no menos importante es que sepa callárselo.

El argumento presentado anteriormente tiene dos pasos: el primero en que “obtenemos d' luego de rotar el cuadrado $\square abcd$ alrededor de la recta \overline{ab} ”, y el segundo cuando “arrastramos sobre S los vértices del triángulo orientado $\triangle abc$ hasta llegar al triángulo orientado congruente $\triangle d'ab$ ”. Ambos pasos tienen algunos “peros” matemáticos.

En el primer paso, no es siempre cierto que girando el cuadrado sobre su eje \overline{ab} el punto d encontrará la superficie S y, en caso de encontrarla, tampoco es cierto que esto ocurra en un solo punto. Por ejemplo, consideremos en \mathbb{R}^3 una semirecta D con origen en 0 que forma un ángulo α con el semieje negativo de las z con $\pi/6 < \alpha < \pi/4$. El cono S generado por la rotación de la directriz D alrededor del eje z se puede describir como gráfico de una función continua

$$f(x, y) = -\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Consideremos un cuadrado



Dado que $\alpha > \pi/6$ resulta que es posible colocar el cuadrado de modo que a esté en el vértice del cono S y además b y c estén en S (si α fuera muy pequeño, digamos $0 < \alpha < \pi/8$, luego de colocar a en el vértice y b en el cono, c quedaría siempre en el aire). Sin embargo, el cuarto vértice d estará en el plano perpendicular a \overline{ab} por el origen pero este plano sólo corta a S en a porque $\alpha < \pi/4$. Por lo tanto la rotación de d alrededor de \overline{ab} no encuentra a S y hace que d quede girando en el aire.

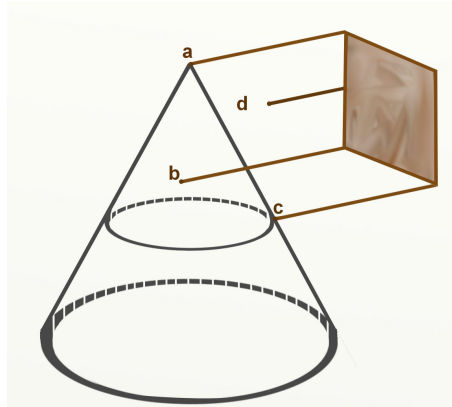


Figura 3

Deberá haber alguna hipótesis sobre S que evite esta situación.

En el segundo paso, hay una cuestión de orientación. Los triángulos y demás figuras planas sumergidos en el espacio Euclídeo tridimensional tienen dos caras y hay que cuidarse, mientras se pasa de un triángulo a otro congruente deslizándose apoyado en la superficie S , de que la cara que mira “hacia arriba” no quede mirando “hacia abajo”. Eso sería incompatible con nuestro problema (pues la mesa quedaría enterrada patas para arriba) y no es imposible que suceda. Doy un ejemplo. Consideremos que la superficie es la media esfera de radio 1 correspondiente a los $z \geq 0$, la cual es el gráfico de la siguiente función continua

$$f(x, y) = \begin{cases} \sqrt{1 - x^2 - y^2}, & \text{si } x^2 + y^2 \leq 1, \\ 0, & \text{si } x^2 + y^2 > 1. \end{cases}$$

El triángulo rectángulo isósceles orientado

$$T_1 = \Delta(-j)ij$$

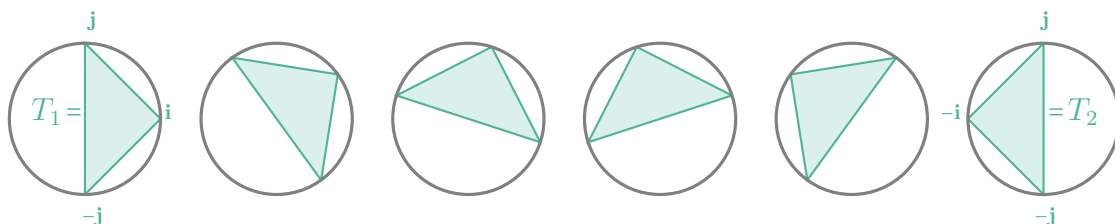
con

$$i = (1, 0, 0) \quad j = (0, 1, 0) \quad k = (0, 0, 1)$$

se puede desplazar hacia su congruente orientado

$$T_2 = \Delta j(-i)(-j)$$

por el borde de la semiesfera preservando la orientación.



También es posible llevar, sobre la media esfera S , el triángulo T_1 al triángulo orientado $T_3 = \triangle(-j)(-i)j$ dejando fijos los vértices agudos $\pm j$ y deslizando el vértice del ángulo recto i por la esfera. Sin embargo aquí se cambia la orientación.

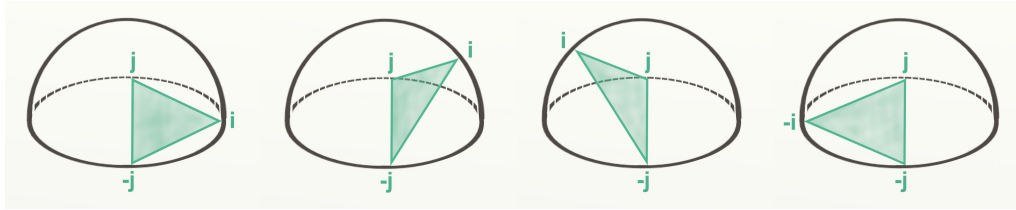


Figura 4

En ambos casos, T_1 fue desplazado a un triángulo congruente sin salirnos de la superficie S , pero en el primer caso lo hicimos preservando la orientación mientras que en el segundo la cambiamos. No queremos hacer el segundo paso cambiando la orientación para no terminar con la mesa dada vuelta. Necesitamos definiciones más precisas que describan y controlen estas situaciones.

Por último, nuestro argumento finaliza afirmando que para pasar de S^+ a S^- hay que atravesar la superficie S , y esto requiere de un uso del Teorema de los valores intermedios de Bolzano que deberá ser explicitado.

§3. Movimientos rígidos

Consideraré a un triángulo T como un subconjunto de \mathbb{R}^3 y llamaré T^* al conjunto de sus vértices, que deberán ser tres puntos no alineados, suficientes para determinar al triángulo y al plano al que pertenecen. Una *congruencia* entre dos triángulos T_1 y T_2 es una biyección ϕ entre T_1^* y T_2^* tal que, para todo $x, y \in T_1^*$, $\|\phi(x) - \phi(y)\| = \|x - y\|$. Dos triángulos son congruentes si existe una congruencia entre ellos. Esta es una relación de equivalencia.

Dado $T^* = \{\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}\}$, para cada ordenamiento de estos puntos, por ejemplo $(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r})$ se define el vector $\mathbf{n} = (\mathbf{p} - \mathbf{q}) \times (\mathbf{r} - \mathbf{q})$ que resulta normal al plano determinado por T , al igual que $-\mathbf{n}$. Su norma es dos veces el área de T . Un cálculo elemental muestra que $\mathbf{n} = \mathbf{p} \times \mathbf{q} + \mathbf{q} \times \mathbf{r} + \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ y cualquier permutación par dará el mismo resultado. Con una permutación impar de los vértices, por ejemplo $(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \mathbf{r})$, $\mathbf{q} \times \mathbf{p} + \mathbf{p} \times \mathbf{r} + \mathbf{r} \times \mathbf{q} = -\mathbf{n}$. Elegir un sentido de circulación por el borde del triángulo equivale a elegir una cara. *Orientar* un triángulo es elegir un orden (cíclico) para sus vértices o, equivalentemente, elegir un sentido en la recta normal al plano del triángulo. Adoptaremos la notación $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r} \rangle$ para representar al triángulo orientado. O cualquiera de sus equivalentes: $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r} \rangle = \langle \mathbf{q}, \mathbf{r}, \mathbf{p} \rangle = \langle \mathbf{r}, \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle$

El movimiento en el espacio de un cuerpo rígido, se modeliza con un *movimiento rígido*. Así se llama un mapeo

$$\mathbf{y} = \mathbf{F}_t(\mathbf{x}), \quad a \leq t \leq b, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3; \quad \mathbf{F}_a(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$$

que representa la posición del punto x en el instante t . La condición de rigidez consiste en que cada par de puntos mantienen su distancia a lo largo del tiempo:

$$\|\mathbf{F}_t(\mathbf{x}_1) - \mathbf{F}_t(\mathbf{x}_2)\| = \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|, \quad a \leq t \leq b.$$

Esto es, para cada t , \mathbf{F}_t es una *isometría*, lo que implica en particular continuidad respecto de x . Para que el mapeo sea un movimiento rígido, se requiere también continuidad respecto de t , como una aceptación del principio de que *Natura non facit saltus*.

Una *isometría* entre dos espacios métricos (E, d) y (E', d') es una aplicación $\varphi : E \rightarrow E'$ que conserva distancias.

$$d'(\varphi(x), \varphi(y)) = d(x, y).$$

Se sabe que una isometría entre espacios euclídeos es la composición de una traslación con una transformación ortogonal: $y = f(x) + b$. Una transformación ortogonal, cuyo determinante sólo puede ser 1 ó -1 , conserva o invierte la orientación del espacio en uno u otro caso respectivamente. Aquellas que conservan la orientación se llaman rotaciones. Puesto que el determinante es una función continua de las entradas de la matriz y \mathbf{F}_a es la identidad, la parte lineal de todas las transformaciones \mathbf{F}_t correspondientes a un movimiento rígido tendrán determinante 1. Son entonces composición de traslación con rotación. Las llamaremos *transformaciones rígidas*.

Una transformación afín en \mathbb{R}^n queda determinada por su comportamiento en $n + 1$ puntos afinmente independientes. Con el dato adicional de la conservación o no de la orientación del espacio, para una isometría bastarán n puntos. Luego, para una transformación rígida basta con n puntos independientes.

Una congruencia entre dos triángulos se extiende de manera única a una isometría entre los planos que ellos determinan. Pero una isometría entre dos planos se puede extender de dos maneras a una isometría en \mathbb{R}^3 . Una de ellas conserva orientación y la otra la invierte. Esto significa que una congruencia se puede extender de dos maneras a una isometría del espacio y una de ellas es una transformación rígida. En consecuencia, dados dos triángulos congruentes existe una transformación rígida que lleva uno sobre el otro.

Entre dos triángulos congruentes, sin embargo, puede haber varias congruencias. Por ejemplo, si son isósceles, hay al menos dos.

Dentro del plano, en \mathbb{R}^2 , la situación es diferente. Las transformaciones ortogonales de \mathbb{R}^2 son rotaciones y reflexiones respecto de una recta (la reflexión central $x \mapsto -x$ es una rotación de ángulo π). ellas son, salvo traslación, todas las isometrías. Las rotaciones son las rígidas. Si el plano no es mirado dentro de \mathbb{R}^3 , hay triángulos congruentes que no se identifican por medio de una transformación

rígida. Por ejemplo, $\{\mathbf{i}, 2\mathbf{j}, \mathbf{0}\}$ y $\{2\mathbf{j}, -\mathbf{i}, \mathbf{0}\}$ aceptan como única congruencia la biyección

$$\mathbf{0} \mapsto \mathbf{0}, \quad \mathbf{i} \mapsto -\mathbf{i}, \quad 2\mathbf{j} \mapsto 2\mathbf{j}.$$

En \mathbb{R}^2 se extiende a una isometría solamente con la reflexión $(x, y) \mapsto (-x, y)$. En cambio, mirada en \mathbb{R}^3 , esta reflexión plana se extiende con dos isometrías lineales cuyas matrices son:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La primera es rígida. En \mathbb{R}^2 hay triángulos congruentes que no se unen por un movimiento rígido en el plano.

Triángulos orientados moviéndose sobre una superficie con la cara hacia arriba", están obligados a un comportamiento similar al de los triángulos en el plano.

§4. Presentación formal

Deberemos considerar las proyecciones en \mathbb{R}^3 : $\pi_i : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, que seleccionan la coordenada i -ésima. Por ejemplo, $\pi_3(x, y, z) = z$. También consideraremos la proyección $\pi_0 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida por $\pi_0(x, y, z) = (x, y)$. Confiados en la claridad del contexto, confundiremos (x, y) con $(x, y, 0)$ y usaremos la notación $\mathbf{p}_0 = (x, y, 0)$ para $\pi_0(\mathbf{p}) : \mathbf{p}_0 = \mathbf{p} - \pi_3(\mathbf{p})\mathbf{k}$. Por supuesto, $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ constituyen la base canónica de \mathbb{R}^3 .

Dado un triángulo orientado $T = \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3 \rangle$ que apoya sobre S y "mira hacia arriba", esto es tal que

$$\pi_3(\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_2 \times \mathbf{x}_3 + \mathbf{x}_3 \times \mathbf{x}_1) > 0,$$

llamaremos un *movimiento rígido de T sobre S* a un movimiento rígido $\mathbf{y} = \mathbf{F}_t(\mathbf{x})$, $a \leq t \leq b$, tal que $\mathbf{F}_t(T) := \langle \mathbf{F}_t(\mathbf{x}_1), \mathbf{F}_t(\mathbf{x}_2), \mathbf{F}_t(\mathbf{x}_3) \rangle$ apoya sobre S y mira hacia arriba para todo $t \in [a, b]$.

Para facilitar la lectura, cada vez que haya un triángulo rectángulo isósceles cuyos catetos miden ℓ , orientado hacia arriba, elegiré entre las tres maneras equivalentes de escribirlo aquella que deja el ángulo recto en segunda posición. Lo llamaremos TRIO, por abreviatura de triángulo rectángulo isósceles orientado.

Las dos suposiciones implícitas en la Sección 1 son las siguientes.

H1.: Si $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle$ es un TRIO que apoya sobre S y además $\mathbf{d} = \mathbf{a} + \mathbf{c} - \mathbf{b} \in S^+$, entonces existe un único punto $\tilde{\mathbf{d}} \in S$ tal que $\langle \tilde{\mathbf{d}}, \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ es un TRIO apoyado en S y el cuarto punto " $\tilde{\mathbf{c}} = \mathbf{d}' + \mathbf{b} - \mathbf{a} \in S^-$.

H2.: Si $T = \langle \mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r} \rangle$ y $T' = \langle \mathbf{p}', \mathbf{q}', \mathbf{r}' \rangle$ son dos TRIOs apoyados en S , entonces existe un movimiento rígido $\mathbf{y} = \mathbf{F}_t(\mathbf{x})$, $a \leq t \leq b$, de T sobre S tal que $\mathbf{F}_b(T) = T'$.

Teorema 1. *Bajo las hipótesis H1 y H2, si $\square pqrs$ es un cuadrado de lado ℓ tal que el TRIO $T = \langle \mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r} \rangle$ apoya sobre S y $\mathbf{s} \in S^+$, entonces existe un movimiento rígido de T sobre S que termina en un TRIO $T' = \langle \mathbf{p}', \mathbf{q}', \mathbf{r}' \rangle$ cuyo cuarto vértice $\mathbf{s}' = \mathbf{p}' + \mathbf{r}' - \mathbf{q}' \in S$. Luego el cuadrado $\square \mathbf{p}'\mathbf{q}'\mathbf{r}'\mathbf{s}'$ apoya sobre S .*

Demostración. H1 asegura la existencia de un único punto $\tilde{\mathbf{s}} \in S$ tal que $\langle \tilde{\mathbf{s}}, \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle$ es un TRIO apoyado en S y $\tilde{\mathbf{r}} = \tilde{\mathbf{s}} + \mathbf{q} - \mathbf{p} \in S^-$. Entonces, por H2, existe un movimiento rígido $\mathbf{y} = \mathbf{F}_t(\mathbf{x})$ de T sobre S , definido en un intervalo $[a, b]$ tal que $\mathbf{F}_b(T) = \langle \tilde{\mathbf{s}}, \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle$.

Llamemos $h(t)$ a la altura de $\mathbf{F}_t(\mathbf{s})$ respecto de S . Esto es,

$$h(t) = \mathbf{F}_t(\mathbf{s}) - f(\pi_0(\mathbf{F}_t(\mathbf{s}))).$$

Claramente h es una función continua en el intervalo $[a, b]$.

Nótese ahora que $h(t) > 0$ sii $\mathbf{F}_t(\mathbf{s}) \in S^+$, $h(t) < 0$ sii $\mathbf{F}_t(\mathbf{s}) \in S^-$ y $h(t) = 0$ sii $\mathbf{F}_t(\mathbf{s}) \in S$. Entonces, $h(a) > 0$ porque $\mathbf{F}_a(\mathbf{s}) = \mathbf{s} \in S^+$ y $h(b) < 0$ porque $\mathbf{F}_b(\mathbf{s}) = \tilde{\mathbf{s}} + \mathbf{q} - \mathbf{p} = \tilde{\mathbf{r}} \in S^-$. Luego, por la continuidad de h , el teorema del valor intermedio de Bolzano asegura la existencia de un $c \in (a, b)$ tal que $h(c) = 0$.

Por lo tanto, la restricción de \mathbf{F} al intervalo $[a, c]$ con $T' = \mathbf{F}_c(T)$ es el movimiento cuya existencia se afirma en la tesis. \square

§5. Condiciones suficientes

Para verificar, bajo condiciones adecuadas, la validez de H2, el procedimiento es constructivo. Y para construir un movimiento rígido de T sobre S , siendo $T = \langle \mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r} \rangle$ un TRIO, basta con definir (ya que una transformación rígida queda determinada por tres puntos independientes), una terna de trayectorias continuas sobre S , $T(t) := \langle \mathbf{p}(t), \mathbf{q}(t), \mathbf{r}(t) \rangle$, $t \in [a, b]$, de forma tal que $T(a) = T$ y $T(b) = T'$. Además, para cada t , $T(t)$ debe ser un TRIO. Esta construcción se realiza punto por punto. Para cada t , primero se ubica $\mathbf{p}(t)$, luego $\mathbf{q}(t)$ y, por último, $\mathbf{r}(t)$. En el camino irán surgiendo condiciones sobre S .

Para \mathbf{p} y \mathbf{q} pertenecientes a S , el segmento orientado $\overrightarrow{\mathbf{p}\mathbf{q}}$ no puede ser vertical. Definiremos su argumento como el argumento de su proyección en \mathbb{R}^2 , $\arg(\overrightarrow{\mathbf{p}\mathbf{q}}) = \arg(\mathbf{q}_0 - \mathbf{p}_0)$.

Dados $\mathbf{p} \in S$ y θ , la existencia de un punto $\mathbf{q} \in S$ tal que $\|\mathbf{p} - \mathbf{q}\| = \ell$ y $\arg(\overrightarrow{\mathbf{p}\mathbf{q}}) = \theta$ está asegurada por el teorema de Bolzano, no así la unicidad. En efecto, si $\mathbf{u} = (\cos \theta, \sin \theta)$, hay que considerar la diferencia entre las funciones $f(\mathbf{p}_0) \pm \sqrt{\ell^2 - t^2}$ y $f(\mathbf{p}_0 + t\mathbf{u})$ en el intervalo $[0, 1]$, dependiendo el signo $+$ ó $-$ de que sea $f(\mathbf{p}_0 + \mathbf{u}) \geq 0$ ó $f(\mathbf{p}_0 + \mathbf{u}) < 0$. Entonces el teorema de Bolzano proveerá un punto $\tau \in (0, 1]$ tal que $f(\mathbf{p}_0 + \tau\mathbf{u}) = f(\mathbf{p}_0) \pm \sqrt{\ell^2 - \tau^2}$. Hecho esto, el punto $\mathbf{q} = (\mathbf{p}_0 + \tau\mathbf{u}, f(\mathbf{p}_0 + \tau\mathbf{u}))$ es una solución del problema.

Teorema 2. *Si $\mathbf{p} \in S$ y $0 \leq \theta < 2\pi$, existe $\mathbf{q} \in S$ tal que $\|\mathbf{q} - \mathbf{p}\| = \ell$ y $\arg(\overrightarrow{\mathbf{p}\mathbf{q}}) = \theta$.*

La figura 5 muestra con un gráfico que q puede no ser único.

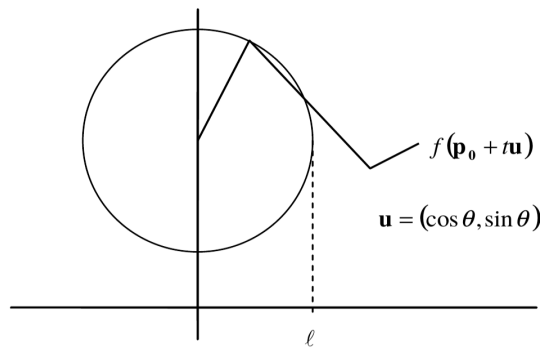


Figura 5

Habrá que admitir la unicidad para tener dependencia continua. Para mejor referencia, la enunciaremos junto con la existencia que ya demostramos.

H3.: Dado $p \in S$ y $\theta \in [0, 2\pi)$, existe un único punto $q \in S$ tal que $\|q - p\| = \ell$ y $\arg(\vec{pq}) = \theta$.

Teorema 3. *Bajo la hipótesis H3, $q = \phi_1(p, \theta)$ es un mapeo continuo.*

Demostración. Supondremos que $\theta > 0$, caso en el que siempre nos podremos situar eligiendo una rama adecuada del argumento. Se debe probar que, dada (p_n, θ_n) convergente hacia (p, θ) , necesariamente $q_n = \phi_1(p_n, \theta_n) \rightarrow q = \phi_1(p, \theta)$. Y para ello basta probar que toda subsucesión de $\{q_n\}$ tiene a su vez una subsucesión que converge hacia q . Sea pues dada una subsucesión de $\{q_n\}$ a la que seguiremos llamando $\{q_n\}$. Como $\|q_n - p_n\| = \ell$ y $\{p_n\}$ es convergente, $\{q_n\}$ debe ser acotada en el cerrado S . Se deduce que tiene una subsucesión $\{q_{n_k}\}$ convergente hacia un punto $q' \in S$ para $k \rightarrow \infty$. Ahora bien, $\{p_{n_k}, \theta_{n_k}\}$ subsucesión de la sucesión convergente $\{(p_n, \theta_n)\}$ converge necesariamente al mismo límite (p, θ) . Entonces, por la continuidad de la norma y del argumento,

$$\begin{aligned} \|q' - p\| &= \lim_{k \rightarrow \infty} \|q_{n_k} - p_{n_k}\| = \ell \text{ y} \\ \arg(q' - p) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \arg(q_{n_k} - p_{n_k}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \theta_{n_k} = \theta. \end{aligned}$$

Pero, por la unicidad, estas dos relaciones demuestran que $q' = q$, lo que completa la prueba. \square

Si aplicamos **H3** con el argumento $\theta + \pi$ (módulo 2π), tendremos otro único punto en la dirección opuesta. Invito al lector a mirar esta cuestión de la manera siguiente:

Dado cualquier plano vertical que pase por un punto $p \in S$ consideremos en él el círculo C de centro p y radio ℓ . El punto más alto (*cenit*) $p + \ell k$ y el más bajo (*nadir*) $p - \ell k$ de este círculo lo dividen en dos semicírculos C_1 y C_2 . $C \cap S$ tiene exactamente dos puntos, uno en cada uno de los semicírculos señalados: $q_1 \in C_1$

y $\mathbf{q}_2 \in C_2$. Estos dos puntos dividen a C en dos arcos: $C^+ \ni \mathbf{p} + \mathbf{k}$ y $C^- \ni \mathbf{p} - \mathbf{k}$. Resulta además que $C^+ \subset S^+$ y $C^- \subset S^-$. Este punto de vista es quien da origen a la condición que permite la validez de **H2**.

Dados dos puntos $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in S$ con $\|\mathbf{p} - \mathbf{q}\| = \ell$, consideramos el círculo $C_{\mathbf{p}\mathbf{q}}$, de centro \mathbf{q} y radio ℓ en un plano perpendicular a $\mathbf{q} - \mathbf{p}$. El cenit y el nadir del círculo (que son extremos de la función π_3 restringida a $C_{\mathbf{p}\mathbf{q}}$ y se alcanzan en las intersecciones con el plano determinado por los puntos \mathbf{p}, \mathbf{q} y $\mathbf{q} + \mathbf{k}$) lo dividen en dos semicírculos, $L_{\mathbf{p}\mathbf{q}}$ y $R_{\mathbf{p}\mathbf{q}}$ caracterizados por

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \in L_{\mathbf{p}\mathbf{q}} &\Leftrightarrow \pi_3 [(\mathbf{x} - \mathbf{q}) \times \mathbf{p} - \mathbf{q}] > 0, \\ \mathbf{x} \in R_{\mathbf{p}\mathbf{q}} &\Leftrightarrow \pi_3 [(\mathbf{x} - \mathbf{q}) \times \mathbf{p} - \mathbf{q}] < 0. \end{aligned}$$

Asumiremos que la superficie S satisface la siguiente hipótesis.

H4.: Dados dos puntos $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in S$ con $\|\mathbf{p} - \mathbf{q}\| = \ell$, $S \cap C_{\mathbf{p}\mathbf{q}}$ tiene exactamente dos puntos: $\mathbf{r} \in L_{\mathbf{p}\mathbf{q}}$ y $\mathbf{r}' \in R_{\mathbf{p}\mathbf{q}}$, que dividen al círculo $C_{\mathbf{p}\mathbf{q}}$ en dos arcos: $C_{\mathbf{p}\mathbf{q}}^+ \subset S^+$ y $C_{\mathbf{p}\mathbf{q}}^- \subset S^-$.

Esta hipótesis define dos mapeos: $\mathbf{r} = \phi_2(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ y $\mathbf{r}' = \phi_2'(\mathbf{p}, \mathbf{q})$. Con la misma técnica que en el Teorema 3 se demuestra:

Teorema 4. Los mapeos ϕ_2 y ϕ_2' son continuos.

Teorema 5. La hipótesis **H4** implica la hipótesis **H2**.

Demostración. Se trata de construir un TRIO $T(t) = \langle \mathbf{p}(t), \mathbf{q}(t), \mathbf{r}(t) \rangle$, con t en algún intervalo $[a, b]$, que comience con $T = \langle \mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r} \rangle$ y termine con $T' = \langle \mathbf{p}', \mathbf{q}', \mathbf{r}' \rangle$.

Sean $\theta_0 = \arg(\overrightarrow{\mathbf{p}\mathbf{q}})$ y $\theta_1 = \arg(\overrightarrow{\mathbf{p}'\mathbf{q}'})$. Si $\theta_0 \neq \theta_1$, con una elección adecuada de la rama del argumento, podemos suponer que $\theta_0 < \theta_1$. Sea $\sigma(t)$, $\theta_0 \leq t \leq \theta_1$ cualquier trayectoria continua simple en \mathbb{R}^2 que une \mathbf{p}_0 con \mathbf{p}'_0 . Definimos:

$$\begin{cases} \mathbf{p}(t) = (\sigma(t), f(\sigma(t))) \\ \mathbf{q}(t) = \phi_1(\mathbf{p}(t), t) \\ \mathbf{r}(t) = \phi_2(\mathbf{p}(t), \mathbf{q}(t)) \end{cases}, \quad \theta_0 \leq t \leq \theta_1$$

En este caso es inmediato verificar que $T(t)$ genera un movimiento rígido de T apoyado sobre S que termina en T' . Todos los mapeos son composición de mapeos continuos.

Si fuera $\theta_0 = \theta_1$, se parametriza σ en cualquier intervalo y sólo se cambia la definición de $\mathbf{q}(t) = \phi_1(\mathbf{p}(t), \theta_0)$. \square

Teorema 6. La hipótesis **H4** implica la hipótesis **H1**.

Demostración. La traslación $M(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{a} - \mathbf{b}$ y su inversa $N(\mathbf{y}) = \mathbf{y} + \mathbf{b} - \mathbf{a}$ establecen una biyección entre $L_{\mathbf{a}\mathbf{b}}$ y $R_{\mathbf{b}\mathbf{a}}$. Una parametrización con el ángulo central de cualquiera de estos arcos, digamos $\gamma: [-\pi, \pi] \rightarrow L_{\mathbf{a}\mathbf{b}}$, con $\gamma(-\pi) = \mathbf{l}$ y $\gamma(\pi) = \mathbf{k}$,

el nadir y el cenit, induce un orden lineal $<$ que se traslada también al arco R_{ba} por la biyección. Obviamente la biyección resulta creciente para este orden.

Por **H4** existe un único punto $\tilde{d} = \phi'_2(\mathbf{b}, \mathbf{a}) \in R_{ba}$ tal que $\langle \tilde{d}, \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ es un TRIO apoyado en S . Su cuarto vértice es $\tilde{d} + \mathbf{b} - \mathbf{a} = N(\tilde{d})$.

Puesto que $\mathbf{d} = M(\mathbf{c}) \in R_{ba} \cap S^+$ y $\tilde{d} \in R_{ba} \cap S$, tenemos $\tilde{d} < \mathbf{d}$. La aplicación de la traslación creciente N nos da $\tilde{d} + \mathbf{b} - \mathbf{a} < NM(\mathbf{c}) = \mathbf{c}$. Esto es, $\tilde{c} < \mathbf{c} \in S$. Luego $\tilde{c} \in S^-$. \square

§6. Mesas rectangulares

Invito a mirar nuevamente la figura 1. El primer movimiento de rotación con eje \overline{ab} nos dejaba de frente a dos triángulos isósceles: $\triangle abc$ y $\triangle d'ba$. El posterior movimiento de arrastre sobre S para trasladar el primer triángulo sobre el segundo, llevaba el lado ab sobre $d'a$. Si partimos de un rectángulo en vez de un cuadrado, el primer movimiento produce dos triángulos rectángulos no isósceles (escalenos les decía la maestra). Los lados ab y $d'a$ son distintos.

La necesaria modificación de la hipótesis **H2**, cambiando TRIOs por triángulos rectángulos con catetos desiguales es falsa. Sobre el final de la Sección 2 se mencionó el ejemplo de los triángulos $\{\mathbf{i}, 2\mathbf{j}, \mathbf{0}\}$ y $\{2\mathbf{j}, -\mathbf{i}, \mathbf{0}\}$ quienes, siendo congruentes, no se pueden unir por un movimiento rígido en el plano. Si pensamos al plano como superficie S en el espacio tampoco se podrán unir si se exige al movimiento rígido que actúe *sobre* S .

Que esta demostración no sirva, no nos habilita a decir que no hay un método similar que permita estabilizar mesas rectangulares.

HUGO ALVAREZ

Universidad Nacional de San Luis (UNSL).

Ejercito de Los Andes 950, D5700HHW, San Luis, Argentina.

(✉) halvarez@unsl.edu.ar

Recibido: 18 de febrero de 2018.

Aceptado: 2 de abril de 2018.

Publicado en línea: 11 de mayo de 2018.

Algo más sobre mesas inestables

Nota editorial por Leandro Cagliero

LA muy lamentable noticia del fallecimiento del Profesor Hugo Alvarez nos sorprendió cuando estábamos haciendo los ajustes para la publicación de su artículo *Una mesa inestable*. Esto nos llevó a tomar la decisión de publicarlo casi textualmente como fue enviado a nuestra revista y es por ello que queremos incluir en esta nota algunos de los detalles que veníamos conversando.

El problema discutido en el artículo de Hugo tiene una rica historia y bibliografía, en el artículo [1], publicado en Math. Intelligencer en 2007, podemos encontrar bastante información. Uno de los resultados demostrados allí es el siguiente.

Teorema 1. Dado un rectángulo R (que corresponde a los extremos de las patas de la mesa que queremos estabilizar) y una función continua $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ (cuyo gráfico representa la superficie donde apoya la mesa) existen cuatro puntos a, b, c y d sobre el gráfico de g tales que el rectángulo $\square abcd$ es congruente a R . Más aún dado un punto $p \in \mathbb{R}^2$ podemos elegir los puntos de modo que el centro de $\square abcd$ esté en el eje vertical que pasa por p .

Es necesaria la hipótesis de que g sea continua, la Figura 1 nos muestra una superficie en la que no se podría estabilizar una mesa.

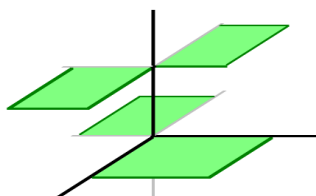


Figura 1

Los autores de [1] obtienen este teorema como consecuencia de un importante resultado de G. Livesay [3] que tiene el siguiente resultado como corolario.

Teorema 2. Sea $f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y sea θ un ángulo menor o igual a 90° . Entonces existen dos diámetros de la esfera S^2 que forman un ángulo θ y tales que f tiene el mismo valor en los 4 extremos de los dos diámetros.

La demostración del Teorema 1 a partir del Teorema 2 es básicamente la siguiente. Primero podemos asumir que las diagonales del rectángulo R tienen longitud 2. Ahora llamamos θ a la medida del ángulo entre las diagonales de R y aplicamos

el Teorema 2 a la función $f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y, z) = z - g(x, y).$$

Obtenemos dos diámetros de la esfera que se cruzan en un ángulo igual a θ , por lo cual sus 4 extremos forman un rectángulo congruente a R . Dado que en estos 4 puntos la función f tiene el mismo valor, digamos r , resulta que si trasladamos verticalmente estos 4 puntos una distancia r obtendremos 4 nuevos puntos a, b, c y d sobre el gráfico de g que forman un rectángulo congruente a R .

El Teorema 2 generaliza lo que originalmente había probado F. J. Dyson para $\theta = 90^\circ$ en [2].

Referencias


- [1] Baritomba, Bill; Löwen, Rainer; Polster, Burkard; Ross, Marty; *Mathematical table-turning revisited*, Math. Intelligencer **29** (2007), no. 2, 49–58. <https://arxiv.org/pdf/math/0511490v1.pdf>
- [2] Dyson, F. J.; *Continuous functions defined on spheres*, Ann. of Math. (2), **54** (1951), 534–536.
- [3] Livesay, George; *On a theorem of F. J. Dyson*, Ann. of Math. (2), **59** (1954), 227–229.

Sección de Problemas

por Juan Pablo Rossetti


Los siguientes problemas están pensados para un público amplio; se trata de situaciones cotidianas, como dos amigas que se encuentran en la entrada del colegio o la de pelar una manzana. En el tercer problema hay que ayudar a sobrevivir a un aventurero que quedó solo en el desierto. Las soluciones se encuentran en la página siguiente.



 **Problema 1.** ENTRADA AL COLEGIO. Dos amigas siempre llegan al colegio antes de que toque el timbre a las 8. Sus padres las traen en cualquier momento entre las 7 y media y las 8, aleatoriamente.




Ellas siempre hacen así: cuando una llega, espera a la otra durante 10 minutos y, si no aparece, entonces entra al colegio. La probabilidad de que se encuentren antes de entrar ¿es mayor o menor que un medio?

 **Problema 2.** CÁSCARA DE MANZANA. A algunas personas les gusta comer las manzanas sin su cáscara o piel, y para pelarlas a veces lo hacen cortando de manera que la cáscara va quedando en una sola pieza, como una tira enroscada sobre la manzana. Si al terminar, la estiran, puede resultar bastante más larga de lo esperado. Quizás esto motivó a que apareciera el récord Guinness de la *cáscara de manzana más larga del mundo*. Por supuesto que para obtener una cáscara larga, hay que ser cuidadosos, pacientes y hábiles. Supongamos que fuésemos capaces de ir cortando la cáscara con 1 mm de ancho arroximadamente, ¿cuál sería el largo de nuestra cáscara? ¿Superaríamos el récord Guinness?



[Aclaración: para este problema, suponemos que nuestras manzanas son esféricas, y que para intentar batir el récord, en lugar de elegir una de 6 cm de diámetro, conseguimos una grande, de 10 cm de diámetro. El sorprendente récord es de ¡52,5 metros!]

 **Problema 3.** EL AVENTURERO DEL DESIERTO. Un aventurero quedó varado, solo, en un gran desierto. Afortunadamente conocía muy bien el (largo) camino para salir de ahí; el único problema era la provisión de agua, indispensable para sobrevivir al recorrer el camino. Son exactamente 184 km y sabe que necesita 1 litro de agua cada 4 kms que camine. Además, sólo puede cargar hasta 30 lts en su mochila. Dispone de 90 lts en donde se encuentra. Sabe que nadie vendrá en su ayuda, así que se dispone a partir. Puede avanzar un poco, dejar agua, regresar para cargar más agua de los 90 lts de los que dispone, etc. ¿Podrá salvarse? Seguramente necesita la ayuda de un buen cálculo matemático para tener chances. ¿Podés ayudar al aventurero perdido?

¡Sucesiones al toque!

¿Cuál creés que es el próximo número en las siguientes sucesiones y por qué? ¿Te animás a encontrar más términos de estas sucesiones? ¿Y una fórmula general?

$$\{a_n\} : 3, 8, 1, 6, 11, 4, 9, 2, 7, 0, 5, \dots$$

$$\{b_n\} : 0, 1, 1, 2, 4, 7, 13, 24, 44, 81, 149, \dots$$

$$\{c_n\} : 4, 11, 30, 85, 248, 735, 2194, \dots$$

$$\{d_n\} : 2, 6, 30, 210, 2310, 30030, 510510, \dots$$

Podés encontrar las soluciones en la página 60.



SOLUCIONES

✓ **Solución 1.** La probabilidad de que se encuentren es de $\frac{5}{9}$, así que es mayor que $\frac{1}{2}$. Una forma de verlo, es graficar en el plano cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ el cuadrado de 30×30 dado por el intervalo $[0, 30]$ producto con el intervalo $[0, 30]$. Allí, la primera coordenada representa la hora a la que llega una de las amigas y la segunda coordenada la hora a la que llega la otra amiga. Se puede sombrear la región del cuadrado correspondiente a horarios en las que se encuentran y luego se ve que la región sombreada es de área $\frac{5}{9}$ del total del área del cuadrado. Como los horarios de llegada son aleatorios e uniformes, esta proporción entre las áreas representa la probabilidad pedida en el problema.

✓ **Solución 2.** No alcanzaremos a batir el récord de este modo, aunque sí obtendremos una cáscara muy larga, de unos 30 mts de largo. El área (o superficie) de una esfera es de $4\pi r^2$ (r =radio), o lo que es lo mismo πd^2 (d =diámetro), por lo que si nuestra manzana tiene 10 cm de diámetro, la superficie de la cáscara sería de aproximadamente 314 cm^2 , lo cual nos daría un largo máximo de 31,4 mts de largo para nuestra cáscara cortada con 1 mm de ancho.

[Nota: en realidad, el largo sería un poco menor, puesto que nuestra cáscara no sería una cinta plana, sino que viene de ir cortando algo esférico, con lo que se perdería un poco de área al pasar de la esfera al plano. ¿Te animás a estimar cuánto podría ser la pérdida en este caso?]

✓ **Solución 3.** ¡Sí, puede salvarse! Con lo justo. La forma para salvarse es así: recorre un primer trayecto de 24 km cargando 30 lts de agua, deja ahí 18 lts y vuelve al punto de partida. Hace lo mismo una segunda vez. Luego recorre por 3ra vez esos primeros 24 km, donde al finalizarlos tendrá allí 60 lts de agua. A continuación, recorre 40 km, partiendo con la carga de 30 lts de agua, deja 10 lts al final de estos 40 km y se vuelve. Sale nuevamente con otros 30 lts, recorre esos 40 km, y ahora se encuentra con 30 lts de agua, habiendo recorrido 64 de los 184 km. De modo que le quedan $184 - 64 = 120$ km por recorrer y 30 lts de agua. Justo para poder hacerlo directamente, sin tener que regresar más.

La idea para resolverlo es pensar que los regresos le harán consumir mucha agua, por lo que conviene minimizarlos. Para eso, conviene dividir el camino en 3 partes. En la primera parte, sabemos que hará 3 veces el mismo recorrido de ida, más los dos regresos, son 5 veces. Esto es así porque solo puede llevar consigo

hasta 30 lts de agua, de los 90 que tiene. Entonces planteamos esa primera etapa como para terminarla con justo 60 lts de agua. La ecuación sería $90 - 5x = 60$, donde x representa la cantidad de kms a recorrer, multiplicada por 4, ya que se recorren 4 km por litro de agua consumida. La solución es $x = 6$, por lo que conviene recorrer 24 km en la primera etapa. Quedaron 60 lts para iniciar la 2da etapa, y queremos dejar justo 30 lts para la 3ra etapa, por lo que ahora la ecuación es $60 - 3y = 30$, puesto que en esta etapa los $4y$ kilómetros se recorren 3 veces. Así, la solución es $y = 10$, por lo que la 2da etapa tiene $4y = 40$ kms.

Soluciones de ¡sucesiones al toque!

- $a_{12} = 10$. Es una serie aritmética, que comienza en 3 y suma 5 en cada paso, pero módulo 12, o sea, cuando superamos el 12, nos quedamos con el resto del número al dividirlo por 12. Luego sigue $a_{13} = 3 (= 10 + 5 - 12)$, $a_{14} = 8$, etc.
- $b_{12} = 274$. Son los *números tribonacci*. Para obtener el siguiente término se suman los últimos tres números de la sucesión (no los últimos dos como en los números de Fibonacci).
- $c_8 = 6569$. La sucesión es $c_n = 3^n + n$ con $n \in \mathbb{N}$.
- $d_8 = 9699690$. La sucesión es el producto de los primeros primos, es decir $d_n = p_1 p_2 \cdots p_n$, donde p_n es el n -ésimo primo.

Viene de la página 58.

INFORMACIÓN PARA AUTORES

La *Revista de Educación Matemática* recibe artículos en cualquiera de sus secciones que no hayan sido ya publicados. Se espera que tengan excelente nivel de redacción, claridad en la exposición de las ideas, coherencia y cohesión.

Los autores que deseen publicar sus artículos en la *Revista de Educación Matemática* deberán enviar un archivo LibreOffice, Word o Latex a la dirección **revm@famaf.unc.edu.ar** de correo electrónico.

El archivo deberá estar escrito en hoja tamaño A4, con sus cuatro márgenes de 2,5 cm, interlineado sencillo y letra Times New Roman de 11 pt. En la medida de lo posible evitar el uso de notas al pie. En la primera página se informará:

- Título del trabajo;
- Nombre, filiación académica y correo electrónico de todos los autores;
- Categoría propuesta (Matemática, Aportes para la enseñanza, Investigación, Reseña).

Los artículos de *Matemática* y *Aportes para la enseñanza* pueden ser de hasta 12 páginas (excepcionalmente se aceptarán artículos más extensos), incluida bibliografía, tablas y figuras.

Los artículos de *Investigación* pueden ser de hasta 20 páginas, incluida bibliografía, tablas y figuras. Deben incluir: resumen (en español e inglés), problemática investigada, preguntas u objetivos de investigación, referentes teóricos y antecedentes, metodología de investigación, resultados, análisis, conclusiones y bibliografía. El resumen, tanto en español como en inglés, puede tener una extensión máxima de 200 palabras y no incluir referencias bibliográficas.

Las *Reseñas* pueden ser de hasta 4 páginas.

Para la publicación de Anuncios enviar la información completa al correo electrónico indicado anteriormente.

Más información en la página <https://revistas.unc.edu.ar/index.php/REM/information/authors>.