Revista de Educación Matemática

Registro Nacional de la Propiedad Intelectual N° 168024

ISSN 0326-8780 (versión impresa)

ISSN 1852-2882 (en línea)

https://revistas.unc.edu.ar/index.php/REM

Revista de Educación Matemática

Volumen 33, Nº 2 – 2018

ÍNDICE

También encontrarás curiosidades bajo los títulos *¿Sabías que...?* y *¡Sucesiones al toque!*

Editorial

DURANTE los diez primeros días de agosto se llevó a cabo el Congreso Internacional de Matemáticos, ICM2018 por sus siglas en inglés, en Río de Janeiro. El ICM es el mayor congreso de matemática del mundo, se realiza cada cuatro años, y ésta fue la primera vez, en más de 100 años de historia, que este congreso de desarrolla en Latinoamérica y en el Hemisferio Sur.

Durante los ICM se entregan la mayoría de los premios más prestigiosos en matemática: las Medallas Fields, el Premio Nevanlinna, el Premio Gauss, la Medalla Chern y el Premio Leelavati.

Las Medallas Fields son un reconocimiento a la labor científica en matemática de investigadores jóvenes (los premiados deben tener menos de 40 años) y, como premio, es tan prestigioso como el Premio Nobel. Los premiados este año fueron Caucher Birkar, nacido en Irán y actualmente Profesor en la Universidad de Cambridge (Inglaterra); Alessio Figalli, italiano y actualmente Profesor en la Escuela Politécnica Federal de Zúrich (Suiza); Peter Scholze, alemán y actualmente Profesor en la Universidad de Bonn (Alemania); y Akshay Venkatesh, nacido en Australia y actualmente Profesor en la Universidad de Stanford (EEUU).

El Premio Nevanlinna es una distinción a la labor científica, también de investigadores menores a 40 años, por contribuciones excepcionales en la matemática vinculada con los diversos aspectos de la informática. El premiado fue Constantinos Daskalakis, originario de Grecia y actualmente Profesor del MIT (Instituto Tecnológico de Massachusetts, EEUU).

El Premio Gauss y la Medalla Chern son premios a la trayectoria científica en matemática, no tienen límite de edad, y el Premio Gauss reconoce especialmente el impacto de la investigación matemática en la vida cotidiana. Los ganadores de estos premios fueron, respectivamente, David Donoho (Profesor en la Universidad de Stanford, EEUU) y Masaki Kashiwara (Profesor en la Universidad de Kioto, Japón).

Los resultados científicos de estos siete matemáticos premiados son extraordinarios y es muy breve esta editorial como para hacer una descripción de ellos.

Invitamos a nuestros lectores a enviarnos artículos que nos describan, en términos accesibles para la mayoría de la comunidad docente de matemática, algunos de estos magníficos logros.

Además de estas distinciones científicas, se entregó el Premio Leelavati, que es un reconocimiento a una labor muy destacada en la difusión pública de la matemática, tanto como disciplina científica como en su papel en el desarrollo humano. El galardonado fue Ali Nesin, profesor de la Universidad Bilgi de Estambul (Turquía) y fundador de la "Nesin Mathematics Village". Esta Villa Matemática se encuentra a 80 km de Esmirna (segundo mayor puerto de Turquía) y, según la descripción de su sitio web, "*...es un lugar donde jóvenes y mayores aprenden, enseñan y piensan sobre matemática en un ámbito lejano y pacífico. Sin pretensiones ni ostentación, las instalaciones hechas de roca, paja y barro emiten un simple aire de bienvenida...*". El complejo tiene casi seis hectáreas y en sus encantadoras instalaciones cuenta con habitaciones para alojar 150 personas y espacio para instalar carpas como para 200 personas más. Este magnífico emprendimiento comenzó en 2007 y fue llevado adelante muy a pulmón por Ali Nesin con la ayuda de numerosas donaciones. Actualmente más de 5000 estudiantes, desde niños de escuela primaria a estudiantes universitarios, asisten anualmente a algún curso o taller. Es tan importante y conocida la Villa Matemática de Ali Nesin en Turquía que es visitada por numerosos turistas interesados en la educación. Al recibir su premio, Ali Nesin decía lo siguiente sobre cómo encarar un problema de matemática:

> *... yo les digo a los estudiantes:*
> *'no traten de resolver el problema, traten de entenderlo.*
> *Si entienden el problema, la solución aparecerá naturalmente,*
> *brotará del papel. No traten de resolverlo. No busquen su respuesta.*
> *Solo traten de entender el problema.'*
> *Yo les enseño que la respuesta es lo menos importante, lo que importa es la idea,*
> *es el porqué...*

El premio Leelavati, que en 2018 tuvo como galardonado a Ali Nesin, fue otorgado a Adrián Paenza en el ICM2014, en Seul, por su destacada labor de divulgación de la matemática en Argentina a través de sus libros y programa televisivos. El primer artículo que publicamos en este número tiene a Adrián Paenza y Carlos D'Andrea como autores y nos relata la historia de un juego muy interesante de cartas con mucha matemática. La historia refleja claramente la enseñanza de Ali Nesin citada arriba.

En en segundo artículo, Alejandro Tiraboschi analiza la definición y el problema de calcular el centro geográfico de regiones contenidas en una esfera. El artículo nos brinda detalles rigurosos de la matemática involucrada en este problema, sin dejar de lado el contexto de la geografía, y nos presenta algoritmos que el autor utiliza para calcular efectivamente el centro geográfico de algunas regiones del globo terráqueo, en particular de países, entre ellos Argentina.

Finalmente, Juan Carlos Dalmasso, director de la Olimpíada Matemática Argentina, nos transmite algunas reflexiones profundas sobre la enseñanza de la matemática analizando la vigencia de los conceptos expuestos por el Dr. Alberto Calderón en una conferencia durante la Reunión Anual de la Unión Matemática Argentina en 1986.

Leandro Cagliero

NOTA: Es muy importante para la RevEM contar con la colaboración de ustedes a través del envío de contribuciones de calidad para publicar. Solicitamos enviar los artículos preferentemente a través del sistema en la página web, pero si tienen inconvenientes pueden hacerlo a la dirección de correo electrónico que figura abajo.

Página web: https://revistas.unc.edu.ar/index.php/REM/index

Correo electrónico: revm@famaf.unc.edu.ar

Revista de Educación Matemática
Volumen 33, N° 2 (2018), páginas 7 – 21
Unión Matemática Argentina - Famaf (UNC)

SOBRE CARTAS, DESCARTES, Y UN PROBLEMA DE JOSEPHUS

Carlos D'Andrea y Adrián Paenza

§1. Introducción. El Problema

Muchos de los problemas de matemática que Ud. encuentra en un libro, en la contratapa de un diario, o en un desafío de esos para entretenerlo arriba del bus, metro o tren, tienen orígenes insólitos, y una etapa de elaboración que incluye a varias personas que van "degustando" y modificando el enunciado junto con sus posibles soluciones. Como si todo un equipo de cocina estuviera dedicado a la creación de un plato que Ud. degustará al final. Como suele ocurrir en la gastronomía, Ud. no puede ver lo que ocurre en la cocina (y a veces es mejor que no lo vea), pero es un proceso realmente interesante que merece la pena documentarse y en algunos casos compartirse. Aquí le presentamos uno de ellos.

A fines de marzo de 2014, Adrián le escribió el siguiente mensaje a Carlos:

> *...te escribo en este caso porque quería contarte un problema que me enviaron, cuya solución CONOZCO, pero no porque la hubiera detectado yo, sino porque fue incluida por el señor que me la presentó (Luis Crippa, un lector de Página 12).*
>
> *Me resulta muy interesante el problema y lo voy a escribir acá, pero me interesaría saber cómo pensarlo porque hasta acá, no pude llegar a la solución que él propone y que es hiper-elegante y muy interesante también... pero estoy seguro que a vos (o a Martín Sombra, o a alguno de tus amigos de la Universidad de Barcelona) se les va a ocurrir, y entonces me dará oportunidad de poder escribir sobre el problema. Acá va...*

Suponé que hay un mazo de cartas numeradas y ordenadas en forma creciente. No importa el número, digamos que están apiladas de esta forma:

$$1, 2, 3, 4, 5, \ldots, (n - 1), n.$$

El proceso que se le hace a este mazo es muy sencillo: uno toma el mazo, pone la primera carta al final de la pila (es decir, la primera ahora pasa a ser la última carta en el mazo), y tira (descarta) la segunda, pone la tercera al final del mazo, y tira la cuarta, pone abajo la quinta, y descarta la sexta... etc... etc.... y así se repite esto hasta que queda una sola carta. El objetivo es encontrar la última carta en función de n, el número inicial de cartas.

Las primeras en descartarse son las pares, claramente, pero llegar hasta la que era la última carta en la formación inicial, dependerá de la paridad y otras cosas de ese tipo. De hecho, tengo soluciones parciales (y también la solución final, pero no sé cómo pensarlo)... Nada más por ahora... Si tenés tiempo y ganas... allí fue.

Le sugerimos "jugar" un rato a este juego con un mazo con pocas cartas (es decir, n pequeño) para asegurarse de haber entendido las reglas del mismo. Por ejemplo, si uno tuviera un mazo de 5 cartas ordenadas así: 1-2-3-4-5, la secuencia de cartas descartadas sería: $2, 4, 1, 5$. Así que la carta "ganadora" -la que nunca fue retirada del mazo- sería la número 3. Y si hubieran 8 cartas, se descartarían en este orden: $2, 4, 6, 8, 3, 7, 5$, y "ganaría" la carta número 1.

§2. Un problema recuerda a otro

Como en la casa de Carlos no hay mazos de cartas (y Carlos estaba en su casa), tuvo que buscarse un computadora que simulara el juego. Unos minutos más tarde, con unas líneas de código, consiguió calcular la siguiente tabla. Llamaremos f a la función que a cada n le asigna la carta "ganadora" del juego, es decir que $f(n)$ es la última carta que queda luego de realizar el descarte de todas las otras. La tabla de los primeros valores de f es esta:

n	$f(n)$
1	1
2	1
3	3
4	1
5	3
6	5
7	7
8	1
9	3
10	5

n	$f(n)$
11	7
12	9
13	11
14	13
15	15
16	1
17	3
18	5
19	7
20	9

Los números que aparecen en esta tabla en principio no dicen mucha cosa, o al menos a Carlos no le decían mucho. ¿A usted sí? Este es un buen momento para que piense, a ver si la tabla le sugiere algo, si encuentra algún patrón, fórmula, etc... Está claro (y le proponemos demostrar esto que sigue como ejercicio) que si n es una potencia de 2, la última carta que quedará en el "mazo" será la número 1, es decir $f(n) = 1$ si $n = 2^k$ para algún entero no negativo k.

Pero había algo en esta tabla que le sonaba familiar a Carlos, y se le vino a la cabeza el Problema 3 de la 29° Olimpíada Matemática Internacional que tuvo lugar en Canberra, Australia, en 1988, que dice así [4]:

Una función g se define sobre los enteros positivos como

$$\begin{aligned} g(1) &= 1, \\ g(3) &= 3, \\ g(2n) &= g(n), \\ g(4n+1) &= 2g(2n+1) - g(n), \\ g(4n+3) &= 3g(2n+1) - 2g(n). \end{aligned}$$

Determina todos los enteros positivos n menores o iguales que 1988 para los cuales $g(n) = n$.

Este enunciado poco tiene que ver con cartas y descartes, pero lo que en realidad recordaba Carlos no era tanto el enunciado del problema, sino la solución que encontró (no él, la que encontró escrita por ahí) del mismo y que comenzaba con algo así: "hagamos una tabla de los primeros valores de g". Y la tabla era ésta:

n	$g(n)$
1	1
2	1
3	3
4	1
5	5
6	3
7	7
8	1
9	9
10	5

n	$g(n)$
11	13
12	3
13	11
14	7
15	15
16	1
17	17
18	9
19	25
20	5

Que tampoco le decía mucho a Carlos esta tabla. Lo bueno venía en el paso siguiente de la resolución que encontró él de ese problema: "Escribamos ahora en binario esta tabla", es decir, escribamos los valores de n y $g(n)$ en base 2:

n	$g(n)$
1	1
10	1
11	11
100	1
101	101
110	11
111	111
1000	1
1001	1001
1010	101

n	$g(n)$
1011	1101
1100	11
1101	1011
1110	111
1111	1111
10000	1
10001	10001
10010	1001
10011	11001
10100	101

Y acto seguido venía en esa resolución que encontró Carlos, la frase "conjeturamos inmediatamente que $g(n)$ = el número que resulta de escribir 'el reverso' de n en base 2". Observe la tabla y verá que "al dar vuelta" (es decir leer de derecha a izquierda) los dígitos de -por ejemplo- 1100, se obtiene el número 0011, que misteriosamente coincide con el valor de g de este número. Y así con todos los otros pares de la tabla. Una vez hecha esta conjetura, no es difícil demostrarla por inducción utilizando las propiedades de g que se dan en el enunciado, y el Problema 3 de la IMO se convierte en "calcular cuántos números enteros positivos menores o iguales que 1988 son capicúas en base 2", un ejercicio fácil de resolver.

§3. La Conjetura

Volviendo a nuestro problema, como a Carlos no se le ocurría ningún patrón mirando la tabla de $f(n)$ en notación decimal, hizo lo único que se le vino a la cabeza en ese momento, la pasó a binario:

n	$f(n)$
1	1
10	1
11	11
100	1
101	11
110	101
111	111
1000	1
1001	11
1010	101

n	$f(n)$
1011	111
1100	1001
1101	1011
1110	1101
1111	1111
10000	1
10001	11
10010	101
10011	111
10100	1001

Con todo el "pre-calentamiento" hecho hasta aquí, uno tendría que estar tentado a decir "conjeturamos inmediatamente que...." pero... ¿qué es lo que conjeturamos? Le sugerimos a Ud. que piense un rato estudiando esta tabla para ver si aparece alguna conjetura antes de seguir.

Ahora viene la nuestra.

Conjetura 1. *$f(n)$ es el número que resulta de "quitarle" a n -escrito en binario- el primer dígito de la izquierda, y colocarlo como último dígito (a la derecha).*

Por ejemplo, si el número es -en binario- 100111, al quitarle el dígito de la izquierda y agregarlo al final de todo, queda 001111, o sea que $f(100111)$ debería ser 11111, lo cual se puede confirmar rápidamente. Y claramente si n es una potencia de 2, en binario tendría que escribirse como 1000...000, y de allí sale rápidamente que

$$f(n) = f(1000\ldots000) = 000\ldots0001 = 1$$

que es lo que ya sabíamos.

Quizás Ud. haya llegado a alguna conjetura pero que no involucra para nada los números binarios y se sienta desanimado. No tire por la borda lo que haya pensado porque quizás está en lo cierto, o por buen camino. Hay una manera de enunciar la conjetura de más arriba sin pasar por la escritura binaria.

Conjetura 2. *Si $n = 2^j + k$ con $0 \leq k < 2^j$, entonces $f(n) = 2k + 1$.*

Le proponemos como ejercicio demostrar que ambas conjeturas dicen la misma cosa. Para ello es suficiente con recordar que todo entero positivo n se escribe de manera única como $n = 2^j + k$ con j, k enteros no negativos y $0 \leq k < 2^j$. De hecho, 2^{j+1} es la primer potencia de 2 mayor que n, y $j + 1$ es la cantidad de dígitos que tiene n en base 2.

¿Cómo se podría demostrar cualquiera de las conjeturas de más arriba? El Problema 3 de la IMO de 1988 se resolvía rápido"porque habían algunas propiedades de la función g que uno podía utilizar luego para demostrar por inducción que esa función daba vuelta todos los dígitos en binario del número inicial, pero en nuestro juego no existen tales propiedades. ¿O sí? Quizás habría que encontrar algunas propiedades de f que también cumpla esa operación extraña de quitar un dígito en binario y trasladarlo hacia la derecha. Jugando un poco con sus propiedades, Carlos encontró las siguientes características de tal función. No es difícil de demostrar por inducción el enunciado siguiente, que también dejamos como ejercicio para el lector:

Proposición 1. *Si h se define sobre los enteros positivos como:*

- $h(1) = 1$,
- $h(2n) = 2h(n) - 1$,
- $h(2n + 1) = 2h(n) + 1$,

entonces $h(n)$ es el número que resulta de quitarle a n su dígito más significativo (el de la izquierda) cuando se lo escribe en base 2, y agregarlo como dígito de las unidades (el de la derecha), siempre en la misma base.

Obviamente que "el resto" del trabajo es mostrar que $h(n)$ y $f(n)$ -nuestra función que cuenta las cartas ganadoras- son la misma función. Está claro que $f(1) = 1 = h(1)$, y también es fácil de demostrar que $f(2n) = 2f(n) - 1$, ya que esto solamente dice que al comenzar con un mazo con un número par ($2n$) de cartas, después de la primer pasada nos quedan solamente las cartas impares. O sea que la ganadora de ambos juegos –de un mazo de $2n$ cartas numeradas de 1 a $2n$ y de un mazo de n cartas numeradas $1, 3, 5, 7, \ldots$– es la misma carta, solo que hay que "traducir" la numeración natural de la primera con respecto a la segunda, y el "diccionario" justamente es $f(2n) = 2f(n) - 1$. En la sección que sigue, se muestra con más detalle este argumento.

La que no resultaba fácil (al menos no le resultaba fácil a Carlos) de mostrar era la otra propiedad, que $f(2n + 1) = 2f(n) + 1$. Luego de varios frustrados intentos, Carlos decidió hacer caso a Adrián y llevar el problema a sus amigos de la Facultad de Matemáticas e Informática de la Universidad de Barcelona, Martín Sombra -mencionado por Adrián en su mensaje inicial- uno de ellos. Martín no estaba ese día por allí, pero comparte oficina con Juan Carlos Naranjo, quien tuvo que escuchar las exploraciones, conjeturas y frustraciones de Carlos, y como era de esperarse una hora y media más tarde Juan Carlos tenía el problema resuelto.

§4. Solución de Juan Carlos Naranjo

Recordemos que $f(n)$ es la carta que queda última. Está claro que $f(1) = 1$. Vamos a demostrar estas dos igualdades:

$$f(2n) = 2f(n) - 1 \quad \text{y} \quad f(2n + 1) = 2f(n) + 1.$$

Veamos la primera de ellas. Después de la primer "pasada" con un mazo de $2n$ cartas, quedan éstas: $1, 3, 5, \ldots, 2n + 1$. Notar que obviamente hay n cartas después de la primer ronda, y que el juego comienza otra vez como si fuera desde uno, pero en lugar de tener las cartas numeradas del 1 al n, son todas impares. Luego, jugar con cualquiera de los dos mazos (el que tiene los primeros n números y el que tiene los primeros n números impares) es esencialmente lo mismo si uno hace la correspondencia:

$$\begin{aligned} 1 &\longleftrightarrow 1 \\ 2 &\longleftrightarrow 3 \\ 3 &\longleftrightarrow 5 \\ &\ldots \\ m &\longleftrightarrow 2m - 1 \\ &\ldots \\ n &\longleftrightarrow 2n - 1. \end{aligned}$$

Y bajo esta correspondencia se tiene entonces que en el mazo de n cartas quedará última en el proceso de descarte la carta m (i.e. $f(n) = m$), si y solamente si la última carta que quedará en el proceso de descarte en un mazo de $2n$ cartas es la $2m - 1$, o sea

$$f(2n) = 2m - 1 = 2f(n) - 1.$$

Para ver la segunda igualdad, es decir que $f(2n+1) = 2f(n)+1$, hacemos lo mismo que antes: en el proceso de descarte después de la primer pasada al mazo con $2n+1$ cartas quedarán: 1, 3, 5, . . ., $2n + 1$, pero notar que aquí el 1 se tacha de la lista ya que aparecerá en posición par durante la segunda pasada, con lo que en realidad es como si comenzáramos el juego con 3, 5, ... $2n + 1$ y este juego será equivalente al inicial 1, 2, ..., n vía la correspondencia $m \longleftrightarrow 2m + 1$ como arriba. De aquí se deduce entonces la segunda identidad,

$$f(2n + 1) = 2f(n) + 1$$

y esto completa la demostración.

Con la resolución de Juan Carlos, estamos en condiciones de demostrar lo que queríamos:

Demostración de la Conjetura 2: Por doble inducción, primero sobre j y luego sobre k. Para $j = 0$ es obvio ya que k solo puede valer 0, y el enunciado es trivial en este caso.

Si $j > 0$, usamos ahora inducción en $k = 0, \ldots, 2^j - 1$. Para $k = 0$, se tiene, por la primera de las propiedades demostradas de f,

$$f(2^j) = 2f(2^{j-1}) - 1 = 2 - 1 = 1.$$

Y en general, si $0 < k < 2^j$, entonces hay dos opciones:

- k es par, es decir $k = 2t$ con $t < 2^{j-1}$. Aquí, usamos la primera de las propiedades de f junto con la hipótesis inductiva, calculamos

$$\begin{aligned} f(2^j + k) &= f(2^j + 2t) \\ &= f(2(2^{j-1} + t)) \\ &= 2f(2^{j-1} + t) - 1 \\ &= 2(2t + 1) - 1 \\ &= 4t + 1 \\ &= 2k + 1, \end{aligned}$$

  y la identidad vale en este caso.

- k es impar, es decir $k = 2t + 1$ con $t < 2^{j-1}$. Aquí usamos la segunda de las propiedades demostradas arriba de f junto con la hipótesis inductiva, y nos queda

$$\begin{aligned} f(2^j+k) &= f(2^j+2t+1) \\ &= f(2(2^{j-1}+t)+1) \\ &= 2f(2^{j-1}+t)+1 \\ &= 2(2t+1)+1 \\ &= 2k+1, \end{aligned}$$

que es lo que queríamos demostrar.

Carlos recopiló toda esta información y se la pasó a Adrián con el mensaje siguiente:

hola Adrian,
te escribo con copia a Juan Carlos Naranjo, quien acaba de rematar tu problema de las cartas. Yo a lo que llegué ayer fue –después de calcular varios ejemplos a mano– que la fórmula debería ser $f(2^j+k)=2k+1$ *con* k *entero entre 0 y menor que* 2^j *(todo entero positivo se puede escribir de manera unica así, y aquí* $f(m)$ *es la última carta que "sobrevive" al proceso en una baraja de* m *cartas). Estuve por un buen rato intentando una demostración por inducción pero no me salió.*

Este mediodía le pasé toda esta información a JC (problemas + conjetura + ensayos de demostración), y una hora y media mas tarde, me viene él con una demostración que es relativamente fácil de hacer de estas identidades:

$$\begin{aligned} f(2m+1) &= 2f(m)+1 \\ f(2m) &= 2f(m)-1 \end{aligned}$$

(esto lo podés demostrar esencialmente mirando las dos primeras "corridas" del proceso de descarte de la baraja).
Con ésto, sale fácil por inducción que

$$f(2^j+k)=2k+1,$$

que es lo que se nota cuando uno hace la lista de los primeros valores de f*.*

Ahora tenemos curiosidad por saber cuál es la solución que tenés vos. Después te paso con más cuidado una demostración de las identidades de Juan Carlos.
Un abrazo,
Carlos

Lo interesante del mensaje que envió Carlos a Adrián fue que se había omitido totalmente la escritura en base 2, como si Carlos tuviera "vergüenza" de admitir que algo así de complicado podría ocurrir. Por otro lado, Adrián decía tener "la solución" así que o iba por allí la cosa o tendría que simplificarse. El equipo Barcelona estaba intrigado. La respuesta de Adrián no tardó en llegar:

... te escribo desde el teléfono y por eso ni puedo ser extenso ni preciso pero después amplío, pero lo impactante es la solución que me mandó el lector que me apuro a contarte y ver si a ustedes se les ocurre por qué es cierta:

Si uno escribe el número de cartas en base dos, y luego hace la siguiente modificación:
Saca el uno del principio de esa escritura y la agrega al final, el nuevo número que queda escrito en base 2 es la única carta resultante.
Por ejemplo, si $(1101)_2 = 13$ *es el número inicial de cartas, saco el primer "uno" y lo agrego al final, obtengo 1011 que es 11; lo mismo con, digamos,* $24 = (11000)_2$ *lo transformo en* $(10001)_2 = 17$. *Comprobalo vos.*

Espero haber hecho bien las cuentas porque estoy a punto de tomar un subte pero esa es la idea. Vi la demostración de Juan Carlos Naranjo (agradecésela por favor). Está muy muy buena, pero es imposible que la escriba en el diario... en uno de los libros... quizás, pero ciertamente no la puedo publicar en Página 12 porque tendría que escribir un 'tratado' primero para escribir el número en binario, y después, hablar de inducción y doble inducción... transforma en virtualmente imposible para mí escribir el problema...
SIN EMBARGO, me pareció precioso el problema, la demostración y las reflexiones de ustedes...
COMO SIEMPRE, gracias!!!

§5. La solución de Alejandro de Miquel

A Carlos y a Juan Carlos también les pareció precioso el problema, y como en ese momento en la facultad estaban los dos a cargo del entrenamiento de un grupo de alumnos que iban a participar en un torneo universitario de matemáticas, les propusieron este problema como parte del entrenamiento. La idea era ver qué podían hacer, y con alguna esperanza de que existiera alguna simplificación de la resolución del problema. Pasaron varios días, y no hubo respuesta alguna por parte de los alumnos, hasta que una noche se encuentra Carlos en su bandeja de correo electrónico con un texto de unas pocas líneas escrito por uno de ellos, Alejandro de Miquel, donde en la primer mitad del mismo se demostraba cuidadosamente (por inducción) que si n es una potencia de 2, entonces $f(n) = 1$. Carlos no le prestó mucha atención a esa resolución. Seguramente Alejandro entendió mal el enunciado o estaba resolviendo casos particulares. Pero al cabo de unos días hubo algo que lo hizo volver al escrito y mirarlo más detenidamente. Lo transcribimos textualmente aquí para que Ud. pueda apreciarlo y sacar sus conclusiones.

Observemos primero que si tenemos $n = 2^m$ *cartas, entonces la carta que nos quedará al final será la número 1. Esto se puede ver por inducción: está claro que si tenemos* $n = 2^0 = 1$ *cartas, entonces la última que queda es la número 1.*

> *Supongamos que esto es cierto para un cierto 2^k, $k \in \mathbb{N}$. Supongamos que tenemos una pila de 2^{k+1} cartas. Las primeras 2^k cartas que quitaremos serán todas las que sean de número par. Tras haber quitado la carta número 2^{k+1} nos quedará una pila de 2^k cartas cuya primera carta será la carta número 1, que, por hipótesis de inducción, será con la que nos acabaremos quedando al final de todo.*
>
> *Por lo tanto, deducimos que si $n = 2^m + k$, con $k \leq 2^m - 1$, entonces la carta que nos quedará al final será la misma que esté encima de la pila justo tras haber quitado las k primeras cartas. Como quitamos una carta de cada dos, la carta que buscamos será la número $2k + 1$ (observemos que $2k + 1 \leq 2^m + k$).*

Lo que Alejandro nos estaba "enseñando" en la última parte de su razonamiento era lo siguiente: si yo tengo un mazo de 2^m cartas, sé muy bien que la carta ganadora es la número 1. Si mi mazo tiene más cartas que 2^m (por ejemplo, $2^m + k$ con $k > 0$), con sacar las k primeras cartas sabré con seguridad que la carta ganadora será aquella que quede al principio del mazo (ya que en ese momento tendré un mazo con 2^m cartas, y en esos mazos siempre "gana" la primer carta). Calcular cuál es esa carta, la que queda primera luego de descartar (nunca mejor dicho) k cartas, es esencialmente hacer la operación $f(n)$ que describimos más arriba.

¿No le parece maravilloso ese razonamiento? No necesita Ud. ni pasar por binario, ni por doble inducción, ni por nada. La resolución de Alejandro fue compartida y celebrada por Carlos y Juan Carlos, y luego transmitida a Adrián:

> *... En nuestra facultad tenemos un grupo de alumnos (unos 4 o 5) que van a competencias de matemática universitarias, y junto con Juan Carlos nos encargamos un poco de su entrenamiento. Les propuse el problema de las cartas que me pasaste hace un par de semanas, y mirá la solución elegantísima que encontró uno de ellos (va en el archivo adjunto).*
>
> *Esencialmente se basa en esta idea (que me costó un rato entenderla leyendo su escrito pero porque era tan simple!): si yo sé que cuando la baraja tiene 2^m cartas la que está al principio es la que va a "ganar" (este argumento es fácil de mostrar), lo único que tengo que hacer es "sacarme tantas cartas de encima" hasta que en el mazo me quede una cantidad de cartas que sea igual a una potencia de 2, y eso es todo!*
>
> *Esta solución me parece simplísima, no usa inducción ni nada por el estilo (técnicamente necesitás inducción para demostrar que $f(2^m) = 1$ para todo m, pero eso es muy fácil de ver o de creer). A mí me parece muy buena la resolución, y -como cada vez que me encuentro con algo así- me produce esa sensación mezclada de entre "júbilo" (¿suena muy papal esta palabra, no?) por ver algo tan bonito y frustración porque no se me ocurrió antes a mi :-)*

La respuesta de Adrián también llegó en ese tono:

> *... recién veo la demostración que me parecio SENCILLAMENTE ESPECTACULAR, y una vez más... muestra lo increíble que es la matemática con alguien que es capaz de encontrar una solución totalmente naif, sin saber si el problema era fácil, difícil, complicado técnicamente... nada... fue y lo hizo, lo pensó y lo hizo... buenísimo!!!! Te agradezco muchisimo que me lo hubieras mandado y me gustaría en algún momento utilizar el nombre del estudiante (pero nunca lo haría si no fuera que vos le pedís y/o preguntás si me autorizaría a mencionarlo si es que escribo la historia... que te parece?)*

Obviamente Alejandro autorizó a Adrián a utilizar su nombre en lo que sea, pero el problema todavía tenía más jugo para ser exprimido: durante el mes de mayo cumplen años Carlos, Juan Carlos y otros colegas de su facultad (y también Adrián). Para celebrarlo, suelen reunirse en la casa de Juan Carlos (si Ud. pasa por Barcelona durante ese mes y nos avisa, podría recibir una invitación a la fiesta, aunque Adrián se queja de no haber sido nunca invitado). Carlos decidió llevar "el juego de las cartas" a la reunión donde habían varios matemáticos y sus familias. Para ello se imprimió "un mazo de 100 cartas" que en realidad eran tarjetas numeradas del 1 al 100, y las tenía ordenadas (del 1 al 100). Se presentó como hace "el mago en la reunión", pidió a uno de los niños allí presentes que dijeran un número del 1 al 100. Este iba a ser el número con el que íbamos a "jugar". Por ejemplo, si el número elegido era 79, el mazo con el que nos íbamos a quedar tendría las primeras 79 cartas.

Acto seguido, Carlos explicó las reglas del juego, y preguntó antes de comenzar si serían capaces de adivinar cuál sería la última carta que iba a quedar en el mazo. Mientras la gente hacía sus apuestas, Carlos comenzaba a deshojar el mazo de cartas. Obviamente que el juego consiguió atraer a buena parte de los participantes (después de todo, se trataba de una reunión de matemáticos), y tuvimos conjeturas de lo más desopilantes (como que $f(n)$ era el primo "más próximo" a n, que los expertos en teoría de números se apuraron a conjeturar con demasiado optimismo) mientras iba cambiando el número de cartas del mazo y seguíamos jugando "en vivo" al juego.

En unos pocos minutos José Ignacio Burgos, que trabaja en el ICMAT de Madrid y que también estaba presente en la fiesta (pese a cumplir años en diciembre), había conseguido encontrar la fórmula y una demostración de la misma. Esto merece ser comentado porque el contexto en donde estábamos era una reunión de esas típicas de amigos, con ruido, conversaciones, bebidas, y demás. Y aún así José Ignacio consiguió concentrarse y encontrar una demostración que era totalmente distinta de la que teníamos nosotros, que no la reproducimos aquí primero porque no la recordamos bien (no había ni papel ni lápiz para documentarla), pero también porque al contarle la que había conseguido Alejandro, él y nosotros coincidimos en que la de Alejandro era por lejos la más simple de las que habíamos visto, dimos por acabado el juego y continuamos con la juerga.

§6. ¿Epílogo o Prólogo?

El "disparador" de toda esta aventura no fue ni Carlos ni Adrián, sino un email enviado por Luis Crippa a Adrián a principios de 2014, que transcribimos a continuación. El motivo por el cual no comenzamos con esta carta al principio de este relato es que no solamente ese texto contiene el problema que nos tuvo entretenidos por varios meses, sino también la solución del mismo que Adrián muy generosamente la ocultó al principio para no arruinarles la diversión (que fue abundante) a los otros. Aquí va:

> *Don Adrián, me tomo la libertad de enviarle un problema que me mantuvo entretenido durante unos días, espero que le guste:*
> *Tengo un mazo de cartones del tamaño y forma de cartas, numerados del 1 al 1997 y ordenados en forma consecutiva de menor a mayor, de forma tal que el cartón 1 está en la parte de arriba del mazo, mientras que el número 1997 está al final. Voy a hacer una selección de esos cartones empleando la siguiente metodología:*
>
> *Tomo el primer cartón (con el número 1) y lo coloco debajo (al final) del mazo. El cartón que sigue (con el número 2), lo descarto. El próximo cartón, con el número 3, también lo coloco debajo del mazo y el siguiente (con el número 4) lo descarto. Obviamente, con este procedimiento, en la primera "vuelta"solo nos quedan los cartones que tienen números impares.*
> *Continúo con este procedimiento de pasar un cartón al fondo del mazo y descartar el siguiente, hasta que al final me quedo con un solo cartón.*
>
> *La pregunta es: Qué número tiene ese cartón?*
> *Lo interesante es encontrar una fórmula general que permita determinar el nro. del cartón que queda al final, en función sólo del nro. de cartones.*
> *Pero una forma totalmente insólita (por lo menos para mí) fue la que vi publicada en una columna de problemas matemáticos en una revista de divulgación:*
>
> *Escribo el n° de cartones en base 2:*
> *(1997): 11111001101*
> *Permuto el dígito correspondiente a la potencia más alta de 2 (en este caso es 1) y lo coloco en la posición de la potencia cero:*
> *Con este procedimiento, el número 11111001101 pasa a ser: 11110011011 y este último número resulta ser la representación en base 2 del número que figura en el cartón que nos queda al final, que en base 10 es: 1947.*

Excelente sus columnas en Página 12!
Saludos!
Luis

Además del "nodo Barcelona", hay un equipo muy grande de personas con profesiones de lo más diversas que piensan, se divierten, y trabajan con Adrián este tipo de problemas y entretenimientos matemáticos. Otro de los involucrados en la resolución de este enunciado fue Juan Sabia, matemático de la Universidad de Buenos Aires, quien escribió lo siguiente a Adrián en esos días:

Hola, Adrián. Qué tal?
Creo que resolví el problema, pero usando algo de matemática (principio de inducción, por ejemplo...)
Te cuento: Si hay n cartas, llamo $f(n)$ a la última carta. Se puede ver que

$$f(1) = 1, \quad f(2k) = 2f(k) - 1 \quad y \quad f(2k+1) = 2f(k) + 1$$

(esto sale analizando si el número es impar o par, y viendo que uno hace lo mismo con las cartas impares que le quedan).

Ahora bien, si $n = 2^h + r$, con $0 \leq r < 2^h$ (es decir, escribo a n como la potencia de 2 más alta menor que n y veo el r que sobra), resulta que por inducción la función anterior es $f(n) = 2r + 1$.
Entonces, si me das un número cualquiera (37), lo escribo como la potencia de 2 más cerca y veo qué sobra ($37 = 32 + 5$) y resulta que la última carta va a ser $2 \cdot 5 + 1 = 11$.

Hay una forma linda de calcular este número en binario. Al desarrollo en binario de n le tachás el primer uno y le agregás un uno al final! Traté de pensar si se me ocurría algo con esto (para que sea más accesible la solución) pero por ahora, nada...
Si se me ocurre algo mejor, chiflo.
Beso,
Juan

Si Ud. es fan incondicional de los libros y artículos de Adrián se estará preguntando ahora que dónde y cuándo apareció este artículo con el juego de las cartas. He aquí el desenlace: tres años después, en junio de 2017, Carlos estaba leyendo la versión preliminar del libro de Adrián que acabó publicándose a fines de ese año [1], y se encuentra con "El problema de Josephus" que es lo suficientemente famoso como para merecer una página en Wikipedia [2], y bastante macabro también: esencialmente hay una rueda de personas que se van matando "alternadamente" (el primero mata al segundo, el tercero al cuarto, etc, etc, etc.) hasta que sobrevive una sola persona. ¿Y quién es esta persona? En la presentación que hace Adrián de ese problema (que Ud. puede encontrar también gratis en [3]), había un análisis exhaustivo de casos y heurísticas bastante interesantes y también complejas, que hizo que Carlos llevara la situación a la hora del café con sus colegas del departamento. Y fue José Ignacio Burgos -que justo ese día estaba de paso por Barcelona tomando café con el resto- quien nuevamente luego de pensar un rato dijo "¿No habíamos resuelto ya este problema hace tiempo?" Y ahí caímos todos -y mas tarde caería Adrián- que estábamos esencialmente ante la misma situación que la del mazo de cartas, solo que "el modelo" era distinto: Ud. cambia "cartas" por "prisioneros", "descartar" por "matar", y "una baraja" por "una rueda" y obtiene el mismo problema!

Este fenómeno puede parecer extraño, pero es algo muy habitual que ocurre en matemática y con seguridad en otros aspectos de la vida: resolvemos un problema determinado y luego nos volvemos a encontrar con la misma situación pero en un contexto totalmente diferente. Y en ese caso, "resolver" el problema consistirá esencialmente en mostrar que ambas situaciones son equivalentes, y que la resolución de uno también sirve para el otro. A veces incluso ocurre que nos encontramos con exactamente el mismo enunciado unos años después y sin recordar que ya "lo teníamos resuelto", ¡producimos una nueva resolución totalmente distinta del mismo! Esto nos ha pasado, mucho, y si bien puede ser preocupante que cuanto más mayor es uno más le pasan estas cosas (Adrián afirma que no solamente es el mayor de todos en edad, sino aún sumando las edades de todos los matemáticos involucrados en este artículo), lo bueno de estos "olvidos" es que nos obligan a pensar de nuevo, y a veces conseguir incluso mejores soluciones o soluciones alternativas a un mismo problema que jamás las habríamos encontrado de no haber sido por este olvido.

En el caso de nuestro problema de cartas/Josephus, todavía no hemos encontrado nada que nos guste más que la resolución de Alejandro de Miquel, y por eso decidimos escribir esta nota, para poder compartirla con Ud. y con la seguridad de que nuevas y bellas resoluciones de este enunciado, así como generalizaciones en direcciones de las más diversas aparecerán a partir de aquí. El mazo queda en sus manos ahora, y a Ud. le toca barajar...

§7. Agradecimientos

Agradecemos al comité editorial de la Revista de Educación Matemática de la UMA por haber revisado nuestro escrito y darnos la oportunidad de compartirlo aquí. En particular, agradecemos a Leandro Cagliero por sus muchas y útiles sugerencias sobre la presentación de esta nota.

Carlos trabaja en el Departamento de Matemáticas e Informática de la Universidad de Barcelona, donde tiene el privilegio de interactuar a diario no solamente con alumnos brillantes como Alejandro de Miquel, sino también con colegas y amigos -también brillantes- quienes no solamente han contribuido a que parte esta historia haya ocurrido tal como la hemos contado aquí, sino que además leen todos sus escritos (como éste) y le hacen muy útiles comentarios. Entre ellos están: José Ignacio Burgos (que en realidad pertenece al ICMAT de Madrid pero por suerte sigue apareciendo por Barcelona cada tanto), Teresa Cortadellas, Luis Dieulefait, Eulàlia Montoro, Juan Carlos Naranjo, Joaquim Ortega, y Martín Sombra.

Adrián por su parte, quiere agradecerle primero, a Luis Crippa, porque sin él, toda esta historia no hubiera existido, o habría sido bien diferente. Segundo, porque le agradecemos a una persona que no conocemos. Nunca tuve trato ni personal (en 3D) ni a través de correos electrónicos con él hasta ahora, pero también mi gratitud a los 'homeomorfos' argentinos que andan dando vuelta por el mundo, como Juan Sabia, Carlos Sarraute, Alicia Dickenstein y Gerry Garbulsky. En definitiva, esto muestra que estamos geográficamente 'distantes' pero 'afectiva e intelectualmente', muy cercanos. A todos… ¡gracias!

Referencias

[1] Adrián Paenza. *La Matemática del Futuro*. Editorial Sudamericana, 2017.
[2] https://es.wikipedia.org/wiki/Problema_de_Flavio_Josefo
[3] https://www.elcohetealaluna.com/el-problema-de-josephus/
[4] https://www.imo-official.org/problems.aspx

Carlos D'Andrea
Universitat de Barcelona,
(✉) cdandrea@ub.edu

Adrián Paenza
(✉) paenza@elosoproducciones.com.ar

Recibido: *29 de mayo de 2018*.
Aceptado: *5 de julio de 2018*.
Publicado en línea: *30 de agosto de 2018*.

Revista de Educación Matemática
Volumen 33, N° 2 (2018), páginas 23 – 40
Unión Matemática Argentina - Famaf (UNC)

EL CENTRO GEOGRÁFICO DE UNA REGIÓN

Alejandro L. Tiraboschi

Introducción

Los juegos matemáticos son una fuente de interesantes problemas matemáticos que, sin duda, actúan como motivación para estudiantes e interesados en la matemática en general. Ahora bien, también existe la posibilidad de encontrar problemas relacionados con el mundo real que podrían ser resueltos de con un poco de ingenio y el uso de matemática elemental. Estos problemas, al brindar respuestas concretas, pueden resultar muy estimulantes, ya sea, al constatar una afirmación conocida; o bien, al descubrir nuevos y a veces, sorprendentes resultados.

Por cierto hallar un problema de estas características no es sencillo y en general nos debemos limitar a la tarea, nada despreciable, de recrear y redescubrir problemas ya estudiados. Sin embargo, la disponibilidad de nuevas tecnologías habilita múltiples posibilidades y campos relativamente nuevos desde los cuales pensar y solucionar preguntas de matemática elemental. Por ejemplo, la introducción de aplicaciones de cartografía en la internet (Google Earth, Google Maps, etc.) sumada a las posibilidades de programación actuales nos permite plantear interesantes preguntas y resolverlas con el uso de pocas herramientas matemáticas.

Ese es el camino por el que transitaremos en este trabajo, a partir de la formulación: ¿qué es o cómo se puede definir el centro de una región? y de alcanzar una respuesta satisfactoria a dicha interrogación pasar al siguiente desafío: dada una región determinada, por ejemplo, un país: ¿cuál es el centro de la región? La primera pregunta no es nueva ni mucho menos y da lugar a una interesante discusión zanjada, -conforme a mi conocimiento- por [1] y [6]. La segunda, puede ser resuelta con el diseño y la implementación de algoritmos que nos permitirán calcular ejemplos concretos.

A continuación explicaremos algunos conceptos básicos, los resultados obtenidos y los métodos utilizados a lo largo del trabajo.

La noción de distancia de un punto a un conjunto es bastante intuitiva. Por ejemplo, ¿a qué distancia está un satélite de la Tierra? La respuesta es: a la distancia que hay desde el satélite al punto más cercano en la Tierra, es decir la menor longitud entre las longitudes de todos los posibles caminos entre el satélite y la Tierra. También podemos ejemplificar con una situación más relacionada con este trabajo ¿a qué distancia está la ciudad de Santa Rosa, La Pampa de la frontera Argentina? Podemos averiguar esto en forma artesanal usando Google Maps y la herramienta de medir distancias. Comprobaremos, entonces, que la distancia de Santa Rosa a la frontera es aproximadamente de 291 km y se realiza en un punto de la costa cercano a Bahía Blanca. Este punto en la costa es el lugar de la frontera Argentina más cercano a Santa Rosa. Los dos ejemplos anteriores difieren en un asunto esencial: en el primer ejemplo la distancia es la longitud de la linea recta que une los dos puntos. En el segundo ejemplo, la distancia es la menor distancia *sobre* la Tierra, es decir es la longitud de la curva de menor longitud sobre la superficie terrestre que une los dos puntos. Más adelante, en la Sección 1, veremos la definición precisa de distancia terrestre, pero, por ahora, continuemos con nuestra noción intuitiva de "distancia sobre la Tierra".

La distancia en línea recta y la distancia sobre la Tierra son conceptos que serán utilizados para comprender un punto geográfico de interés en este trabajo, el *centro geográfico de una región*. La definición de centro geográfico es, en cierta forma, origen de controversias y, según distintas fuentes, encontraremos distintas definiciones. La utilidad del centro geográfico es relativa. Suele utilizarse para fines turísticos, aunque en algunos documentos oficiales se lo utiliza para definir áreas de interés (ver, por ejemplo, [3]). El cálculo de centros geográficos se usa en algunos trabajos donde se estudia distribución de poblaciones. Por ejemplo, la Oficina de Censos de Estados Unidos calcula el centro geográficos de poblaciones y el centro geográfico de los EEUU ([4]). También, es utilizado en biología para dar una noción de la ubicación de ciertas especies. En [5] se determina el centro geográfico, ya no de una región, sino de la distribución geográfica de clados. Como veremos más adelante, el método utilizado en esa publicación no parece ser del todo correcto.

La forma más usual de definir el centro geográfico es como el centro de gravedad de la región dibujada en un plano. El problema es que dibujar una región del geoide terrestre en el plano requiere de una proyección y distintos métodos de proyección pueden dar distintos dibujos y, por lo tanto, distintos centros. En Wikipedia encontramos la siguiente definición: *"el centro geográfico es el centroide de la forma bidimensional de una región de la superficie de la Tierra, proyectado radialmente al nivel de mar o sobre una superficie de geoide."* Ahora bien, esta definición, además de confusa, depende del plano donde se hace la proyección. Por ejemplo, es muy distinta la proyección radial de la Argentina al plano determinado por el ecuador que la proyección radial al plano determinado por el meridiano $0°$.

La dificultad en definir el centro geográfico de una región con geometría plana, se muestra en un trabajo del National Ocean Service de los Estados Unidos ([1]). En este trabajo se afirma directamente que no hay una definición correcta de centro geográfico. Veremos que esto es un error y se debe a que el autor solo concibe el cálculo del centro geográfico a partir de proyecciones y, como fue mencionado más arriba, distintas proyecciones nos pueden dar distintos “centros geográficos´´.

Veremos en la Sección 2, es posible definir sin ambigüedad el centroide de una región en la superficie de una esfera de forma análoga a la definición en $\mathbb{R}^2$. A ese centroide es lo que llamaremos el *centro geográfico* de la región. Esta definición está implícita en [4] y se hace en forma rigurosa en [6].

Basándonos en estas definiciones, se explicarán los algoritmos necesarios para el cálculo del centro geográfico de una región. Aplicando estos algoritmos calcularemos, a modo de ejemplo, los centros geográficos de diferentes países, resultando en algunos casos en los centros geográficos ya conocidos y bien calculados, como en el de EEUU o Alemania. En otros casos, como en el de Austria o Argentina, nuestros cálculos no coinciden con los centros geográficos que podemos encontrar mediante búsquedas en internet, pero en ningún caso encontramos fundamentos a estos cálculos.

§1. Distancias en la esfera

Aunque la modelización más exacta de la Tierra es como un elipsoide de revolución, para nuestros fines nos resultará útil, y más sencillo, pensar a la Tierra como una esfera de radio 6.371 km.

La distancia entre dos puntos en la Tierra viene dada por la longitud de la porción del círculo máximo que los une. Para ser más precisos necesitamos introducir algunas definiciones. Una *geodésica* es un círculo máximo. Los meridianos son los círculos máximos que pasan por los polos, pero hay otros círculos máximos. El ecuador terrestre es uno. En general dados dos puntos cualesquiera de la Tierra hay un círculo máximo que los contiene: es la intersección de la esfera con el plano determinado por los dos puntos y el centro de la esfera. Las geodésicas en la esfera juegan el rol de las rectas en el plano y ellas permiten definir triángulos esféricos, cuadrados esféricos, etc. y, en la denominada geometría esférica, se pueden demostrar propiedades análogas a las que se obtienen en la geometría del plano. Un *arco geodésico* entre dos puntos es la porción de geodésica que une los dos puntos y tiene longitud menor. La *distancia* en la Tierra entre dos puntos es la longitud del arco geodésico que une los dos puntos.

En una esfera de radio 1, la longitud l del arco geodésico que une dos puntos es igual al ángulo θ, medido en radianes. Si la esfera tiene radio r entonces esta longitud es directamente proporcional al radio y por lo tanto $l = r \cdot \theta$. Entonces, una forma de medir la distancia entre dos puntos p_1 y p_2 en la Tierra es averiguar θ, el ángulo comprendido entre ellos, y multiplicarlo por $6{,}371$:

$$d(p_1, p_2) = 6371 \cdot \theta.$$

Ahora, dadas las coordenadas de dos puntos en la Tierra ¿cómo calculamos el ángulo comprendido entre ellos? No es demasiado complicado hacerlo y daremos una breve explicación.

Comenzaremos con el problema, similar, de encontrar el ángulo comprendido entre dos vectores de $\mathbb{R}^2$. El *producto escalar* o *producto interno canónico* en $\mathbb{R}^2$ se define

$$\langle v_1 | v_2 \rangle := x_1 x_2 + y_1 y_2,$$

donde $v_1 = (x_1, y_1)$ y $v_2 = (x_2, y_2)$. Veremos a continuación que

$$\langle v_1 | v_2 \rangle = ||v_1||\,||v_2|| \cos(\theta)$$

donde $||v_1||$ y $||v_2||$ denotan las longitudes de v_1 y v_2 respectivamente y θ es el ángulo comprendido entre v_1 y v_2. Si $v = (x, y)$, entonces, por el Teorema de Pitágoras, la longitud de v es igual a $\sqrt{x^2 + y^2}$. Luego

$$||v||^2 = x^2 + y^2 = \langle v | v \rangle.$$

Es decir, el producto escalar de un vector consigo mismo es la longitud del vector al cuadrado.

Sean $v_1 = (x_1, y_1)$ y $v_2 = (x_2, y_2)$ en $\mathbb{R}^2$ y sea α_1 el ángulo comprendido entre v_1 y el eje horizontal y α_2 el ángulo comprendido entre v_2 y el eje horizontal. Entonces,

$$v_1 = ||v_1||(\cos(\alpha_1), \operatorname{sen}(\alpha_1)), \quad v_2 = ||v_2||(\cos(\alpha_2), \operatorname{sen}(\alpha_2)),$$

por lo tanto

$$\langle v_1 | v_2 \rangle = ||v_1||\,||v_2||(\cos(\alpha_1)\cos(\alpha_2) + \operatorname{sen}(\alpha_1)\operatorname{sen}\alpha_2)).$$

Por otro lado, por la propiedad de la suma de los cosenos tenemos que

$$\cos(\alpha_1)\cos(\alpha_2) + \operatorname{sen}(\alpha_1)\operatorname{sen}(\alpha_2) = \cos(\alpha_1 - \alpha_2).$$

Es decir,

$$\langle v | w \rangle = ||v_1||\,||v_2|| \cos(\alpha_1 - \alpha_2),$$

y precisamente, el ángulo comprendido entre v y w es $\theta = \alpha_1 - \alpha_2$. Luego,

$$\theta = \arccos\left(\frac{\langle v | w \rangle}{||v_1||\,||v_2||}\right).$$

Es decir, el producto escalar no sólo es útil para encontrar la longitud de un vector, sino que nos permite averiguar el ángulo comprendido entre dos vectores.

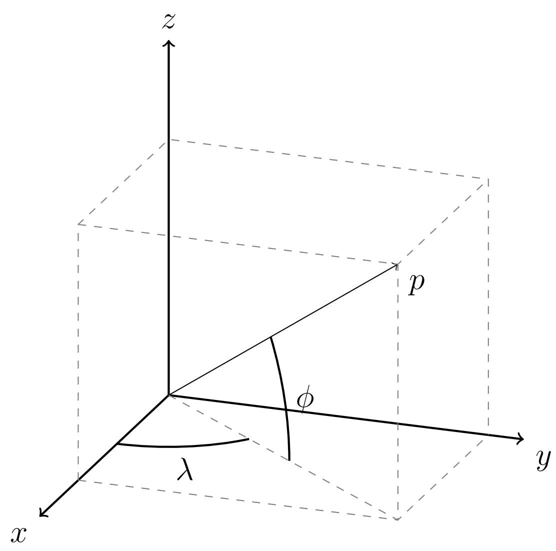


FIGURA 1. p es un punto de latitud $\phi = 32{,}27$ y longitud $\lambda = 41{,}48$, en grados.

Veamos ahora el problema en $\mathbb{R}^3$. De forma análoga al caso $\mathbb{R}^2$, definimos el producto escalar en $\mathbb{R}^3$ por

$$\langle v_1 | v_2 \rangle := x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2,$$

con $v = (x_1, y_1, z_1)$ y $w = (x_2, y_2, z_2)$. Usando el Teorema de Pitágoras, también podemos demostrar que la longitud de un vector es $||v|| = \sqrt{\langle v|v \rangle}$. Sean ϕ, λ la latitud y longitud geográfica en radianes de un vector v en una esfera de radio r. Las coordenadas cartesianas del punto son

$$v = r(\cos\phi\,\cos\lambda, \cos\phi\,\operatorname{sen}\lambda, \operatorname{sen}\phi). \tag{1.1}$$

Como ejemplo, en la Figura 1 se muestra la ubicación de un lugar con latitud $32{,}27^{\text{o}}$ y longitud $41{,}48^{\text{o}}$.

La ley esférica de los cosenos nos permite demostrar una fórmula idéntica al caso $\mathbb{R}^2$:

$$\langle v_1 | v_2 \rangle = ||v_1||\,||v_2|| \cos(\theta) \tag{1.2}$$

con v_1 y v_2 vectores en $\mathbb{R}^3$ y θ el ángulo comprendido entre ellos. Si v_1 y v_2 se encuentran en la circunferencia de radio r, de la ecuación (1.2) obtenemos

$$\theta = \arccos\left(\frac{\langle v_1 | v_2 \rangle}{r^2}\right). \tag{1.3}$$

Sean ϕ_1, λ_1 y ϕ_2, λ_2 las latitudes y longitudes geográficas en radianes de dos vectores v_1 y v_2 en una esfera de radio r. Por (1.3), el ángulo comprendido entre los vectores, es el arcocoseno de

$$
\begin{aligned}
\frac{\langle v|w\rangle}{r^2} &= \frac{\langle r(\cos\phi_1\cdot\cos\lambda_1, \cos\phi_1\cdot\operatorname{sen}\lambda_1, \operatorname{sen}\phi_1)|r(\cos\phi_2\cdot\cos\lambda_2, \cos\phi_2\cdot\operatorname{sen}\lambda_2, \operatorname{sen}\phi_2)\rangle}{r^2} \\
&= \big\langle(\cos\phi_1\cdot\cos\lambda_1, \cos\phi_1\cdot\operatorname{sen}\lambda_1, \operatorname{sen}\phi_1)\big|(\cos\phi_2\cdot\cos\lambda_2, \cos\phi_2\cdot\operatorname{sen}\lambda_2, \operatorname{sen}\phi_2)\big\rangle \\
&= \cos\phi_1\cdot\cos\lambda_1\cdot\cos\phi_2\cdot\cos\lambda_2 + \cos\phi_1\cdot\operatorname{sen}\lambda_1\cdot\cos\phi_2\cdot\operatorname{sen}\lambda_2 + \operatorname{sen}\phi_1\cdot\operatorname{sen}\phi_2 \\
&= \cos\phi_1\cdot\cos\phi_2(\cos\lambda_1\cdot\cos\lambda_2 + \operatorname{sen}\lambda_1\cdot\operatorname{sen}\lambda_2) + \operatorname{sen}\phi_1\cdot\operatorname{sen}\phi_2 \\
&= \cos\phi_1\cdot\cos\phi_2\cdot\cos(\lambda_1-\lambda_2) + \operatorname{sen}\phi_1\cdot\operatorname{sen}\phi_2.
\end{aligned}
$$

Es decir, el ángulo comprendido entre v_1 y v_2 es

$$\theta = \arccos\big(\cos\phi_1\cdot\cos\phi_2\cdot\cos(\lambda_1-\lambda_2) + \operatorname{sen}\phi_1\cdot\operatorname{sen}\phi_2\big), \tag{1.4}$$

que es una fórmula alternativa a (1.3), más útil para realizar cálculos, debido a que se expresa directamente en función de la latitud y longitud de los puntos involucrados.

Hemos demostrado el siguiente resultado.

Teorema 1.1. *Sean v_1 y v_2 dos puntos en la esfera de radio r con coordenadas geográficas (ϕ_1, λ_1) y (ϕ_2, λ_2), respectivamente. Entonces, la distancia entre v_1 y v_2, es decir la longitud del arco geodésico que une v_1 y v_2, es*

$$d(v_1, v_2) = r\ \arccos\big(\cos\phi_1\cdot\cos\phi_2\cdot\cos(\lambda_1-\lambda_2) + \operatorname{sen}\phi_1\cdot\operatorname{sen}\phi_2\big). \tag{1.5}$$

Ejemplo 1.2. En Python podemos hacer un programa sencillo para calcular la distancia entre dos puntos de la Tierra.

Distancia entre v_1 y v_2

```
from math import  * # importa la librería de matemática
r = 6371 # radio terrestre en kms
def distancia(lat1, lon1, lat2, lon2):
  # pre: (lat1, lon1) y (lat2, lon2) son coordenadas de dos puntos en radianes.
  # post: devuelve la distancia entre los dos puntos en kilómetros
  return r*acos(cos(lat1)*cos(lat2)*cos(lon1-lon2)+sin(lat1)*sin(lat2))
```

Usando la función `distancia` dentro del programa, podemos averiguar la distancia entre Buenos Aires y Córdoba. Las coordenadas de la ciudad de Buenos Aires son: latitud: $34^\circ\,36'\,30''$ Sur y $58^\circ\,22'\,16''$ Oeste, en radianes y con lo signos correspondientes las coordenadas son $(-0{,}54838 - 1{,}12030)$. Las coordenadas de la ciudad de Córdoba, en radianes, son $(-0{,}60403, -1{,}01877)$. Si agregamos al programa la linea

```
print distancia(-0.54838, -1.12030, -0.6040, -1.01877)
```

se imprime en pantalla `647.82759`, que es (una aproximación a) la distancia en km en "linea recta" entre Buenos Aires y Córdoba. Observar que en Python la coma decimal debe ser reemplazada por un punto.

§2. El centro geográfico de una región

El concepto de centro geográfico de una región en una esfera no tiene una definición claramente aceptada y dependiendo de la fuente, podemos tener diferentes interpretaciones. Antes de continuar la discusión daremos algunas definiciones y resultados que nos resultarán de utilidad.

Definición 2.1. El *centro de masa* de una distribución de masas puntuales es el promedio de la posición de todas las partes del sistema, ponderadas de acuerdo a sus masas.

Es decir, si $v_1, \ldots, v_k$ vectores en $\mathbb{R}^n$ tal que v_i tiene masa m_i. Entonces el *centro de masa del sistema* $D = \{(v_i, m_i)\}_{i=1,\ldots,k}$ es

$$p(D) := \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{k} m_i \cdot v_i,$$

donde $m = m_i + \cdots + m_k$.

Ejemplo 2.2. Calculemos un centro de masa en el plano. Sean los puntos $(1,2), (0,-1), (1,0)$ de masa 2, 1, 3 respectivamente, luego el centro de masa es

$$\frac{2\cdot(1,2)+1\cdot(0,-1)+3\cdot(1,0)}{2+1+3} = \frac{(2,4)+(0,-1)+(3,0)}{6} = \left(\frac{5}{6},\frac{1}{2}\right).$$

Desde un punto de vista físico, uno podía pensar que el sistema

$$\{((1,2),2),((0,-1),1),((1,0),3)\}$$

es equivalente, al nivel de la dinámica, al sistema $\{((\frac{5}{6},\frac{1}{2}),6)\}$.

Cuando tenemos un cuerpo continuo (una superficie en el plano, un sólido en el espacio, etc.) para calcular el centro de masa subdividimos en pequeñas masas y luego hacemos el promedio ponderado. Cuando más fina es la subdivisión más nos acercamos al centro de masa del cuerpo y en el límite obtenemos el verdadero centro de masa.

Definición 2.3. El *centroide* de una distribución de puntos en $\mathbb{R}^n$ es la media aritmética de la posición de todos los puntos.

Es decir, si $v_1, \ldots, v_k$ vectores en $\mathbb{R}^n$, entonces el centroide de $S = \{v_i, \ldots, v_k\}$ es

$$c(S) = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} v_i, .$$

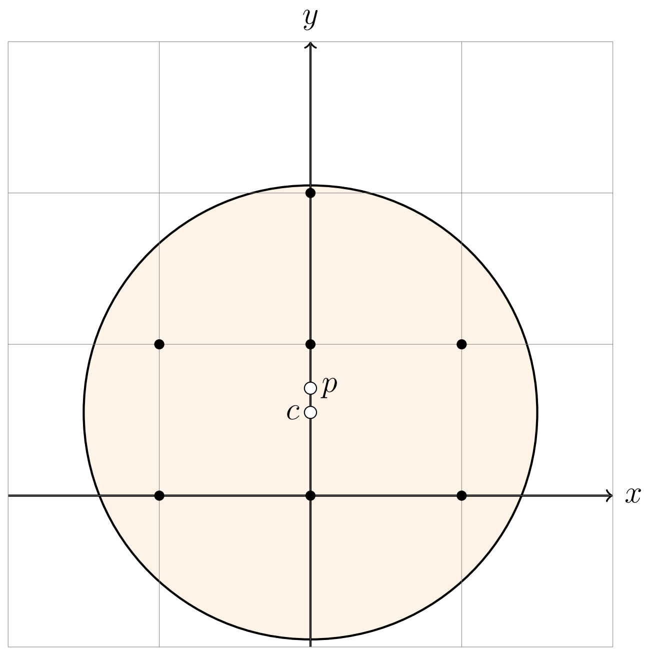


FIGURA 2. Ejemplo de aproximación del cálculo del centroide por una grilla. El puntos c es el centroide del disco y el punto p se obtiene promediando los puntos de la grilla interiores al disco.

Es decir, el centroide es el centro de masa de los puntos considerando que la densidad vale 1 en todo punto, o dicho de otra forma, $c(S) = p(D)$ donde $D = \{(v_i, 1)\}_{i=1,\ldots,k}$.

Como ya discutimos en el caso del centro de masa, cuando el objeto es continuo podemos averiguar el centroide por un procesos de límite. En el caso de superficies, si la superficie se encuentra en el plano, el centroide es la integral doble de los puntos pertenecientes a la superficie dividida el área total de la superficie. En el caso que la superficie se encuentre en el espacio, por ejemplo que sea una región de la esfera, el centroide es la integral de superficie de los puntos pertenecientes a la superficie dividida el área total.

Nuestra intención es calcular el centroide de superficies, pero no haremos uso de integrales y nuestros cálculos se basaran en aproximaciones por puntos: si S es una superficie, tomaremos $u_1, \ldots, u_k$, puntos convenientemente elegidos en S, entonces tendremos

$$c(S) \approx \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} u_i. \tag{2.1}$$

Es decir, como parece natural, para calcular el centroide de una superficie podemos hacer una "aproximación por puntos" y luego calcular el promedio de ellos.

Ejemplo 2.4. El centroide del disco $D(c, r)$ de centro $c = (0, 0{,}55)$ y radio $r = 1{,}5$ es el centro del disco. Calculemos una aproximación de el centroide de $D(c, r)$ con una grilla cuadriculada de lados 1×1 con vértices en las coordenadas enteras. Hay 7 puntos de la grilla que están contenidos dentro del disco: $(0,2)$, $(-1,1)$, $(0,1)$, $(1,1)$, $(-1,0)$, $(0,0)$ y $(1,0)$. Por la ecuación (2.1), tenemos

$$\begin{aligned}\text{Centro de masa de } D(c,r) &\approx \frac{(0,2)+(-1,1)+(0,1)+(1,1)+(-1,0)+(0,0)+(1,0)}{7}\\ &= (0,5/7)\\ &\approx (0,0{,}71),\end{aligned}$$

que es un punto "cercano" al centroide, pero no igual (ver Figura 2).

Como ya mencionamos en la introducción, podemos definir, sin ambigüedad, el centroide de una región en la superficie de una esfera de forma análoga a la definición en $\mathbb{R}^2$.

Denotemos $S^2(r)$ a la esfera en $\mathbb{R}^3$ con centro en el origen y radio r. Denotamos también $S^2 := S^2(1)$. Sea (x,y,z) en $\mathbb{R}^3$, entonces (x_0,y_0,z_0) es la *proyección radial de* (x,y,z) *en* $S^2(r)$ si la recta determinada por $(0,0,0)$ e (x,y,z) se interseca con $S^2(r)$ en (x_0,y_0,z_0). Dicho de otra forma, la proyección radial de (x,y,z) es $(x_0,y_0,z_0) := r\dfrac{(x,y,z)}{\|(x,y,z)\|}$.

Definición 2.5. En geometría esférica, el *centro de masa esférico* de una distribución de masas en la esfera de radio r es la proyección radial del centro de masa de la distribución. El *centro geométrico* o *centro geográfico* de una superficie en la esfera es la proyección radial del centroide de la superficie.

Observación 2.6. Si $v_1,\ldots,v_k$ vectores en S^2 tal que v_i tiene masa m_i. Sea $v = \sum_{i=1}^{k} m_i \cdot v_i$, entonces el centro de masa esférico del sistema es $v/\|v\|$.

Volviendo al caso euclidiano, es muy sencillo demostrar el siguiente resultado: sea D una distribución de masas puntuales en $\mathbb{R}^3$, entonces si dividimos la distribución de puntos en dos distribuciones D_1, D_2 se cumple que

$$p(D) = \frac{1}{m}(m_1 \cdot p(D_1) + m_2 \cdot p(D_2)), \tag{2.2}$$

donde m_1 es la masa total del sistema D_1, m_2 es la masa total del sistema D_2 y $m = m_1 + m_2$. También se cumple lo siguiente.

Proposición 2.7 (Regla euclidiana de nivel)**.** *Sean v_1 y v_2 dos puntos en $\mathbb{R}^n$ de masa m_1 y m_2 respectivamente, sea v el centro de masa de $(v_1,m_1),(v_2,m_2)$ y sean a_1, a_2 la distancia de v a v_1 y v_2 respectivamente, entonces*

$$m_1a_1 = m_2a_2.$$

Demostración. Por definición,

$$v = \frac{1}{m}(m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2), \quad a_1 = \|v - v_1\|, \quad a_2 = \|v - v_2\|,$$

donde $m = m_1 + m_2$. Luego,

$$\begin{aligned} m_1 a_1 &= m_1 ||v - v_1|| \\ &= m_1 ||\frac{1}{m}(m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2) - v_1|| \\ &= \frac{m_1}{m} ||m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 - m \cdot v_1|| \\ &= \frac{m_1}{m} ||m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 - m_1 \cdot v_1 - m_2 \cdot v_1|| \\ &= \frac{m_1}{m} ||m_2 \cdot v_2 - m_2 \cdot v_1|| \\ &= \frac{m_1 m_2}{m} ||v_2 - v_1||. \end{aligned}$$

De forma análoga se prueba que

$$m_2 a_2 = m_2 ||v - v_2|| = \frac{m_1 m_2}{m} ||v_1 - v_2||,$$

y por lo tanto se satisface que $m_1 a_1 = m_2 a_2$. □

En geometría esférica, y con el uso de un poco de trigonometría, obtenemos otra regla de nivel.

Lema 2.8. *Sean $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$, sea θ_1 el ángulo comprendido entre v_1 y $v_1 + v_2$ y sea θ_2 el ángulo comprendido entre v_2 y $v_1 + v_2$. Entonces*

$$||v_1 + v_2|| = ||v_1|| \cos(\theta_1) + ||v_2|| \cos(\theta_2). \tag{2.3}$$

Demostración. Observemos que

$$||v_1 + v_2||^2 = \langle v_1 + v_2 | v_1 + v_2 \rangle = \langle v_1 | v_1 + v_2 \rangle + \langle v_2 | v_1 + v_2 \rangle$$

y por lo tanto

$$||v_1 + v_2|| = ||v_1|| \frac{\langle v_1 | v_1 + v_2 \rangle}{||v_1|| \, ||v_1 + v_2||} + ||v_2|| \frac{\langle v_2 | v_1 + v_2 \rangle}{||v_2|| \, ||v_1 + v_2||}.$$

Ahora bien,

$$\frac{\langle v_1 | v_1 + v_2 \rangle}{||v_1|| \, ||v_1 + v_2||} = \cos(\theta_1), \quad \text{y} \quad \frac{\langle v_2 | v_1 + v_2 \rangle}{||v_2|| \, ||v_1 + v_2||} = \cos(\theta_2)$$

de donde se deduce el resultado. □

Proposición 2.9. *(Regla esférica de nivel, [6]) Sean p_1 y p_2 dos puntos en S^2 de masa m_1 y m_2 respectivamente, sea p el centro de masa esférico de $(p_1, m_1), (p_2, m_2)$ y sean a_1, a_2 la distancia de p a p_1 y p_2 respectivamente, entonces*

$$m_1 \cdot p_1 + m_2 \cdot p_2 = m \cdot p, \tag{2.4}$$

$$m_1 \operatorname{sen}(a_1) = m_2 \operatorname{sen}(a_2), \tag{2.5}$$

donde $m = m_1 \cos(a_1) + m_2 \cos(a_2)$.

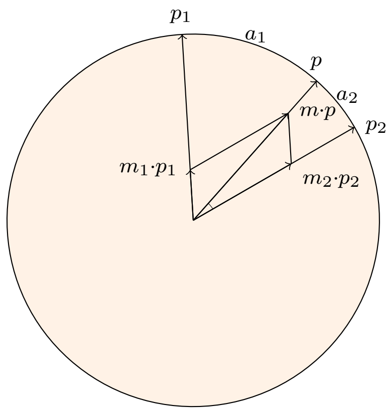


FIGURA 3. Los puntos p_1 y p_2 pertenecen a la superficie terrestre con masas m_1 y m_2, respectivamente. p es el centro de masa esférico. El ángulo entre p_1 y p es a_1, el ángulo entre p y p_2 es a_2 y $m = m_1 \cos(a_1) + m_2 \cos(a_2)$.

Demostración. La situación se ejemplifica en la Figura 3.

Como la circunferencia es de radio 1, entonces a_1 es el ángulo comprendido entre p_1 y p y a_2 es el ángulo comprendido entre p_2 y p. Por otro lado, el centro de masa esférico de $(p_1, m_1), (p_2, m_2)$ es

$$p = \frac{m_1 \cdot p_1 + m_2 \cdot p_2}{\|m_1 \cdot p_1 + m_2 \cdot p_2\|}$$

(observación 2.6). Por el lema 2.8, tenemos que

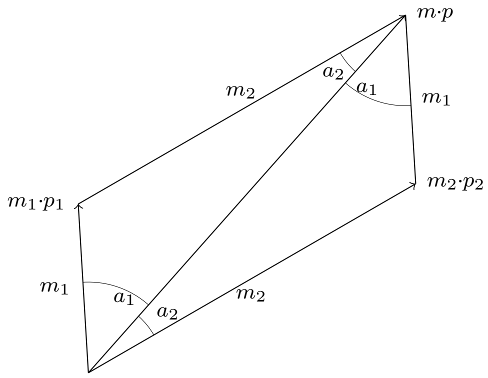
$$\|m_1 \cdot p_1 + m_2 \cdot p_2\| = \|m_1 \cdot p_1\| \cos(a_1) + \|m_2 \cdot p_2\| \cos(a_2) = m_1 \cos(a_1) + m_2 \cos(a_2)$$

y por lo tanto

$$p = \frac{m_1 \cdot p_1 + m_2 \cdot p_2}{m_1 \cos(a_1) + m_2 \cos(a_2)}$$

de donde se deduce (2.4).

Para probar la fórmula (2.5) usaremos el Teorema de los senos, observar que nos encontramos en la siguiente situación:



Luego, por el Teorema de los senos $\frac{\operatorname{sen}(a_1)}{m_2} = \frac{\operatorname{sen}(a_2)}{m_1}$, de donde obtenemos $m_1 \operatorname{sen}(a_1) = m_2 \operatorname{sen}(a_2)$ □

Observar que la regla esférica de nivel relaciona las distancias sobre la esfera al centro de masa esférico (a_1 y a_2) con las distancia lineales a la recta que está determinada por el centro de masa estándar y el centro de la esfera ($\operatorname{sen}(a_1)$ y $\operatorname{sen}(a_2)$). El centro de masa esférico además de cumplir estas propiedades, es la única aplicación que va desde el conjunto de las distribuciones de masas al conjunto de puntos en $S^2(r)$ que satisface los axiomas de centroide (ver [6]).

Ahora bien, para superficies arbitrarias en la esfera ¿existe alguna proyección tal que la proyección del centro geométrico coincide con el centroide de la superficie proyectada?. La respuesta es *no*. Una de las consecuencias directas del Theorema Egregium de Gauss (ver en Wikipedia), es que no existe una isometría entre dos superficies con distinta curvatura gaussiana. Nosotros comprendemos bien el concepto de distancia en la esfera, con el uso de geodésicas, y de distancia en el plano, basada en el Teorema de Pitágoras. Como la curvatura de una esfera de radio r es $-1/r$ y la curvatura del plano es 0, es claro que no existe ninguna isometría entre una región de la Tierra y una región plana. En particular, este teorema nos dice que nunca podremos proyectar geodésicas en rectas y por lo tanto el cálculo del centroide realizado en la proyección no está relacionado con el centroide de la superficie.

En la Sección 3 daremos un esquema concreto de cálculo del centro geográfico de un región basándonos la definición de centroide esférico, es decir, calculando primero el centro de masa de la región y luego proyectándolo en forma radial a la esfera.

Antes de terminar la sección comentaremos algunos de los cálculos de centro geográficos que hemos encontrado en la literatura. En el documento [4], la Oficina de Censos de los Estados Unidos calcula los centros de población del país y el centro geográfico. En este documento se explica la metodología utilizada desde 1960 para realizar los cálculos y esta resulta ser equivalente a la utilizada en nuestro trabajo. Experimentalmente, en [4] se obtiene que el centro geográfico de EEUU es en latitud, longitud igual a $44{,}9672°, -103{,}7715°$ (ver Geographic center of the United States o su ubicación en el mapa), mientras que usando nuestros cálculos obtenemos $44{,}8989°, -103{,}8191°$. Los dos puntos, el calculado por la Oficina de Censos y el calculado en este trabajo, se encuentran a menos de 10 km de distancia uno del otro.

Por el contrario, la metodología utilizada en [5] para calcular el centro geográfico de clados, no es la correcta. En el trabajo se dice "*The clade distance is determined by calculating the average latitude and longitude for all observations of the clade in the sample, weighted by the local frequencies of the clade at each location. This estimates the* *geographical center for the clade."* Es decir, en ese trabajo se considera que el centro geográfico se calcula haciendo el promedio de latitudes y longitudes. Esto es incorrecto, pues como se muestra en [4], el cálculo en las longitudes debe tener un factor de corrección dependiente de las latitudes.

Finalmente, en la Wikipedia, en inglés, en Geographical centre se encuentra una lista de centros geográficos de distintos paises y regiones. Según nuestro cálculos, algunos son correctos y otros no lo son. Esto lo veremos en la sección siguiente.

§3. Cálculo del centroide

Usaremos el programa Python para calcular el centroide de una región esférica dada. Python es un lenguaje de programación interpretado de alto nivel y de propósito general. Creado por Guido van Rossum y puesto a disposición de los usuarios por primera vez en 1991, Python tiene una filosofía de diseño que enfatiza la legibilidad del código. Su popularidad ha crecido enormemente en los últimos años, tanto en el ámbito académico como industrial, no solo debido a la facilidad de programación si no también por las librerías disponibles, que permiten realizar cálculos en una amplia variedad de áreas o campos de aplicación.

Nosotros explicaremos brevemente el *script* (así se llaman los programas en Python) `centroide.py` que permite calcular el punto de nuestro interés. El script, y ciertos archivos de datos necesarios para ejecutarlo, están disponibles en la página web del autor: http://www.famaf.unc.edu.ar/tirabo/centroide

Es posible utilizar el script para otros ejemplos además de los que daremos a continuación. Ante cualquier consulta, no dude en escribirle al autor.

Para el cálculo del centroide de una región A realizaremos una cuadrícula de la región y cuando digamos "los puntos de A" o los "puntos de la región" nos estaremos refiriendo a los puntos de la cuadrícula que se encuentran en el interior de A. Podremos determinar en nuestro programa cuan fina es la cuadrícula y, obviamente, cuando más fina es más precisos serán los cálculos.

Paso 1. Se incorporan los datos secuenciales de la frontera como una lista de `[lon,lat]` en radianes (los datos están en orden, como se recorre la frontera). Para hacer esto se aplica la función `obtener_poligonales(file)`, donde `file` es un archivo con los datos obtenidos de las Fusion Tables de Google ([8]).

Paso 2. Se construye una grilla donde se marca la frontera. Para construir la grilla se establecen dos parámetros, `dphi` y `dlambda` que nos dirán el tamaño de los "rectángulos" de la grilla.

La grilla es un arreglo doble `d[i][j] = ['s' o 'n', lat, lon]` donde `'s'` significa que el punto pertenece a la frontera, `'n'` que no pertenece a la frontera. Además

`d[x+1][y][1] = d[x+1][y][1] + dphi, d[x+1][y][2] = d[x+1][y][2]`
(avanzar a la izquierda en 1 es aumentar la latitud en `dphi`)
`d[x][y+1][1] = d[x][y+1][1] , d[x][y+1][2] = d[x][y+1][2] + dlambda`
(avanzar hacia arriba en 1 es aumentar la longitud en `dlambda`)
La función utilizada para calcular la grilla es

`hacer_regiones(datos, dphi, dlambda),`

donde `datos` es el output obtenido en el paso anterior.

Paso 3. Se hace flood fill (inundación) de la grilla para determinar los puntos interiores. El algoritmo utilizado es similar al que utilizan los programas de dibujo para "pintar" el interior de una región "derramando la pintura del balde". También se utiliza en el juego Buscaminas para determinar cuales elementos de la cuadrícula deben ser cambiados. En nuestro caso, como los países suelen estar formados por varias regiones (a veces decenas de regiones), es relativamente complicado hacer flood fill desde el interior de cada región. Por lo tanto, es mucho más sencillo hacer flood fill del exterior y luego tomar el complemento. La función utilizada es `interior_flood_fill_pol(grilla)` y se obtiene una nueva grilla tal que

- `d[i][j] = ['s', lat, lon]` significa que el punto `[lon,lat]` es de la frontera.
- `d[i][j] = ['n', lat, lon]` significa que el punto `[lon,lat]` se encuentra en el interior del país.
- `d[i][j] = ['e', lat, lon]` significa que el punto `[lon,lat]` no pertenece al país.

Paso 4. En este paso calcularemos el centro de masa (aproximado) de la superficie y nos basaremos en el siguiente principio: si S es una superficie en $\mathbb{R}^3$ que es unión de las superficies $S_1, \ldots, S_k$, entonces

$$c(S) = \frac{1}{a}\sum_{i=1}^{k} a_i \cdot c(S_i), \tag{3.1}$$

donde a_i es la superficie de S_i, a es la superficie de S y c es la función centro de masa. Este resultado es una generalización de la ecuación (2.2). El paso consta de dos etapas

1. Se convierten todos los puntos obtenidos por flood fill a coordenadas cartesianas `[x, y, z]`. Los puntos tienen peso, pues según donde esté el "pixel" (en latitud) tiene diferente área.
2. Se realiza el promedio ponderado de todos los puntos (ecuación (3.1)). Así obtenemos las coordenadas cartesianas del centro de masa. Este centro de masa no va a ser parte de la superficie terrestre.

Todos los cálculos del paso 4 los realiza la función `baricentro_xyz(grilla)`, donde `grilla` es el output del paso anterior.

Paso 5. Se proyecta el centro de masa obtenido en el paso anterior a la superficie terrestre con la función `cart2latlon()`, y de esta forma se obtiene el centro geográfico.

Ahora mostraremos el resultado de calcular el centro geográfico de diferentes países y los compararemos con cálculos realizados anteriormente.

Estados Unidos. Como ya mencionamos el centro geográfico de EEUU calculado por nuestro programa y el calculado por la Oficina de Censos de EEUU esencialmente coinciden. El centro geográfico de los EEUU se encuentra en al norte de Belle Fourche, Dakota del Sur en coordenadas con latitud, longitud igual a $44{,}9672°, -103{,}7715°$.

Austria. Según la Wikipedia en alemán (ver aquí) el centro geográfico de Austria se encuentra en el punto de latitud y longitud $47{,}696528°$, $13{,}345694°$, y no se citan referencias. Según nuestro cálculos, el centro geográfico de Austria se encuentra en $47{,}591813°$, $14{,}100926°$. La distancia entre ambos puntos es de aproximadamente 60 km, es decir, dado el tamaño del país, hay una gran diferencia entre ambos puntos.

Australia. Utilizando nuestros métodos obtenemos que el centro geográfico de Australia continental es el punto con coordenadas $-25{,}625°, 134{,}206°$. De acuerdo a Geoscience Australia, dependiente del Gobierno de Australia, el "centro de gravedad" de Australia continental es el punto con coordenadas $-23{,}117°, 132{,}133°$ ([7]), bastante lejano, a 350 km, del que resulta de nuestro cálculo. Sin embargo, en ese mismo artículo se señala que también hay un "Centro de Gravedad Lambert" calculado en el año 1988 por la Geographical Society of Australia y que tiene coordenadas $-25{,}610°, 134{,}355°$. Este punto sí se sitúa cercano al de nuestros cálculos, a alrededor de 12 km.

Alemania. Según la Wikipedia en alemán (ver aquí) el centro geográfico de Alemania se encuentra en el punto de latitud y longitud $51{,}1333°$, $10{,}4166°$. Según nuestro cálculo, el centro geográfico de Alemania se encuentra en $51{,}0618°$, $10{,}3632°$. La distancia entre ambos puntos es aproximadamente de 8 km.

Argentina. Con respecto a Argentina, no hay al momento cálculos confiables del centro geográfico. Podemos encontrar en internet que la localidad de Puelches, La Pampa, con coordenadas $-38{,}15°$, $-65{,}92°$, ha sido declarada por *"decreto del gobierno nacional"* como el centro geográfico de la República Argentina (ver aquí y aquí). Sin embargo, ya a simple vista, no parece ser el centro geográfico de Argentina. No hemos podido encontrar en el Boletín Oficial el mencionado decreto y, por lo tanto, desconocemos sus fundamentos. Quizás para ese cálculo se incluyó la parte de la Antártida reclamada por Argentina, la cual no hemos incluido en nuestros cálculos pues no deja de ser un territorio reclamado.

Por otro lado, si realizamos la búsqueda en internet *"centro geográfico de Argentina"* encontraremos que la Plaza Federal, a la vera del lago San Roque, en Punilla, Córdoba, con coordenadas $-31{,}3446°$, $-64{,}4624°$, es mencionada en algunas páginas dedicadas al turismo como el centro geográfico de Argentina. No encontramos ningún fundamento a dicha afirmación.

Finalmente, usando nuestros procedimientos, hemos determinado que el centro geográfico de la Argentina se encontraría aproximadamente en coordenadas $-34{,}6989°$, $-64{,}7597°$, paraje ubicado al sur de la provincia de Córdoba, a 10 km al noroeste de Villa Huidobro. Es decir, según nuestros cálculos, si algún centro poblado merece llamarse centro geográfico de la Argentina, ese centro es la ciudad de Villa Huidobro.

Apéndice. Otra definición de centro de masa

En [6] se da una definición de centroide diferente a la que es utilizada en forma estándar. Nosotros daremos esa definición con el nombre de "centro de masa euclidiano" y demostraremos que es equivalente a la definición de centro de masa. La nueva definición se basa en la regla euclidiana de nivel que vimos en la Sección 2.

Lema A.1. *Sean* $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$ *y* $m_1, m_2 > 0$, *entonces existe* $v \in \mathbb{R}^n$, $v = t_0(v_2 - v_1) + v_1$ *para algún* $t_0 \in [0,1]$ *tal que* $||v_1 - v||m_1 = ||v_2 - v||m_2$.

Demostración. Sea $v(t) = t(v_2 - v_1) + v_1$ y $\phi(t) = ||v_1 - v||m_1 - ||v_2 - v||m_2$. Entonces $\phi(0) = -m_2 < 0$ y $\phi(1) = m_1 > 0$, como ϕ es una función continua, por el Teorema de los valores intermedios obtenemos que existe t_0 tal que $\phi(t_0) = 0$ y por lo tanto $v = v(t_0)$ satisface $||v_1 - v||m_1 = ||v_2 - v||m_2$. □

El centro de masa euclidiano se obtiene vía un proceso inductivo.

Definición A.2. Sean $v_1, \ldots, v_k$ vectores en $\mathbb{R}^n$ tal que v_i tiene masa m_i.

[$k = 1$] v_1 es el *centro de masa euclidiano* del sistema $\{(v_1, m_1)\}$.

[$k > 1$] Supongamos que el vector v' es el centro de masa euclidiano del sistema $\{(v_i, m_i)\}_{i=1,\ldots,k-1}$ y $m' = \sum_{i=1}^{k-1} m_i$, entonces el *centro de masa euclidiano* del sistema $\{(v_i, m_i)\}_{i=1,\ldots,k}$ es el vector v tal que $||v' - v||m' = ||v_k - v||m_k$ (la existencia de v está garantizada por el lema anterior).

Ejemplo A.3. Sean $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 3$ puntos en $\mathbb{R}$ con masas $m_1 = 1$, $m_2 = 1$, $m_3 = 2$. Entonces el centro de masa euclidiano del sistema $\{(x_1, m_1), (x_2, m_2)\}$ es 0 y $m_1 + m_2 = 2$. Ahora bien, el centro de masa euclidiano de $\{(0,2), (2,3)\}$ es $2/3$. Es decir el centro de masa euclidiano del sistema total es $2/3$

No es claro por definición que el centro de masa euclidiano de un sistema no dependa del orden de los puntos, sin embargo el siguiente teorema despeja toda ambigüedad.

Teorema A.4. *Sean $v_1, \dots, v_k$ vectores en $\mathbb{R}^n$ tal que v_i tiene masa m_i. Entonces el centro de masa del sistema $\{(v_i, m_i)\}_{i=1,\dots,k}$ es igual a su centro de masa euclidiano.*

Demostración. Para $k = 1$ es claro que ambas definiciones coinciden.

Si $k > 1$, supongamos que el resultado vale para $k-1$, es decir si v' es el centro de masa euclidiano del sistema $\{(v_i, m_i)\}_{i=1,\dots,k-1}$, entonces

$$v' = \frac{\sum_{i=1}^{k-1} m_i \cdot v_i}{m'},$$

donde $m' = \sum_{i=1}^{k-1} m_i$. Sea v el centro de masa del sistema $\{(v_i, m_i)\}_{i=1,\dots,k}$, el resultado quedará probado si demostramos que

$$||v' - v||m' = ||v_k - v||m_k. \tag{A.1}$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned}
||v' - v||m' &= ||m'v' - m'\frac{\sum_{i=1}^{k} m_i v_i}{m}|| = ||\sum_{i=1}^{k-1} m_i v_i - m'\frac{\sum_{i=1}^{k} m_i v_i}{m}|| \\
&= \frac{1}{m}||m\sum_{i=1}^{k-1} m_i v_i - m'\sum_{i=1}^{k} m_i v_i|| \\
&= \frac{1}{m}||\sum_{j=1}^{k} m_j \sum_{i=1}^{k-1} m_i v_i - \sum_{j=1}^{k-1} m_j \sum_{i=1}^{k} m_i v_i|| \\
&= \frac{1}{m}||\sum_{j=1}^{k-1}\sum_{i=1}^{k-1} m_j m_i v_i + m_k \sum_{i=1}^{k-1} m_i v_i - \sum_{j=1}^{k-1}\sum_{i=1}^{k-1} m_j m_i v_i - \sum_{j=1}^{k-1} m_j m_k v_k|| \\
&= \frac{1}{m}||m_k \sum_{i=1}^{k-1} m_i v_i - \sum_{j=1}^{k-1} m_j m_k v_k||
\end{aligned}$$

es decir

$$||v' - v||m' = \frac{m_k}{m}||\sum_{i=1}^{k-1} m_i v_i - \sum_{i=1}^{k-1} m_j v_k||.$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
||v_k - v||m_k &= ||v_k - \frac{\sum_{i=1}^{k} m_i v_i}{m}||m_k \\
&= ||\sum_{i=1}^{k} m_i v_k - \sum_{i=1}^{k} m_i v_i||\frac{m_k}{m} \\
&= ||\sum_{i=1}^{k-1} m_i v_k - \sum_{i=1}^{k-1} m_i v_i||\frac{m_k}{m}.
\end{aligned}$$

Luego la ecuación (A.1) se satisface y eso demuestra el teorema. □

Agradecimientos

Deseo agradecer a Eduardo Hulett y Marcos Salvai, ambos de FAMAF, por sus útiles comentarios y sugerencias para el presente artículo. En particular, Marcos me acercó el artículo de Galperín, en el cual se basa una parte importante del trabajo.

También deseo agradecer al comité editorial de la Revista de Educación Matemática de la UMA, y muy especialmente a Leandro Cagliero, por revisar y sugerir cambios en el trabajo que resultaron, a mi entender, en una mejora del mismo.

Referencias

[1] U.S. National Ocean Service, *Geographical Center of the United States*, U.S. Department of Commerce, National Oceanic and Atmospheric Administration, National Ocean Survey, 3 pp. (1960).

[2] U.S. National Ocean Service. *Geographical Center of the United States*. U.S. Department of Commerce, National Oceanic and Atmospheric Administration, National Ocean Survey, 3 pp. (1960).

[3] U.S. General Services Administration, National Archives and Records Service. *Code of Federal Regulations. Title 14, Aeronautics and space.* Washington, D.C. : Office of the Federal Register, (1961).

[4] U.S. Census Bureau, Geography Division . *Centers of Population for the United States 1950 - 2010* Washington, D.C. : U.S. Department of Commerce, (2011).

[5] A. J. Gharrett, R. G. Gustafson et al. *Genetics of Subpolar Fish and Invertebrates.* Springer Science & Business Media, 471 pp. (2012).

[6] G.A. Galperin. *A Concept of the Mass Center of a System of Material Points in the Constant Curvature Spaces.* Commun. Math. Phys. 154, 63-84 (1993).

[7] Australian Government, Geoscience Australia. *Centre of Australia, States and Territories*. Accedido en http://www.ga.gov.au el 8 de mayo de 2018.

[8] Fusion tables. *Natural Earth*. Accedido en https://fusiontables.google.com/DataSource?dsrcid=419167 el 11 de mayo de 2018.

Alejandro L. Tiraboschi
Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación (FAMAF) – Universidad Nacional de Córdoba (UNC) / Centro de Investigación y Estudios en Matemática (CIEMF).
Av. Medina Allende s/n , Ciudad Universitaria (X5000HUA) Córdoba, Argentina.,
(✉) alejandro.tiraboschi@unc.edu.ar

Recibido: *22 de mayo de 2018*.
Aceptado: *25 de julio de 2018*.
Publicado en línea: *30 de agosto de 2018*.

Revista de Educación Matemática
Volumen 33, N° 2 (2018), páginas 41 – 44
Unión Matemática Argentina - Famaf (UNC)

REFLEXIONES DE UN MATEMÁTICO GENIAL

Juan Carlos Dalmasso

Como puede observarse en la historia reciente, volvemos periódicamente a tropezar en la misma piedra y sus consecuencias son, en Educación, los catastróficos resultados en las pruebas de evaluación. Estas crisis se parecen a las económicas, son cada vez más profundas y graves. Se sale de ellas con inteligencia y no solo con voluntarismo.

Quizá debamos recordar que, en octubre de 1986, el Dr. Alberto Calderón, con el peso de su personalidad y su prestigio, nos hizo conocer sus reflexiones sobre la enseñanza y sobre todo, del aprendizaje en matemática (Calderón, 1987). Hoy, frente a la pregunta ¿por qué nos pasa? quizá sea necesario volver a ellas. Esto no es poco, se trata nada menos, que del formador de varias generaciones de investigadores exitosos que "cubrieron" el mapamundi universal matemático.

Calderón parte de las preguntas que frecuentemente hacen los niños para comprender el mundo exterior y concluye que son de dos clases: las del **tipo A:** ¿cómo?, ¿de qué manera? o ¿por qué?, que incumben a causas o estructuras lógicas del mundo y las del **tipo B:** ¿para qué? o ¿para cuál fin? o ¿para qué sirve?, que conciernen a aspectos teleológicos o finalidad. Estas últimas son también en las que insisten los alumnos en clases matemáticas y, como veremos más adelante, ello no es necesariamente por inmadurez.

Su primera reflexión

*"... si algo tiene una finalidad, el conocimiento de ésta
es indispensable para su comprensión."*

Aquí Calderón entra en la estructura del pensamiento, no para la especulación, sino con propósitos verdaderamente útiles, al señalar la importancia que tiene en la Pedagogía de la matemática y observa que todas las disciplinas del pensamiento comparten con la matemática esta curiosidad.

Respecto de su primera reflexión señala que hay una tendencia muy afianzada en la docencia que va en sentido contrario a su manera de pensar, por agregar:

uno puede imaginar su estudio con prescindencia total de los interrogantes del ¿para qué?, pero los resultados serán siempre precarios.

> *"... el conocimiento de las finalidades tiene consecuencias inmediatas en al aprendizaje. Es bien sabido que se aprende mucho mejor y más rápido si se lo hace persiguiendo algo. Esto se aplica particularmente a la matemática ... La presencia de una meta más o menos definida ilumina el camino a seguir, aviva el interés y permite valorar los distintos aspectos de la disciplina destacando lo primario y relegando lo secundario al lugar que corresponda. Eliminada la meta, la marcha parece a la deriva, el panorama adquiere un aspecto monótono indiferenciado y todo aparece como una acumulación de especulaciones difíciles y horriblemente aburridas."*

Con estas observaciones, sugiere recurrir al desarrollo histórico de la matemática para ver que, aún en sus capítulos más abstractos y aparentemente más alejados de las aplicaciones, no están desgajados de una red de interrelaciones que la vinculan con aspectos concretos de la realidad y sus aplicaciones. Quizá nos mandaba a estudiar Historia, con el mismo entusiasmo y con la misma sintonía que Simón Laplace sugería a sus alumnos "leed a Euler, *es el maestro de todos nosotros*".

¿Por qué pensé en Euler? Recordé una cita de Raymond Ayoub en referencia a él: "Leer sus artículos es una experiencia estimulante; uno está impresionado por la gran imaginación y originalidad. A veces, un resultado familiar para el lector, adquiere un aspecto original e iluminador que se necesita para entender mejor, y que los autores posteriores lograron ocultar." En esas prosas estaban las ideas vivas del pensamiento contemporáneo a Euler. Como muy pocos, inventaba ideas vitales en cataratas y las comunicaba con la misma frescura y entusiasmo de cuando se le ocurrían; esto se contrapone con la tendencia vanidosa de encubrir la pasión del creador, detrás de un fárrago de prosa técnica, de los formados solo en manuales. Euler claramente se estaba divirtiendo, persiguiendo las ideas activas que concebía, mientras jugaba para su propio disfrute, y además, exhibiendo una confianza arrolladora en que su búsqueda sería exitosa, según cuenta la Historia. Los que hacemos olimpíadas sabemos cuánto disfrutan los participantes exhibiendo las ideas que pergeñaron.

Leer historia parece ser para Calderón, la manera de encontrar las ideas vivaces que fermentan en la cabeza del genio. Ellas crecieron y se desarrollaron en la mente de los matemáticos, como ahora podrían hacerlo en la cabeza del aprendiz.

La experiencia muestra

> *"... que también es posible estudiar a ciegas, en lo que a metas se refiere, ... Esta forma de abordar su estudio está de moda entre quienes niegan la importancia de la motivación. Pero creo que esto es didácticamente erróneo y ciertamente lo*

> *es como método para guiar la investigación. ... la motivación es una de las fuentes más importantes del interés del estudiante o del estudioso y es, por lo tanto, un instrumento poderoso para despertar vocaciones."*

señaló sabiamente Calderón. En estas ideas vitales que penetran hasta la estructura misma del universo para hacerlo entendible reside, en gran parte, el prestigio de la Matemática y su influencia en la cultura.

Este poder real de la matemática que está en el dominio de las estructuras que hacen inteligible al mundo físico, sirve para dominarlo. Es por ello que siempre tubo un lugar de privilegio y un sitio preferencial junto al Poder Político. La vida de Euler fue un ejemplo de lo que decimos.

La historia cuenta que Euler se adaptó perfectamente a la vida intelectual de la Academia de San Petersburgo. Dedicó una gran cantidad de esfuerzo a la investigación, aunque estuvo constantemente a disposición del Estado que, después de todo, pagó su salario. Una y otra vez se encontró como consultor científico del gobierno, por cuya capacidad él preparó los mapas, aconsejó a la marina de guerra rusa, e incluso, probó diseños para los motores de bomberos.

Mientras tanto, su fama crecía. Uno de sus primeros triunfos fue una solución del llamado "Problema de Bassel" que había dejado perplejo a los matemáticos de la mayor parte del siglo anterior. Después Euler generalizó considerablemente el problema, y sus ideas fueron tomadas por otros. Años después, Bernhard Riemann definió la función zeta y demostró sus propiedades básicas. Recordemos aquí una vez más, las investigaciones de B. Riemann tuvieron un objetivo: comprender el funcionamiento del Universo. Mirado en perspectiva este fue un importante servicio que prestó la matemática de Riemann a la Física. Calderón dijo en aquella conferencia:

> *"La matemática es la reina de las ciencias,*
> *y toda buena reina debe servir a sus súbditos."*

Su segunda reflexión

> *"... más importante que acumular información es interiorizarse de métodos y saber qué propósito tienen, es decir, saber dónde parten y adónde llevan. Porque los métodos tienen una orientación, una dinámica, de las cuales los resultados y teoremas aislados carecen."*

Pero ¿qué son los métodos? ¿cómo se estudian? Los métodos son instrumentos para conseguir o alcanzar algo y así como un artesano aprende su oficio aprendiendo a manipular sus herramientas, es imposible aprender matemática sin disponerse a hacerla de manera activa y no como un observador pasivo. Por eso es mejor usar sus métodos o, mejor aún, descubrirlos aunque sea parcialmente. De esta manera Calderón nos orienta en el trabajo cotidiano del profesor. Se aprende por un manejo lúcido de los procesos típicos del matemático. Estos procesos deberían buscarse en el contexto histórico que los enmarca. Debería resultar extraordinariamente útil tratar de mirar la situación con la que aquellos se enfrentaron.

Así como las herramientas o el instrumental no hacen de por sí al buen orfebre, sino más bien la forma que el artista la utiliza, la acumulación de instrumentos no hace al buen desempeño del matemático. Por eso es importante la resolución de problemas.

> *"Nos brinda una experiencia en profundidad, una oportunidad de conocer y pulsar las dificultades, de conocer los alcances y limitaciones del instrumental y del conocimiento matemático que poseemos. Me refiero por supuesto a problemas no rutinarios o mecánicos cuya resolución exige iniciativa mental e ingenio."*

Es una forma de estimular la autonomía, el descubrimiento paulatino de estructuras matemáticas sencillas, de problemas interesantes relacionados con tales situaciones que surgen de modo natural.

Su aplicación a la resolución de los problemas, que a muchos les parece un objetivo inalcanzable, puede ser una verdadera fuente de satisfacción y placer intelectual, de asombro ante el poder del pensamiento matemático eficaz y de una fuerte atracción hacia la matemática, como ocurre con los participantes de la OMA.

Calderón concluyo su Conferencia con esta palabras:

> *"... todos somos capaces de inventar y descubrir en mayor o menor medida, y este aspecto activo y creador de nuestra mente debe ser cultivado en todo momento. Inclusive, diría yo, él nos brida el único camino para lograr un conocimiento profundo de cualquier disciplina. Nuestra mente es naturalmente activa y no soporta la inactividad o la inacción sin correr grave peligro de atrofia."*

La conferencia de Calderón se realizó durante la XXXVI Reunión Anual de la Unión Matemática Argentina en Octubre de 1986. Fue publicada en la Revista de Educación Matemática (Calderón, 1987).

Referencias

Alberto P. Calderón. *Reflexiones sobre el aprendizaje y enseñanza de la matemática.* Revista de Educación Matemática, Vol 3 (1987), N° 1, 3 – 13.

Juan Carlos Dalmasso
Director de OMA,
(✉) jcdalmasso1810@gmail.com

Recibido: *13 de junio de 2018.*
Aceptado: *17 de julio de 2018.*
Publicado en línea: *30 de agosto de 2018.*

el número π se esconde en el triángulo de Pascal?

El triángulo de Pascal es el arreglo en forma triangular de todos los números combinatorios $\binom{n}{k}$, $0 \leq k \leq n$. El número $\binom{n}{k}$ cuenta de cuántas maneras distintas se pueden elegir k objetos de un total de n y tiene la expresión $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ donde $n! = n(n-1)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$ es el factorial de n. Las primeras filas son

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
&&&&&&\binom{0}{0}&&&&&&\\
&&&&&\binom{1}{0}&&\binom{1}{1}&&&&&\\
&&&&\binom{2}{0}&&\binom{2}{1}&&\binom{2}{2}&&&&\\
&&&\binom{3}{0}&&\binom{3}{1}&&\binom{3}{2}&&\binom{3}{3}&&&\\
&&\binom{4}{0}&&\binom{4}{1}&&\binom{4}{2}&&\binom{4}{3}&&\binom{4}{4}&&\\
&\binom{5}{0}&&\binom{5}{1}&&\binom{5}{2}&&\binom{5}{3}&&\binom{5}{4}&&\binom{5}{5}&\\
\binom{6}{0}&&\binom{6}{1}&&\binom{6}{2}&&\binom{6}{3}&&\binom{6}{4}&&\binom{6}{5}&&\binom{6}{6}
\end{array}
\quad = \quad
\begin{array}{ccccccccccccc}
&&&&&&1&&&&&&\\
&&&&&1&&1&&&&&\\
&&&&1&&2&&\color{red}{1}&&&&\\
&&&1&&3&&\color{red}{3}&&\color{blue}{1}&&&\\
&&1&&4&&\color{red}{6}&&\color{blue}{4}&&1&&\\
&1&&5&&\color{red}{10}&&\color{blue}{10}&&5&&1&\\
1&&6&&\color{red}{15}&&\color{blue}{20}&&15&&6&&1
\end{array}$$

Algunas familias de números se 'esconden' en dicho triángulo. Los números triangulares $t_n = \frac{n(n+1)}{2}$ y los números tetraedrales $T_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$ son muy fáciles de hallar. Estos son $1, 3, 6, 10, 15, 21, \ldots$ y $1, 4, 10, 20, 35, \ldots$ respectivamente, y se encuentran en la segunda y tercera diagonal (en rojo y azul). Los famosos números de Fibonacci $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$ también se pueden encontrar. Estos números se obtienen recursivamente empezando por 1 y 1 y sumando los 2 términos anteriores. Si alineamos el triángulo a la izquierda, esta sucesión se encuentra sumando los números de las diagonales ascendentes desde la izquierda (dejamos al lector la verificación de este hecho).

¿Cómo encontrar el número π en el triángulo si éste sólo consta de números enteros? Hay infinitas aproximaciones racionales de π, por ejemplo $\frac{355}{113}$ da 6 decimales correctos ($\frac{223}{71}$ sólo da 2 decimales correctos, pero su numerador y denominador son números primos). Sin embargo, si queremos encontrar el número exacto, estamos obligados a usar algún desarrollo infinito o función trascendente. Existen algunos productos infinitos que dan π. Por ejemplo, la identidad $\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} \cdots$ de Viète (1593), que 'desafortunadamente' usa números irracionales. Usando solo números racionales tenemos

$$\pi = \prod_{n \text{ par}} \frac{n^2}{n^2-1} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{(2k)(2k)}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots \tag{1}$$

debida a John Wallis (1655) y

$$\frac{\pi}{4} = \Big(\prod_{p \equiv 1 \bmod 4} \frac{p}{p-1} \Big) \Big(\prod_{p \equiv 3 \bmod 4} \frac{p}{p+1} \Big) = \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{11}{12} \cdot \frac{13}{12} \cdot \frac{17}{16} \cdots \tag{2}$$

donde los productos son sobre primos (cada fracción es un primo sobre el múltiplo de 4 más cercano). La simpleza y belleza de las expresiones (1) y (2) es asombrosa.

Hay algunas series cuya suma está relacionada con π. Nos interesan sólo aquellas cuyos términos son fracciones. Tenemos las expresiones famosas

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \cdots \tag{3}$$

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots \tag{4}$$

debidas a Gottfried Leibnitz (1676) y Leonhard Euler (1735), respectivamente. Mucho menos conocida es la atribuida a Nilakhanta Somayaji (India, 1444-1544):

$$\frac{\pi}{4} = \frac{3}{4} + \sum_{n\geq 3 \text{ impar}} \frac{(-1)^{[\frac{n}{2}]}}{n^3-n} = 3 + \frac{1}{3^3-3} - \frac{1}{5^3-5} + \frac{1}{7^3-7} - \cdots$$

Equivalentemente, como $n^3 - n = n(n^2-1) = (n-1)n(n+1)$, tenemos

$$\pi = 3 + \frac{4}{2\cdot 3\cdot 4} - \frac{4}{4\cdot 5\cdot 6} + \frac{4}{6\cdot 7\cdot 8} - \frac{4}{8\cdot 9\cdot 10} + \cdots \tag{5}$$

Las expresiones (1) – (5) utilizan números racionales para representar π. La expresión (2) no puede ser usada para encontrar π de forma sencilla en el triángulo de Pascal, por lo que no la consideraremos. Sin embargo, el resto de las expresiones son fácilmente detectables en dicho triángulo. Por ejemplo, de (1) tenemos que

$$\frac{\pi}{4} = \frac{4}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{8}{7}\cdots \quad \longleftrightarrow \quad \begin{array}{c} 1 \\ 1 \quad 1 \\ 1 \quad 2 \quad 1 \\ 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\ 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\ 1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\ 1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1 \\ 1 \quad 7 \quad 21 \quad 35 \quad 35 \quad 21 \quad 7 \quad 1 \\ 1 \quad 8 \quad 28 \quad 56 \quad 70 \quad 56 \quad 28 \quad 8 \quad 1 \end{array}$$

Dejamos que encuentres por tu cuenta los 'dibujos' de números que dan π en el triángulo, que corresponden a las expresiones (3) y (4).

La expresión (5) es muy bonita y permite hallar π de la siguiente manera.

$$\frac{\pi-3}{4} = \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} - \frac{1}{4\cdot 5\cdot 6} + \frac{1}{6\cdot 7\cdot 8} - \cdots \quad \longleftrightarrow \quad \begin{array}{c} 1 \\ 1 \quad 1 \\ 1 \quad 2 \quad 1 \\ 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\ 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\ 1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\ 1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1 \\ 1 \quad 7 \quad 21 \quad 35 \quad 35 \quad 21 \quad 7 \quad 1 \\ 1 \quad 8 \quad 28 \quad 56 \quad 70 \quad 56 \quad 28 \quad 8 \quad 1 \end{array}$$

donde los números en rojo representan las fracciones positivas y los números en azul las fracciones negativas.

Otra forma de encontrar π en el triángulo a partir de (5) es la siguiente (Foster, 2018):

$$\begin{array}{c}
1\\
1 \quad 1\\
1 \quad 2 \quad 1\\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1\\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1\\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1\\
1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1\\
1 \quad 7 \quad 21 \quad 35 \quad 35 \quad 21 \quad 7 \quad 1\\
1 \quad 8 \quad 28 \quad 56 \quad 70 \quad 56 \quad 28 \quad 8 \quad 1
\end{array}$$

donde el número en círculo es el numerador y los otros dos del mismo color son los denominadores. El rojo corresponde a términos positivos y el azul a términos negativos. Esto sale de observar que

$$\frac{\binom{n}{1}}{\binom{n}{2}\binom{n+1}{2}} = \frac{n}{\frac{n(n-1)}{2}\,\frac{(n+1)n}{2}} = \frac{4}{(n-1)n(n+1)}.$$

Cuando n es impar, éstos son los términos de (5).

Existe una forma más sorprendente aún, debida a Jonas Castillo Toloza (2007), y es ¡usando los números triangulares de los cuales hablamos al principio! A partir de la igualdad

$$\pi - 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\left[\frac{n+1}{2}\right]}}{t_n} = \frac{1}{1} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \frac{1}{21} - \cdots$$

se tiene

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \frac{1}{21} - \cdots \leftrightarrow \quad \begin{array}{c}
1\\
1 \quad 1\\
1 \quad 2 \quad 1\\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1\\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1\\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1\\
1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1\\
1 \quad 7 \quad 21 \quad 35 \quad 35 \quad 21 \quad 7 \quad 1
\end{array}$$

El triángulo lleva su nombre en homenaje a Blaise Pascal (1623-1662) quien estudió sus propiedades. Sin embargo, se lo conoce desde mucho antes. En occidente fue estudiado por Petrus Apianus (Alemania, 1495-1552), Niccolò Fontana Tartaglia (Italia, 1500-1577), Michael Stifel (Alemania, 1486-1567) y François Viète (Francia, 1540-1603). En oriente ya era conocido en la India (Pingala, 200 a.C.), por los chinos Jia Xian (1010-1070) y Yang Hui (1238-1298); y por los persas Al-Karaji (953-1029) y Omar Khayyám (1048-1131).

Sección de Problemas

☞ *por Juan Pablo Rossetti*

Los siguientes problemas están pensados para un público amplio....

Las soluciones se encuentran en la página siguiente.

✎ *Problema 1.* MATCH POINT. Nuestro querido Juan Martín Del Potro se encuentra en un momento crucial: ¡tiene un *match point* a favor en la final de Wimbledon! ¡Y tiene su saque! Pero lamentablemente en el punto anterior se lesionó seriamente, así que este será el último punto del partido. Si lo gana, se consagrará campeón, si lo pierde, abandonará el partido. Solo él lo sabe. Federer, al frente, ni lo sospecha. La lesión no le afecta para sacar. Delpo piensa qué saque le conviene hacer. Repasa mentalmente las estadísticas que estudió con su entrenador (¡ayudados por un profesor de matemática!) y recuerda que su saque ”fulminante” siempre gana, su rival jamás logra responderlo, pero solo consigue hacerlo bien una quinta parte de las veces que lo intenta. Su saque ”tremendo” es ganador la mitad de las veces, y logra hacerlo bien en la mitad de sus intentos. Por último, su saque ”normal” entra el 99 por ciento de las veces pero solo gana de saque menos del 20 % de las veces que entra. ¿Qué le conviene hacer a Delpo con sus dos saques? ¿Cuál es la probabilidad de que gane, usando la mejor estrategia?

Nota: ya es interesante pensar el problema en el caso que a Delpo le quedara solo un saque. ¿Cuál es la respuesta en tal caso?

✎ *Problema 2.* PILETAS. ¡Llegó el calor y la pileta del club está lista para ser llenada! El pronóstico indica más de 33 grados para el día de la primavera. ¡Los estudiantes esperan ansiosamente poder celebrarlo con la pileta llena! Falta muy poquito. Al abrir la canilla de la pileta, alguien se acuerda que con ese caudal de agua tardará 6 días en llenarse. ¡Tremendo! Pero recuerdan que años anteriores pidieron ayuda a los dos predios colindantes al club, que por suerte se muestran bien dispuestos a ayudar y tienen mejor caudal: si en lugar de la canilla se usara solo la manguera de uno de los vecinos se tardarían 2 días y si se usara solo la manguera del otro vecino serían tres días. Consiguen poner las tres entradas de agua simultáneamente, sin perder caudal. La pregunta es ¿cuánto tardará en llenarse la pileta?

Vale la pena pensar el problema en general: Si tuviéramos tres fuentes de agua, las cuales tardan cada una a, b y c días (o puede ser cualquier unidad de tiempo) respectivamente en llenar cierta pileta en forma individual, entonces ¿cuánto tardará en llenarse la pileta si utilizamos las tres al mismo tiempo?

Problema 3. Reconstrucción de figuras. Se dibuja un triángulo, luego se marcan m_1, m_2 y m_3, los tres puntos medios de sus lados. Ahora se borra el triángulo dejando solo los tres puntos medios. ¿Se puede reconstruir el triángulo a partir de m_1, m_2 y m_3? Mostrar cómo.

Ahora hacemos lo mismo con un cuadrilátero, marcando los cuatro puntos medios de sus lados, m_1, m_2, m_3 y m_4. Mostrar con ejemplos que hay muchos cuadriláteros con estos cuatro puntos medios de sus lados.

¿Qué sucede en el caso de un pentágono?

¿Y en general? ¿Para qué valores de n natural, $n \geq 3$, los puntos medios de los lados de un polígono de n lados determinan completamente el polígono?

Otro problema donde se puede lograr la reconstrucción, es el siguiente: dado un triángulo escaleno, se traza la circunferencia que pasa por sus vértices, se elige uno de ellos, llamémoslo v, y se trazan: la altura desde v, la mediatriz del lado opuesto a v y la mediana desde v, se las prolonga de modo que corten a la circunferencia en los puntos p, q y r respectivamente. Ahora borramos todo menos los tres puntos p, q y r. Dar la forma de reconstruir el triángulo original.

Problema 4. Pensemos en un reloj de agujas, una que marca las horas y la otra los minutos. A lo largo de todo un día, ¿cuántas veces se cruzan estas agujas?

¿Y cuántas veces en un día forman un ángulo recto?

SOLUCIONES

✓ *Solución 1.* El caso de un solo saque es más sencillo: si hace el saque tremendo (T), entonces tiene $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$ de probabilidades de ganar, mientras que con el saque fulminante (F), tiene solo $\frac{1}{5}$, y con el normal aun menos. Así que le convendría el tremendo (T).

Veamos el caso general, con dos saques. Notemos que lo importante será decidir qué hacer en el primer saque, puesto que si este no entra, se pasará al segundo saque, entonces queda un solo saque por hacer, caso ya analizado, donde conviene hacer el tremendo (T).

Si el primer saque es (T), tiene $\frac{1}{4}$ de probabilidad de ganar en esa instancia. Si esto no ocurre, con el segundo saque (T) la probabilidad sería $(1-\frac{1}{2})\times\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$. Sumando ambas tenemos $\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{3}{8}=0,375$, es decir hay $37,5$ por ciento de ganar con (T)+(T).

Si en cambio en el primero hace el fulminante (F), tiene $\frac{1}{5}$ de chances de ganar ahí mismo. Si no entra, pasa a su 2do saque, esto ocurre con probabilidad $1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$. Con el segundo saque (T), tendrá una probabilidad de $\frac{4}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{5}$ de ganar. Sumando ambas, se obtiene $\frac{1}{5}+\frac{1}{5}=\frac{2}{5}$ con la estrategia (F)+(T), es decir, el 40 por ciento.

El saque "normal" arroja números menos convenientes en esta instancia crucial. Así que comparando, le conviene hacer su primer saque "fulminante", y si no entra, hacer en el segundo saque "tremendo".

✓ *Solución 2.* Rta: en un día. Justificación: Se puede pensar que usando las tres fuentes de agua, en 6 días, llenaríamos: 1 pileta con la canilla propia, 3 piletas con la manguera de un vecino y 2 piletas con la manguera del otro vecino. O sea que en 6 días llenaríamos 6 piletas. Por lo tanto, en un día llenamos una pileta.

Para el caso general, al sumar las tres fuentes, llenan $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ piletas por día. Luego, para llenar una pileta, se tardará $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^{-1}$ días (o la unidad de tiempo elegida).

✓ *Solución 3.* Los segmentos que unen dos puntos medios de los lados de un triángulo son bases medias, por lo que cada uno de ellos es paralelo a un lado del triángulo y de la mitad de su largo. Así, es claro cómo se puede trazar el triángulo original.

En general, dado un polígono de n lados, se marcan los n puntos medios en forma ordenada $m_1, m_2, \ldots, m_n$, se borran los n lados del polígono dejando solo en la hoja (o pizarrón) los puntos medios. Ahora consideramos las simetrías centrales S_{m_i}, con centros en m_i, y notamos que la composición $S_{m_1} \circ S_{m_2} \circ \cdots \circ S_{m_n}$ es una transformación rígida del plano que deja fijo un vértice del polígono, v_n. Si n es impar, esta transformación rígida es nuevamente una simetría central, determinada por los puntos m_i, de modo que al conocerla, sabemos donde marcar el vértice que queda fijo, y por lo tanto recuperamos en forma unívoca el polígono original, cuyos vértices son v_n, $v_{n-1} = S_{m_n}(v_n)$, $v_{n-2} = \left(S_{m_{n-1}} \circ S_{m_n}\right)(v_n)$ y así sucesivamente hasta $v_1 = (S_{m_2} \circ \cdots \circ S_{m_n})(v_n)$ y se cierra en $v_n = (S_{m_1} \circ S_{m_2} \circ \cdots \circ S_{m_n})(v_n)$.

En cambio, si n es par, la composición de simetrías centrales es una traslación, que al tener un punto fijo, es necesariamente la identidad. De modo que hacer esta composición, muestra que con cualquier punto p en el plano que comencemos como candidato para vértice de nuestro polígono, obtendremos al ir aplicando las composiciones de nuestras simetrías centrales los n vértices de un polígono (solo que si se comienza en ciertas regiones, será un polígono no simpleo).

✓ *Solución 4.* Se cruzan 22 veces . Hay que contar notando que cada superposición de agujas se produce no cada hora, sino cada 1 hora y 5 minutos aproximadamente. De modo que cada doce horas se producen 11 superposiciones (a las 12 en punto, a la 1 y 5 (y 27 segundos) a las 2 y 10 (casi 2 y 11) a las 3 y 16, a las 4:21, 5:27, 6:32, 7:38, 8:43, 9:49, 10:54 y luego se juntan de nuevo a las 12 en punto.

Forman ángulo recto 44 veces. Se puede contar como recién, o se puede pensar simplemente que el ángulo recto se produce aproximadamente unos 15 minutos antes y unos 15 minutos despues de cada vez que se superponen las agujas, por lo tanto, dos veces por cada superposición. Entonces $2 \times 22 = 44$.

¡Sucesiones al toque!

¿Cuál creés que es el próximo número en las siguientes sucesiones y por qué? ¿Te animás a encontrar más términos de estas sucesiones? ¿Y una fórmula general?

$$\{a_n\}: \quad 1, 10, 27, 52, 85, 126, \ldots$$

$$\{b_n\}: \quad 0, 1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 12, 16, 21, \ldots$$

$$\{c_n\}: \quad 3, 1, 4, 1, 5, 9, 2, 6, 5, 3, 5, 8, 9, 7, 9, 3, 2, 3, \ldots$$

$$\{d_n\}: \quad 3, 5, 6, 9, 10, 12, 15, 17, 18, 20, 23, 24, 27, 29, 30, 33, \ldots$$

Ayuda para la última: pensar en otro sistema de numeración distinto del decimal.

Podés encontrar las soluciones en la página 58.

La Villa Matemática de Ali Nesin

por Ricardo Podestá

TUVE LA suerte de poder asistir recientemente al ICM 2018 en Río de Janeiro, el mayor evento de la matemática cada 4 años. Allí pude compartir con mas de 3000 colegas de todo el mundo la pasión por las matemáticas. Uno de los momentos que mas disfruté fue la entrega del premio Leelavati del cual ya habló Leandro en la Editorial. Ali Nesin, el premiado, dedicó su vida a la enseñanaza de la matemática de forma apasasionada, desinteresada y hasta poniendo en riesgo su libertad.

LA ENTREGA del premio fue acompañada por un video preparado por la Unión Matemática Internacional (IMU, International Mathematical Union) en el cual Ali narra en primera persona los pormenores de la creación de la Villa Matemática. Esta es una verdadera villa, ubicada en las montañas de Turquía, dedicada a la enseñanza de la matemática de todos los niveles (desde primario a universitario) de forma no tan ortodoxa. Este video es sin duda muy motivante e inspirador, y recomiendo fuertemente verlo. Pueden encontrarlo en el link `https://www.mathunion.org/fileadmin/IMU/Prizes/Leelavati` (o también pueden buscarlo en YouTube). Toda la gente presente aplaudiendo de pie por un largo rato al final de la proyección fue un digno reconocimiento a este personaje singular, simpático y comprometido. Y sin dudas uno de los momentos más lindos y emotivos de todo el evento. Les dejo a continuación el texto del video traducido al español. ¡Que lo disfruten!

Texto del video de premiación de Ali Nesin

No había nada, sólo un campo. Y las ideas de una persona, sus sueños. No se supone que este lugar existiera. No tenía dinero. La gente daba donaciones. Confiaron en mí. ¿Por qué deberían? Una villa matemática, donde enseñas matemática, no se supone que sobreviva. Las sociedades no le dan tanto valor a las matemáticas. Es un milagro, ¿sabes? Es como tirar los dados y sacar dos seises cada vez.

Soy un profesor de matemática en la Istanbul Bilgi University (Universidad de Informacion de Estanbul) y además soy el fundador de la Villa Matemática en las montañas de Turquía. El nombre de mi padre es Aziz Nesin, un muy conocido humorista, escritor y activista. El es conocido como un socialista y opositor a todos los gobiernos. Su prioridad era la gente –la gente pobre de Turquía–.

Yo estaba en los Estados Unidos cuando mi padre murió. Tuve que volver a Turquía para hacerme cargo de la fundación que el creó, la Fundación para los Chicos. Había alrededor de 30 chicos, desde 3 años hasta 25 años de edad. Pañales, agua limpia, lavado de dientes, contabilidad. . . Para alguien que pasaba todo su tiempo pensando sobre matemáticas, volví a Turquía y, de repente, tuve que pensar sobre los problemas de todos los días.

Los Estados Unidos no me necesitaban. Pero Turquía si me necesitaba. Podía venir aquí y hacer un cambio. Podía cambiar a la gente una por una. Asi que miré alrededor en Turquía y traté de encontrar que es lo que estaba haciendo falta. Encontré que lo que estaba faltando era la eduación de elite, eduación de alto nivel. Hice un muy, muy ambicioso, de un muy alto nivel. De hecho fue el comienzo de la Villa Matemática, porque los estudiantes no estaban listos, no estaban pensando. No sabían cómo pensar. Asi que primero los llevé a mi casa por las tardes. Los llevé a la fundación. Cada año organizaba una escuela de veranon en diferentes partes de Turquía. Esto cambió sus vidas.

Luego decidí que deberíamos tener nuestro propio lugar porque era muy difícil organizar estas escuelas de verano. Elegimos Sirince (el pueblo), porque Sevan Nisanyan, mi amigo, estaba allí. Y el iba a construir la villa. Sevan es además Armenio, abiertamente opuesto al gobierno. Cada vez que estuvieramos juntos, haríamos planes sobre la Villa Matemática. Sin su coraje, y sin su habilidad, la Villa Matemática no existiría. Tenía sólo 20.000 dólares quizás, pero teníamos voluntarios: los chicos de la fundación, mis estudiantes, otros estudiantes, mis propios hijos. Durmiendo afuera, cocinando afuera. . . teniendo algunas horas de clase y luego trabajando.

En 2007, ellos pararon la construcción. El 21 o 22 de Julio, los gendarmes vinieron. A cerrar la Villa Matemática. Ellos sellaron la villa, de hecho. Y nos fuimos al bosque, porque estaba prohibido estar en la villa. Era un cementerio, un cementerio de caballos. Había huesos de caballos. Cinco dias después, los gendarmes vinieron de nuevo. Dijeron, "los queremos fuera del bosque también". Esto fue suficiente, tenía que reaccionaron. Tenía un diario de la Villa Matemática. Lo hice público. Y fueron grandes noticias en Turquía. Nos volvimos famosos en un día. Volvimos a la villa. Quitamos los sellos de clausura. Y la gente, gente sencilla dio dinero para mi sueño. Recolectamos cerca de 150.000 dólares. Sevan fue a la cárcel. El no tenía abogados. El no prestabad atención a esas cosas. Yo tuve suerte, encontraron pequeños problemas con el caso y fui absuelto.

Quiero que los alumnos cambien cuando llegan aquí. Que se encuentre con otra cosa. Con otro mundo. Su propio mundo –no el mundo de otro– Cada clase duraba por 2 horas. Luego del almuerzo ellos tienen tareas como pelar papas, regar las plantas o lo que sea. Y luego, a las 4 en punto, comenzamos las clases nuevamente. Le digo a mis alumnos: no intenten resolver eI problema, traten de entender el problema, la respuesta saltará, saltará de la hoja. No traten de resolverlo. No vayan atrás de la respuesta. Sólo traten de entender el problema. Les estoy enseñando que la respuesta es lo menos importante. Lo importante es es la idea. Por qué.

La Villa Matemática tenía que ser hecha. Nunca tuve segundos pensamientos. Tenía miedo de ir a la carcel y demás. Pero nunca consideré la posibilidad de no hacer esto, de detenerlo. Tenía que ser hecho. No había segunda oportunidad. La Villa Matemática no tenía una segunda oportunidad. Tenía que nacer. Tenía que existir.

Soluciones de ¡sucesiones al toque!

- $a_7 = 175$. Son los números $1^1 + 0$, $3^2 + 1$, $5^2 + 2$, etc. O sea los impares al cuadrado mas el orden $(2m + 1)^2 + m$ con $m = 0, 1, 2, \ldots$. También se lo puede pensar como que a cada número de la sucesión se le suman $8n + 1$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Una forma gráfica de verlo es hacer una espiral de números comenzando desde el cero al centro, el 1 abajo y luego en sentido antihorario ir rodeando el cero. En cada nivel abajo del cero aparecen los números en cuestión.
- $b_{15} = 28$. Tipo Fibonacci pero así: $b_n := b_{n-2} + b_{n-3}$.
- $c_{19} = 8$. Son los dígitos (enteros y decimales) de π.
- $d_{17} = 34$. Son los números con una cantidad par de unos en su escritura en sistema binario.

Viene de la página 53.