# Revista de Educación Matemática




Registro Nacional de la Propiedad Intelectual N° 168024

ISSN 0326-8780 (versión impresa)

ISSN 1852-2890 (en línea)

Página web: https://revistas.unc.edu.ar/index.php/REM/index
Correo electrónico: revm@famaf.unc.edu.ar

# Revista de Educación Matemática

## Volumen 33, N° 3 – 2018

# ÍNDICE



También encontrarás curiosidades bajo los títulos *¿Sabías que...?* y *¡Sucesiones al toque!*

# Editorial

Con este número se cierra la edición del volumen 33 de la Revista de Educación Matemática en 2018. Este número aborda temas asociados con los números racionales y las concepciones presentes en estudiantes secundarios, las series de Leibniz y la teoría de probabilidades. Son tres los artículos que lo integran y están acompañados de la reseña de un interesante libro y la habitual sección de problemas.

En el artículo *Estudiantes de escuela secundaria pensando los números racionales*, Maximiliano Palacios Amaya, Verónica Bianchi y Virginia Montoro reportan resultados de una investigación en la que indagaron acerca de las concepciones que manifiestan estudiantes de educación secundaria en relación con los números racionales. El estudio se llevó a cabo con estudiantes de primero, tercero y quinto años de una escuela pública de Bariloche a través de un cuestionario con tareas diversas. Las respuestas obtenidas permitieron dilucidar diversas concepciones en torno a los números racionales en sus distintas formas de representación. Asimismo, podremos apreciar una caracterización de las ideas asociadas a los conceptos de densidad y orden en los números racionales.

En *Series de Leibniz: un relato de Noche de Brujas*, una misteriosa inscripción matemática tallada en una tenebrosa calabaza: $4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}$, resulta ser la divertida inspiración que lleva a Roberto Ben y Antonio Cafure a introducirnos en un interesante estudio de las series de Leibniz. Los autores proponen un recorrido por diversos teoremas, cotas para el error en el cálculo de la suma, procesos de aceleración de la convergencia y cálculo numérico… a fin de develar el misterio de la calabaza. Un excelente ensayo que conjuga imaginación, historia, álgebra, análisis y cálculo computacional.

En *Matemática en azar y juegos*, Roberto Miatello y Ángel Villanueva recopilan una colección de conocidas aplicaciones de la teoría de probabilidades en diversos contextos. Los autores analizan diversas situaciones en juegos de azar con dados o monedas y estudian resultados posibles en distintos tipos de torneos y competencias. Nos sorprenden al informarnos que, en un grupo de 60 personas, la probabilidad de que haya dos que cumplan años el mismo día es de aproximadamente $0{,}99$; y también analizan probabilísticamente el improbable caso que un mono logre tipear en una máquina de escribir y al azar la obra de Cervantes, *El Quijote*.

Finalmente, cierra este número la reseña del libro *La escuela construye aprendizajes*. Experiencias y propuestas para la enseñanza de Matemática y Ciencias Naturales, realizada por Dilma Fregona. Esta reseña nos invita a adentrarnos en la lectura de una obra refrescante que registra detalles de experiencias innovadoras desarrolladas en aulas de escuelas públicas y relatadas por los propios docentes.

No queremos terminar esta editorial sin mencionar un hecho que entendemos relevante para la comunidad de matemáticos y educadores matemáticos de nuestro país. En el transcurso de este año la enseñanza de la matemática ha estado en el foco de debates en el ámbito ministerial a nivel nacional. A partir de los resultados obtenidos en matemática en las pruebas del Operativo Aprender 2016 y 2017, se planteó la necesidad de una reforma en la enseñanza de esta disciplina. Así, se inició un proceso de revisión curricular, reuniones técnicas, exposiciones de especialistas extranjeros y seminarios informativos que desembocó en la aprobación de los Indicadores de Progresión de los Aprendizajes Prioritarios en Matemática, a mediados de septiembre, y en la presentación del Plan Nacional Aprender Matemática, a mediados de octubre. Todo este proceso fue acompañado por reflexiones, reacciones y análisis de especialistas en matemática o educación matemática de nuestro país que han realizado críticas, señalando problemas en los enfoques didácticos y advirtiendo acerca de aparentes recortes de contenidos propuestos en el plan. No es objetivo de esta editorial profundizar en este tema, pero tampoco queremos pasar por alto un hecho de esta envergadura porque nos convoca como matemáticos y educadores. La aplicación del nuevo plan producirá efectos en los distintos niveles de la educación obligatoria y en la formación inicial y continua de docentes que actúan o actuarán en la enseñanza de la matemática a futuro. Consideramos central que la revista se haga eco de debates actuales relacionados con la educación matemática e invitamos a los lectores a realizar contribuciones que permitan profundizar en reflexiones y análisis fundamentados del Plan Nacional Aprender Matemática y sus implicancias.

Nos despedimos esperando que en 2019 nos sigan acompañando como lectores y autores.

*Mónica Villarreal*

Nota: Es muy importante para la RevEM contar con la colaboración de ustedes a través del envío de contribuciones de calidad para publicar. Solicitamos enviar los artículos preferentemente a través del sistema en la página web, pero si tienen inconvenientes pueden hacerlo a la dirección de correo electrónico que figura abajo.

Página web: https://revistas.unc.edu.ar/index.php/REM/index

Correo electrónico: revm@famaf.unc.edu.ar

Revista de Educación Matemática
Volumen 33, N° 3 (2018), páginas 5 – 26
Unión Matemática Argentina - Famaf (UNC)

*Artículo Científico*

# ESTUDIANTES DE ESCUELA SECUNDARIA PENSANDO LOS NÚMEROS RACIONALES

Maximiliano Palacios Amaya, Verónica Bianchi y Virginia Montoro

Resumen. En el marco de un estudio sobre las concepciones de estudiantes de secundaria acerca de los números racionales, se diseñó un cuestionario con cuatro actividades orientadas a indagar dicha comprensión. Se aplicó este cuestionario a 132 estudiantes de distintos años de escolaridad, de una escuela secundaria pública de Bariloche (Argentina).

Se categorizaron las respuestas a cada una de las actividades con controles inter-juez. Posteriormente se realizó un Análisis Factorial de Correspondencias Múltiple y Clasificación Jerárquica de las respuestas de los estudiantes y se buscaron asociaciones de las clases resultantes con el nivel de estudio de los mismos.

En cuanto a las concepciones de los estudiantes, encontramos un gradiente que se expresa desde una ajenidad respecto al tema, le sigue una fase intermedia asociada principalmente con relacionar los números racionales con objetos previamente vistos como son los números enteros o números decimales y finalmente encontramos una comprensión de los racionales mas cercana al respectivo concepto matemático y un buen manejo general de las propiedades de orden y densidad, presente en los estudiantes más avanzados.

Abstract. In the framework of a study on the conceptions of secondary students about rational numbers, a questionnaire was designed with four activities oriented to investigate this understanding. This questionnaire was applied to 132 students of different school stages of a public secondary school in Bariloche (Argentina).

The responses to each of the activities were categorized with inter-judge controls. Subsequently a Factorial Analysis of Multiple Correspondences and a Hierarchical Classification of the answers of the students were carried out, and associations with the students study-level of the resulting classes were sought.

As for the students conceptions, we found a gradient that is expressed by strangeness, followed by an intermediate phase mainly associated with some link of the rational numbers to objects already known (as the integers or the decimal numbers), and finally, we found an understanding of the rationals that is closest to its respective mathematical concept together with a good general management of the properties of order and density, present in the most advanced students.

*Palabras clave*: Concepciones, número racional, análisis multivariado, notación, estudiante de secundaria.
*Keywords*: Conceptions, rational number, multivariate analysis, notation, high-school students.

## §1. Introducción

El estudio de los números racionales figura en el currículo de la escuela secundaria argentina, como contenido transversal desde primero a quinto año. En la escuela primaria se estudia esencialmente el aspecto operativo de los mismos, mientras que en la escolaridad secundaria este trabajo está orientado a vincular las distintas representaciones del número racional, profundizándose en el orden de los números y el concepto de densidad. Sin embargo, varias investigaciones han mostrado que los alumnos experimentan dificultades al aprender y utilizar conceptos relacionados con números racionales (Behr, Lesh, Post, & Silver, 1983; Tirosh, Fischbein, Graeber, & Wilson, 1999; Merenluoto, 2003; Stafylidou & Vosniadou, 2004; Vamvakoussi & Vosniadou, 2004; Steinle & Pierce, 2006; Vamvakoussi & Vosniadou, 2007; Widjaja, Stacey, & Steinle, 2008).

Nos interesa en particular la dificultad que se manifiesta en el traspaso inadecuado de las propiedades de los números naturales a los racionales, que frecuentemente lleva al estudiante a utilizarlas en situaciones donde ya no son apropiadas (Vamvakoussi & Vosniadou, 2010). En palabras de (Tirosh et al., 1999), frecuentemente los alumnos atribuyen erróneamente a los números racionales propiedades de las operaciones con números naturales o números enteros, pues los alumnos no tienen la misma experiencia cotidiana usando números racionales que con el uso de los números naturales.

En particular, vemos que las dificultades de los alumnos para aceptar la densidad de los números racionales puede deberse en parte a la traslación de la propiedad de los números naturales, que dice que a cada número $n$ le corresponde un único sucesor inmediato $n+1$, al conjunto de números racionales (Merenluoto, 2003).

Entre los artículos mencionados, resaltamos a (Widjaja et al., 2008) donde clasificaron las concepciones erróneas acerca de la densidad de los números racionales en tres categorías: la primera dificultad debida a la asociación de los números decimales con los números enteros (dificultad al hallar números decimales entre dos dados). La segunda refiere a la comparación de fracciones o números decimales de la misma clase: mostrando una tendencia a trabajar solo con decimales con la misma cantidad de dígitos en la parte decimal o con fracciones con iguales denominadores; y la tercera dificultad es el uso de redondeo.

El conjunto de los números racionales es un conjunto ordenado y denso. El orden es dado en forma axiomática, mediante la definición de una relación denominada '$<$', que permite que dos números racionales siempre pueden ser comparados. Dicho orden posee la característica (contra-intuitiva) de que un intervalo acotado puede no tener primer elemento, lo que lo diferencia del orden de los números naturales.

La densidad es otra propiedad que diferencia a los números racionales de los enteros: dados dos números racionales distintos (supongamos $a < b$) hay al menos un número racional $q$ tal que $a < q < b$. Esto implica que entre dos números racionales hay infinitos números racionales.

Esta propiedad contra-intuitiva ha llevado a paradojas, desde los griegos clásicos, como la denominada "paradoja de Zenón". Aquiles, el más veloz de los griegos, persigue a una tortuga que se arrastra alejándose de él. Zenón argumenta que el héroe no puede alcanzar al animal pues, en el instante de la partida, Aquiles se encuentra a una cierta distancia del animal, inmediatamente franqueará un segundo instante en el que esta distancia se habrá hecho dos veces menor que la primera, luego alcanzará un tercer instante en el que la distancia considerada, reducida nuevamente a la mitad, sea el cuarto de la distancia inicial. Y luego un cuarto instante en el que esta distancia, de Aquiles a la tortuga, será el octavo de su valor inicial y siguiendo este proceso "ad infinitum" Aquiles nunca podrá alcanzar a la tortuga.

Otro aspecto notable que dificulta la comprensión de estas nociones, es el concepto de infinito, implícito en la densidad y en la notación decimal: en particular la notación decimal de los números racionales periódicos puede remitir a un proceso sin fin del algoritmo de la división. Sin embargo, una comprensión cabal de estas nociones involucra la idea de infinito actual. Estudios que indagan sobre concepciones del infinito matemático muestran que la aceptación del infinito actual es contraintuitiva, y requiere de contextos educativos que propicien la reflexión matemática a través de intervenciones de enseñanza especificas (Fischbein, Jehiam, & Cohen, 1994; Artigue, 1995; Moreno-Armella & Waldegg, 1995; Monaghan, 2001; Montoro, 2005; Juan, Montoro, & Scheuer, 2012).

Entre las concepciones que operan cuando los estudiantes trabajan conceptos que involucran la noción de infinito, encontramos que los más jóvenes o con menor estudio de matemática suelen mostrar inseguridad o resistencia frente a la posibilidad de la existencia de colecciones infinitas (Montoro, 2005; Juan et al., 2012). También, dos visiones finitistas muy arraigadas son: concebir el infinito como un número muy grande o extender la propiedad de los conjuntos finitos a los conjuntos infinitos (Waldegg, 1993; Monaghan, 2001; Juan et al., 2012; Montoro, Scheuer, & Pérez-Echeverría, 2016). Muy frecuentemente los jóvenes conciben al infinito en forma potencial (Fischbein, Tirosh, & Hess, 1979; Monaghan, 2001; Arrigo & D'Amore, 2004) y una minoría lo concibe como infinito actual (Moreno-Armella & Waldegg, 1995; Montoro, 2005).

Si bien se han realizado varias investigaciones didácticas acerca de la enseñanza de números racionales (Saiz, Gorostegui, & Vilotta, 2011; Nardoni, Camara, & Pochulu, 2014), no hemos podido encontrar aún estudios sobre el aprendizaje de números racionales en el sistema de educación argentino. Este trabajo proporciona datos originales acerca del tema en la región, relacionándolas con investigaciones realizadas en el resto del mundo.

El objetivo de este trabajo es estudiar la comprensión del número racional en estudiantes de escuela secundaria, en particular, la comprensión de la densidad y del orden de números racionales y su relación con distintas representaciones externas convencionales, a partir de la información obtenida de las respuestas a un cuestionario.

## §2. Metodología

**Participantes.** El cuestionario fue aplicado a 132 estudiantes de escuela secundaria de una escuela pública de la ciudad de San Carlos de Bariloche. El mismo fue respondido por estudiantes de dos cursos de primer año (47 alumnos), dos cursos de tercero (44 alumnos) y dos cursos de quinto (41 alumnos). Las edades de los estudiantes se encuentran entre 12 y 18 años.

**Instrumento de indagación.** En la elaboración del cuestionario nos centramos en forma exclusiva en tareas sobre racionales positivos. Fue respondido de forma escrita e individual, en menos de ochenta minutos. Los estudiantes podían optar por usar calculadoras. Este estudio se basó en la resolución de cuatro tareas, de las cuales dos eran de respuestas abiertas (Tarea 1 y 4) y dos de respuestas cerradas (Tarea 2 y 3), que presentaremos a continuación.

*Tarea 1: Posiblemente has escuchado que* $\frac{1}{2}$ *y* $0,25$ *son números racionales. ¿Cómo explicarías con tus palabras en qué consiste esa condición de ser "racionales"?*

En esta tarea los estudiantes son invitados a explicar con sus propias palabras lo que es un número racional. Es esperable que la mayoría pueda proporcionar una respuesta, dado que han trabajado con estos números desde cuarto grado en la escuela primaria, aunque posiblemente bajo el nombre de fracciones o decimales. Se espera que los estudiantes comenten sobre las características principales de la definición de número racional, por ejemplo, podrían decir que es un número decimal que satisface una propiedad específica.

*Tarea 2: ¿Podrías nombrar un número entre los siguientes pares?,*

$$0 \text{ y } 2, \qquad \frac{1}{5} \text{ y } \frac{1}{4}, \qquad \frac{3}{8} \text{ y } \frac{4}{8}, \qquad 3{,}14 \text{ y } 3{,}15, \qquad 0,899 \text{ y } 0,90, \qquad \frac{1}{4} \text{ y } 1{,}4.$$

*Elige una de las siguientes opciones para cada una:* ***Sí*** *-* ***No hay*** *-* ***No sé****. Si la respuesta es afirmativa escribe un número que se encuentre entre ambos.*

*¿Cuantos números hay entre cada uno de los pares anteriores? Elige una de las siguientes opciones para cada uno:* ***Ninguno*** *-* ***Sólo uno*** *-* ***Unos Pocos*** *-* ***Muchísimos*** *-* ***Infinitos*** *-* ***No sé****.*

*Tarea 3: Indica el número mayor entre cada par de números a continuación, o indica que son iguales*

$$1{,}23 \; y \; 0{,}76, \quad 0{,}989 \; y \; 1{,}02, \quad 0{,}4 \; y \; 0{,}326, \quad 3{,}72 \; y \; 3{,}073, \quad 8{,}24573 \; y \; 8{,}245,$$

$$1{,}7501 \; y \; 1{,}75011, \quad 6{,}3 \; y \; 6{,}03, \quad 1{,}99 \; y \; 1{,}89999, \quad 2 \; y \; 1{,}9999..., \quad 0{,}5 \; y \; 0{,}50,$$

$$\frac{3}{8} \; y \; \frac{5}{8}, \quad \frac{2}{4} \; y \; \frac{2}{5}, \quad \frac{4}{10} \; y \; \frac{1}{2}, \quad \frac{4}{6} \; y \; \frac{6}{4}, \quad \frac{99}{100} \; y \; \frac{999}{1000}, \quad \frac{1}{4} \; y \; 0{,}25, \quad 0{,}3 \; y \; \frac{1}{3},$$

$$0{,}535 \; y \; \frac{2}{7}, \quad 0{,}333... \; y \; \frac{1}{3}.$$

Ambas tareas presentan numerosos incisos de tipo operacional. Las mismas están relacionadas preliminar y principalmente con dos conceptos: la densidad y el orden de números racionales. En cuanto a la densidad, en la Tarea 2 en particular, no se ve involucrada la comprensión completa de la misma, pues solo se pregunta si entre dos elementos dados se puede encontrar un elemento intermedio, es una tarea preliminar introducida para un posterior abordaje al concepto de densidad en rigor. En ambas tareas se expresan los elementos a comparar tanto en notación decimal como fraccionaria, intercalando una variada gama de dificultades (Steinle & Stacey, 1998), entre ellas:

- el número más chico tiene mayor cantidad de decimales,
- números cuya expresión decimal contiene un 0 en la posición de los décimos o cuyas expresiones decimales además contienen números naturales consecutivos,
- expresiones en donde la parte entera es la misma pero la decimal difiere en mantisa,
- los números a comparar se encuentran expresados en notación fraccionara con el mismo numerador/denominador, siendo los denominadores (resp. numeradores) números naturales consecutivos,
- dos números racionales expresados con distinta notación (decimal y fraccionaria).

Es esperable que los estudiantes utilicen distintos tipos de estrategia para responder, por ejemplo redondeo o truncamiento o extrapolación de propiedades de los números enteros al conjunto de los racionales. También que se desempeñen de distinta manera para distintos tipos de notación.

*Tarea 4: Carlos y Martina están jugando a decir números racionales entre 1 y 2, y gana el que encuentra el número más cercano al 2. Si Carlos es el primero en jugar, ¿podrá decir algún número que le asegure ganar? ¿por qué?*

El objetivo de esta tarea fue indagar de manera lúdica las ideas de los estudiantes acerca de la propiedad de densidad, a través de una actividad iterativa potencialmente infinita. Se puso esta tarea al final del cuestionario dado que en las anteriores se actualizaron las nociones de orden (Tarea 3) y densidad (Tarea 2) necesarias para la comprensión de esta última. Aquí se motiva la reflexión sobre la no existencia de "el siguiente" (o "el anterior") de un número en el conjunto de números propuestos. Es decir, en esta tarea se indaga sobre el concepto de densidad con mayor profundidad, pues los estudiantes se ven invitados a pensar en todos los (infinitos) posibles racionales, menores que 2, que puedan proporcionar una estrategia ganadora. Es esperable que algunos estudiantes utilicen en su respuesta distintos tipos de entendimiento del juego, los cuales podemos separar en dos grandes grupos; uno finitista, que trabajará con una cantidad finita de decimales y operará como con los naturales, y otro que abordará a los racionales desde un punto de vista infinitista.

**Análisis de las respuestas.** El análisis se realizó en dos etapas. En una primera etapa se analizaron y clasificaron las respuestas de los encuestados en cada una de las tareas. Asimismo se desglosaron los resultados por nivel de escolaridad, a fin de observar la variabilidad de las concepciones características sobre el número racional entre estudiantes con distinto grado de escolaridad. En la segunda etapa y con el objetivo de vincular las respuestas de los estudiantes entre sí y evidenciar asociaciones entre las modalidades de respuesta de todas las tareas en simultáneo y conocer qué estudiantes responden qué, se aplicó un Análisis Factorial de Correspondencias Múltiples[1] (AFCM) (Benzécri, 1973). Luego se realizó una Clasificación Jerárquica Ascendente (CJA) (Ward, 1963) agrupando a estudiantes con similares modos de respuestas a las cuatro tareas globalmente, obteniendo así información cualitativa "cruzada" de todas las tareas. Para más detalles de estos métodos multivariados ver (Crivisqui, 1993; Baccalá & Montoro, 2008), entre otros.

Entre las cuatro tareas analizadas se advierten dos tareas de respuestas abiertas (la uno y la cuatro) y otras dos tareas de respuestas cerradas (la dos y la tres). En

[1]Este método está especialmente diseñado para describir, visualizar y sintetizar grandes cantidades de datos obtenidos sobre un conjunto de individuos.

consecuencia la metodología utilizada para categorizar las respuestas fue distinta para cada par de tareas mencionado.

**Categorización de las respuestas de las Tareas 1 y 4.** Observando en forma directa las respuestas literales, que en su totalidad eran muy cortas (por ejemplo: "`son las fracciones`") se realizó una primera clasificación, teniendo en cuenta los términos que figuraban en ellas (decimales, fracciones, no enteros, etc). Las respuestas se clasificaron en forma independiente por cada uno de los autores y luego se consensuaron las categorías resultantes.

**Categorización de las respuestas de las Tarea 2 y 3.** Se trata de tareas con varios ítems de opción de respuesta cerrada y mutuamente excluyentes. Se asoció a cada estudiante la opción de respuesta elegida, luego con el fin de obtener relaciones entre las respuestas a los distintos ítems para cada estudiante y observar asociaciones entre estudiantes que responden globalmente la tarea en forma similar, se aplicó un AFCM. De este análisis se obtuvo una clasificación de las respuestas de los estudiantes. Una vez determinadas las clases, se procedió al análisis cualitativo de las mismas, identificando las características comunes de las respuestas de los individuos, interpretándolas en términos de concepciones de los estudiantes y pudiendo así acordar una etiqueta representativa de las mismas.

Para validar todas las categorizaciones antes mencionadas se realizó una prueba inter-juez de la totalidad de la clasificación de las respuestas, obteniéndose un acuerdo mayor al noventa y cinco por ciento. Los jueces fueron dos docentes universitarios de matemática.

**Análisis global de todo el cuestionario.** Con el propósito de evidenciar asociaciones entre las modalidades de respuesta de todas las tareas en simultáneo y conocer qué estudiantes responden qué, se aplicó un AFCM a la tabla de estudiantes descriptos por sus modos de respuesta y el curso al cual pertenecían. Se tomaron como variables activas para la formación de los ejes factoriales cuatro variables; cada una de ellas relacionada con una de las cuatro tareas que constituyen el cuestionario, y cuyas modalidades fueron las clases que se construyeron previamente en el análisis tarea por tarea. La variable "curso al que pertenecen los alumnos" se consideró como ilustrativa.

Luego, considerando a los participantes descriptos por sus coordenadas en los ejes principales del AFCM (es decir, factores de variabilidad de los modos de respuestas encontrados) se efectuó una CJA. De esta manera se agruparon estudiantes que poseen asociaciones similares entre los modos de respuestas a las cuatro tareas, es decir, en el modo de respuesta a todo el cuestionario. Finalmente, se interpretó a las clases resultantes en términos de concepciones de los estudiantes sobre los números racionales.

En la primera presentación, tarea a tarea, se han conservado las clases que agrupan respuestas del tipo *No sabe / No contesta* dado que, si bien podría pensarse que no aportan mucha información en esa primera instancia, consideramos que sí aportan información en este último análisis global, pues muchos estudiantes contestaron parcialmente el cuestionario respondiendo *no sé* o no contestando sólo alguna de las tareas. Por ejemplo, algunos estudiantes contestan satisfactoriamente a tres de las cuatro tareas, pero no contestan a una de ellas, por lo que nos proporciona información de relevancia en términos generales. No se han considerado en el análisis aquellos que no respondieron ninguna tarea.

## §3. Resultados y discusión

De aquí en más, todos los números en las tablas representan un porcentaje.

**3.1. Categorización de las respuestas a la Tarea 1.** En la siguiente tabla se presentan los datos de la clasificación construida para la Tarea 1 y que resultará en 7 categorías de respuesta:

El 44,5 % de los alumnos opta por no contestar a esta pregunta, y aproximadamente un 23 % (Clases 1.3 y 1.4) considera que los enteros no son racionales, mientras que un 20 % (Clases 1.5, 1.6 y 1.7) contestan acercándose a una definición, centrada en la notación (sea decimal o como fracción). La clase menos numerosa es la de los estudiantes que dicen que los racionales son los números que pueden escribirse como fracción, siendo en su mayoría estudiantes de quinto año.

Con respecto a la Clase 1.2 que presenta respuestas confusas a la descripción de número racional, podemos ver que está constituida principalmente por las respuestas de los estudiantes más jóvenes (18 % de alumnos de primer año). Por otra parte, los estudiantes de primer año, consolidan una gran parte de las clases que conciben a los racionales como la parte de un entero o que no son enteros. Es notable como estos estudiantes conciben a los racionales objetos construidos a partir de los enteros, vía una acción, ya sea racionar o fraccionar. Puede verse una pequeña minoría (2 %) de los estudiantes de primer año, que dice que (los racionales) son los que pueden escribirse como fracción, o con coma y como fracción (otro 2 %).

Puede observarse que en quinto año las tres últimas clases (pueden escribirse con coma, como fracción o ambas cosas) son las más numerosas. Con respecto a los alumnos de tercer año se puede ver una mayoría (66 %) que opta por no contestar o brindar poca información. Los pocos que contestan están distribuidos en todas las clases.

Observamos que, por un lado, en las Clases 1.3 y 1.4 puede verse que hay una operación que se realiza a los enteros para crear estos nuevos números u objetos, mientras que por otro lado en las clases 1.5, 1.6 y 1.7 se pone el foco en que

| **Clase** | Ejemplo de respuesta | Porcentaje de Alumnos | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | $1^{ro}$ | $3^{ro}$ | $5^{to}$ | Total |
| 1.1- *No Sabe / No Contesta* | | 40 | 66 | 27 | 44,5 |
| 1.2- *Confusión - aspecto irrelevante* | `Para mí es que se relacionan` | 18 | 9 | 12 | 13 |
| 1.3- Los racionales son *la parte (ración o fracción) de un entero* | `Son los números que se pueden racionar en partes, por ejemplo` $\frac{1}{2}$ `es la mitad de 1` | 19 | 12 | 7 | 13 |
| 1.4- Los racionales son los que *están entre dos enteros o no son enteros* | `Racionales son los que están entre dos enteros` | 15 | 7 | 7 | 10 |
| 1.5- Los racionales son los que *pueden escribirse con coma, o con decimales* | `Racionales son todos los números que contienen decimales. Sirven para decir números más exactos` | 4 | 2 | 18 | 7,5 |
| 1.6- Los racionales son los que *pueden escribirse como fracción* | `Todos los números que son resultados de una razón o se expresan en forma de fracción` | 2 | 0 | 9 | 4 |
| 1.7- Los racionales son los que *pueden escribirse con coma y como fracción* | `Racionales cubren todos los números, números con coma y fracciones` | 2 | 4 | 20 | 8 |

TABLA 1. Caracterización, ejemplos literales de respuesta, porcentaje de estudiantes de las categorías de respuestas a la Tarea 1

estos números se representan o escriben de alguna forma particular, es decir, se relacionan con una representación externa.

**3.2. Categorización de las respuestas a la Tarea 2.** En esta tarea se pregunta si entre dos racionales dados se pueden encontrar números intermedios. Como dijimos, para esta tarea, se realizó una Clasificación de las respuestas obtenidas a partir del Análisis Factorial de Correspondencias Múltiple (AFCM) de los 132 estudiantes descriptos por sus respuestas a las dos preguntas de la tarea.

Se definieron doce variables correspondientes con cada uno de los seis pares de números propuestos, considerándolos para cada una de las dos preguntas, constituyéndose siete modalidades para la primera pregunta y seis para la segunda.

- Para la primera pregunta: ¿Podrías nombrar un número entre los siguientes pares?, las modalidades fueron: (**No Sabe / No Contesta - Sí (sin ejemplo) - Sí (con**

**ejemplo correcto en notación decimal) - Sí (con ejemplo incorrecto en notación decimal) - Sí (con ejemplo correcto en notación fraccionaria) - Sí (con ejemplo incorrecto en notación fraccionaria) - No hay**

- Para la segunda pregunta: ¿Cuántos números hay entre cada uno de los pares anteriores?, las modalidades fueron: **Ninguno** - **Sólo uno** - **Unos Pocos** - **Muchísimos** - **Infinitos** - **No Sabe / No Contesta**).

A continuación daremos una breve descripción de las clases resultantes de la CJA:

- ***Ajenidad (No sabe / No contesta)***: Esta clase esta formada por $25$ estudiantes, mayormente de tercer año. Son estudiantes que suelen no contestar o contestar que *no saben* en la mayoría de los pares de números.
- ***Discretista***: Esta clase es la más numerosa y está formada por $48$ estudiantes que optan por decir que hay *unos pocos* o *ningún* número entre los propuestos. La gran mayoría son alumnos de primer año, aunque también hay alumnos de tercero y de quinto. En particular, dicen que solo hay un número (el $1$) entre $0$ y $2$. Cuando se compara $3,14$ y $3,15$ dicen que no hay ningún otro número entre ellos. Interpretamos que trasladan la discretitud de los naturales a los racionales.
- **Densidad-*Finitista***: Esta clase está formada por $30$ estudiantes, en su mayoría de tercero y quinto año. En general, estos estudiantes, expresan que sí hay algún número entre dos dados, dando a entender que poseen cierta noción de la propiedad de densidad de los números racionales (expresados de manera decimal o fraccionaria). Poseen una noción finitista frente a cuántos números se pueden encontrar entre dos dados, pues optan por la respuesta *unos pocos* o *muchísimos* números entre los dados.
- **Densidad-*Infinitista y Pro-decimal***: Esta clase está formada por $29$ estudiantes y la mayoría es de quinto año. Suelen contestar correctamente un gran número de ítems de la primer pregunta de la Tarea 2, haciendo un uso correcto de la notación, usando preferentemente la notación decimal. Generalmente eligen la opción que expresa que hay infinitos números entre los propuestos.

| **Clase** | Porcentaje de Alumnos | | | |
|---|---|---|---|---|
| | $1^{ro}$ | $3^{ro}$ | $5^{to}$ | Total |
| 2.1- *Ajenidad (No sabe / No constesta)* | 19,5 | 23 | 15 | 19 |
| 2.2- *Discretista* | 68 | 30 | 7 | 36 |
| 2.3- Densidad-*Finitista* | 8,5 | 27 | 34 | 23 |
| 2.4- Densidad-*Infinitista y Pro-decimal* | 4 | 20 | 44 | 22 |

TABLA 2. Caracterización y porcentaje de estudiantes de las categorías de Tarea 2

Observamos un gradiente en la profundidad de la comprensión de la densidad de los números racionales, partiendo de una visión de estos números como discretos, pasando por concebir una densidad finitista (en el sentido de que aceptan que entre los números dados hay algún número, sin embargo expresan que hay una cantidad finita de ellos), para terminar en una comprensión infinitista de la densidad. En los primeros años vimos que prepondera en los alumnos una idea de los números racionales como discretos, el 68 % de los estudiantes de primer año está en la clase Discretista. Al igual que en la Tarea 1 observamos que muchos de los estudiantes más jóvenes extrapolan propiedades conocidas de los números naturales o enteros a los racionales.

En una etapa intermedia se encuentra la clase Densidad-Finitista. Esta clase está conformada en mayor parte por alumnos de tercero y quinto año. Hacemos notar que en las respuestas de esta clase, la notación no fue determinante en cuanto la elección de si hay muchos o pocos números entre los dados.

Por último encontramos la clase Densidad-Infinitista y Pro-decimal conformada mayormente por estudiantes de quinto año. Estos estudiantes contestan de manera uniforme que entre todos los pares de números propuestos es posible encontrar infinitos números y optan por escribir sus ejemplos utilizando la notación decimal. También se encuentra el 20 % de los estudiantes de tercer año en esta clase y muy pocos de primero. Cabe remarcar que algunos alumnos de primer año se encuentran en la clase Densidad-Infinitista y Pro-decimal y que algunos alumnos de quinto están en la clase Discretista.

De lo expuesto podemos inferir una relación entre el nivel de escolarización y la clase a la que pertenecen los estudiantes.

**3.3. Categorización de las respuestas a la Tarea 3.** En esta tarea se solicita se comparen pares de racionales. La misma se relaciona principalmente con el orden de los números racionales. Daremos una breve descripción de la Clasificación obtenida a partir del Análisis Factorial de Correspondencias Múltiple (AFCM) de los estudiantes descriptos por sus respuestas a la Tarea 3. Se definieron 19 variables, una para cada par de números a comparar, cada una con 3 modalidades: **No sabe / No contesta**, **Correcto** e **Incorrecto**.

Se obtuvo una clasificación en cuatro clases que describiremos a continuación:

- ***No sabe / No constesta***: Está conformada por 18 estudiantes, mayormente de tercer año, que en general no contestan o responden *no sé* a la mayoría de las 19 comparaciones.
- ***Incorrecto - Comparación de Mantisa***: Esta clase está compuesta por 26 estudiantes, principalmente de primer y tercer año. Estos estudiantes se caracterizan por responder incorrectamente algunos incisos, principalmente cuando comparan $0,4$ con $0,326$, $6,3$ con $6,03$, ó $0,333...$ con $\frac{1}{3}$ entre otros, y suelen contestar

correctamente al comparar $\frac{99}{100}$ con $\frac{999}{1000}$ y $1,999...$ con $2$. Una característica notable de este grupo es que contestan que es mayor el número cuya mantisa tiene más decimales, por ejemplo $0,326$ mayor que $0,4$.

- ***Incorrecto - Truncamiento o Redondeo***: Compuesta por 37 estudiantes que en general determinan el número mayor entre los dados teniendo en cuenta sólo la primera cifra decimal (por ejemplo dicen que $1,7501$ es igual a $1,75011$) y parecen confundirse en los casos donde figura la notación decimal junto con la fraccionaria. Se evidencian operaciones de redondeo o truncamiento para responder a la tarea.
- ***Correcto - Fracción y decimal***: Se compone por 51 estudiantes. El 73 % de los estudiantes de quinto año se encuentra en esta clase, y su característica principal es que responden correctamente cuál de los números es mayor, especialmente en las parejas en las que al menos uno de ellos se encuentra expresado con notación fraccionaria.

| **Clase** | Porcentaje de Alumnos | | | |
|---|---|---|---|---|
| | $1^{ro}$ | $3^{ro}$ | $5^{to}$ | Total |
| 3.1- *No sabe / No contesta* | 13 | 18 | 10 | 14 |
| 3.2- *Incorrecto - Comparación de Mantisa* | 36 | 20 | 0 | 20 |
| 3.3- *Incorrecto - Truncamiento o Redondeo* | 32 | 34 | 17 | 28 |
| 3.4- *Correcto - Fracción y decimal* | 19 | 28 | 73 | 38 |

TABLA 3. Caracterización y porcentaje de estudiantes de las categorías de la Tarea 3

Nuevamente, como en la tarea anterior, se evidencia una asociación del grado de escolarización con las clases expuestas, según una mayor profundidad en la comprensión. Los estudiantes de primer año se encuentran distribuidos en todas las clases, la mayoría de estos estudiantes realiza la tarea en forma incorrecta utilizando tanto la estrategia de comparación de longitud de mantisa, como la de truncamiento y redondeo; una minoría llega a una realización certera de la tarea. Ningún estudiante de quinto año realiza la tarea en forma incorrecta utilizando la comparación de la longitud de la mantisa y una mayoría realiza una correcta resolución de la tarea. Los estudiantes de tercer año se encuentran distribuidos en todas las clases, y se puede observar que, a diferencia con los de primer año, un mayor número de los estudiantes contesta correctamente y las estrategias de truncamiento o redondeo son las que prevalecen, entre los que contestan incorrectamente.

En esta tarea podemos ver algunas de las dificultades ya mencionadas por Widjaja et al. (2008), en particular muchos alumnos de los primeros años utilizan principalmente, como herramienta operativa, la comparación de la longitud de la mantisa.

La estrategia de redondeo, también mencionada por los mismos autores, puede tener su raíz en la discretización de los decimales y en este estudio es una estrategia preponderante en los alumnos de tercer año. Ambas estrategias utilizadas para el abordaje de esta tarea, vinculan el conocimiento previo ya consolidado de los números enteros, y la dificultad de concebir infinitos decimales.

**3.4. Categorización de las respuestas a la Tarea 4.** En esta tarea se indaga, de manera lúdica, las ideas de los estudiantes acerca de la propiedad de densidad, apuntando a una comprensión de este concepto más profunda que en la Tarea 2. En la siguiente tabla se presentan los datos de la clasificación construida para la Tarea 4 y que resultó en 6 categorías de respuesta:

| **Clase** | Ejemplo | Porcentaje de Alumnos | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | $1^{ro}$ | $3^{ro}$ | $5^{to}$ | Total |
| *4.1- No sabe / No contesta* | `No sé` | 21,25 | 31,8 | 26,8 | 26,5 |
| *4.2- Aspectos irrelevantes* | `No porque no tiene que ver una cosa con la otra` | 6,5 | 2,5 | 7,4 | 5,3 |
| *4.3- Sí y algún ejemplo arbitrario* | `El número puede ser 1,50` | 17 | 11,4 | 2,5 | 10,6 |
| *4.4- Sí, 1,9; 1,99; 1,999; etc. (con una cantidad finita de 9)* | `Sí se puede asegurar ganar porque Carlos puede decir 1,9 que es el número más cercano al 2` | 27,5 | 31,8 | 9,6 | 23,5 |
| *4.5- Sí, 1,999...* | `1,999... porque antes del 2 viene él y no hay otro después que ese` | 23,5 | 18 | 17 | 19,7 |
| *4.6- No, porque hay infinitos números* | `No, entre 1 y 2 hay infinitos números` | 4,25 | 4,5 | 36,7 | 14,4 |

TABLA 4. Caracterización, ejemplos literales de respuesta, porcentaje de estudiantes de las categorías de respuestas a la Tarea 4

Aproximadamente el 26 % de los encuestados no sabe o no contesta. En la clase 4.2, se encuentran los estudiantes cuyas respuestas son inconsistentes o no se adaptan a la consigna. En la Clase 4.3, encontramos a los alumnos que responden que podrían encontrar un número mayor en este intervalo abierto dando como respuesta un número cualquiera del intervalo. Un 43 % de los estudiantes dio como estrategia ganadora una respuesta utilizando nueves en las cifras decimales: un 23,5 % con finitos nueves (clase 4.4) y un 19,7 % con infinitos nueves (clase 4.5). Los estudiantes que proponen un número ganador con una cantidad finita de nueves son mayormente de primer y tercer año. Cerca de un 14 % de la población, mayormente de quinto año, responde que no podría nombrarse un número que fuera el mayor (clase 4.6). Estos alumnos dicen, en general, que es imposible nombrar un número que les asegure ganar porque hay infinitos números entre 1 y 2, o que a un elemento de dicho intervalo siempre se le puede agregar un decimal.

Podemos observar una asociación de las clases con el nivel de escolarización. Mientras que los estudiantes de primer y de tercer año brindan una interpretación estrictamente finitista de la tarea (clase 4.3 y 4.4), los estudiantes de quinto año constituyen la mayoría de los que dan respuestas infinitistas (clase 4.6). La clase 4.5 se encuentra constituida por estudiantes de los tres niveles en porcentajes cercanos al 20 % de la población, aunque mayormente se encuentran alumnos de primer año. En esta clase en particular se puede ver cómo la idea de infinitos decimales se presenta como una alternativa ya que la idea de un infinito potencial daría una ventaja sobre el rival (siempre podría poner un nueve más).

## §4. Análisis global y asociaciones de las respuestas a las cuatro tareas

Recordemos que para la siguiente clasificación se realizó un AFCM asociando a cada estudiante la clase que le correspondió en cada una de las tareas con las correspondientes modalidades, ver tablas 1, 2, 3 y 4. Es decir, se consideraron cuatro variables, una para cada tarea, como muestra el diagrama descriptivo presente en la Figura 1).

Se realizó una CJA luego de realizar el AFCM, obteniendo seis clases que interpretamos en términos de concepciones de los estudiantes. A continuación describiremos brevemente las clases obtenidas.

**1 - Me siento inseguro, no sé, ni idea**: Está formada por 22 estudiantes (17 % del total) mayormente de tercer año. Modalidades de respuesta asociadas en orden de relevancia: 3.1, 1.1 y 2.1. Los estudiantes de esta clase suelen no contestar o contestar no sé al momento de comparar números racionales (3.1); no contestar acerca de la descripción de número racional (1.1) y no constestar o responder no sé respecto a si se puede encontrar un número entre dos racionales (2.1). Es decir, se caracterizan por la duda o contestar con inseguridad en general.

**2 - Me resulta difícil la densidad**: Esta clase está formada por 14 estudiantes (10 % del total). Modalidades de respuesta asociadas en orden de relevancia: 4.1 y 4.2.

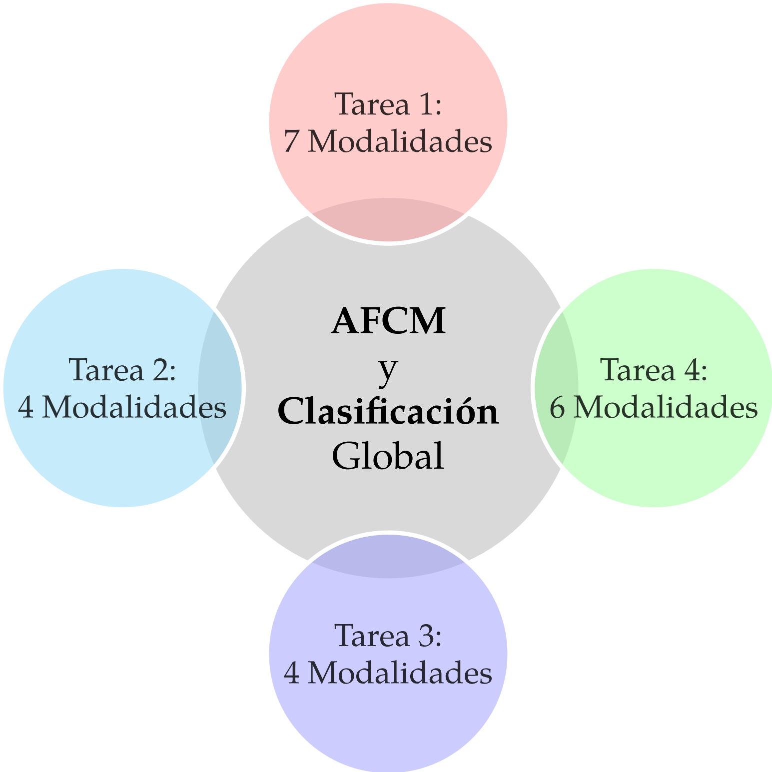



FIGURA 1. Diagrama de la metodología del análisis global

Los estudiantes de esta clase se caracterizan por no contestar o dar una respuesta confusa a la tarea 4. Como ya se introdujo anteriormente, esta tarea es la que demanda un mayor esfuerzo cognitivo hacia la comprensión de la densidad de los números racionales. Por lo que podemos interpretar que en esta clase se agrupan quienes contestan de manera dispersa a lo largo de todo el cuestionario y tienen como característica común que se les dificulta mucho "resolver" la tarea que aborda directamente la densidad.

**3 - Uso las propiedades que ya conozco de los números enteros (discretista)**: Está formada por 32 estudiantes (25 % del total), donde más de la mitad de los estudiantes pertenecen a primer año. Modalidades de respuesta asociadas en orden de relevancia: 2.3, 3.2 y 4.4. Los estudiantes de esta clase suelen responder en forma discretista, trasladando propiedades de los naturales a los racionales (2.3); responden incorrectamente al comparar números, pues dicen que es mayor el número en el cual la mantisa tiene mayor longitud (3.2) y responden que pueden ganar el juego proponiendo un ejemplo del tipo 1,99 (con una finita cantidad de nueves) (4.4). Los estudiantes de esta clase tienden a responder, por ejemplo, que no hay números entre dos dados o solo es posible encontrar unos pocos. Al comparar pares de números racionales dicen, por ejemplo, que 0,50 es mayor que 0,5 o que 0,376 es mayor que el 0,4. En las tres tareas están empleando en los números racionales propiedades válidas en el conjunto de números naturales.

**4 - Identifico a los racionales con los decimales (finitistas)**: En esta clase se encuentran 20 estudiantes (15 % del total). Modalidades de respuesta asociadas en orden de relevancia: 3.3, 2.3, 1.5; 1.1 y 4.1. Los estudiantes de esta clase se caracterizan por tener en cuenta solo la primera cifra decimal de los números para compararlos y utilizar métodos de truncamiento o redondeo para responder en la comparación de números racionales (3.3); respecto a si hay un número racional entre dos dados se encuentran en la clase finitista, es decir, afirman que hay finitos números entre dos dados (2.3). Respecto a la descripción de los racionales o bien no contestan o responden que son aquellos que pueden escribirse con coma (1.5 y 1.1). Citando a un representante de esta clase, podemos notar que, al comparar dos números decimales distintos puede distinguir cuál de los números es mayor: 3,72 es mayor que 3,073 o 6,3 es mayor que 6,03, pero aparece confusión si los números son iguales o si alguno de ellos está expresado en notación fraccionaria.

**5 - Me acerco a entender la densidad y el orden, pienso potencialmente en infinitos decimales**: Está formada por 30 estudiantes (23 % del total). Está conformada uniformemente por estudiantes de primero, tercero y quinto año. Modalidades de respuesta asociadas en orden de relevancia: 4.5, 2.4, 3.4 y 4.6. En cuanto a la propiedad de densidad encontramos que los estudiantes de esta clase tienen una visión infinitista en dos versiones: los que responden que se puede ganar con el $1,999...$ y los estudiantes que dicen que no se podría pues hay infinitos números racionales entre dos dados (4.5 y 4.6). Estos estudiantes poseen una visión de los racionales como infinito-potencialmente densos y prefieren la notación decimal (2.4); podemos inferir que comprenden el orden de estos números (3.4) y comparan correctamente los números racionales.

**6 - Entiendo la densidad y el orden, pero los racionales solo son relevantes hasta los décimos (pensando en magnitudes)**: Está formada por 14 estudiantes (10 % del total), siendo en su mayoría estudiantes de quinto año. Modalidades de respuesta asociadas en orden de relevancia: 1.7, 4.6, 3.4, 1.6 y 2.3. En esta clase se encuentran tanto los estudiantes que describen a los números racionales como los que pueden escribirse con coma y como fracción, como los que expresan que son los que pueden escribirse como fracción (1.7 y 1.6). En cuanto a la comprensión de la densidad la respuesta característica de esta clase es que no puede encontrarse un elemento ganador inmediatamente anterior al supremo, pues hay infinitos racionales en este intervalo abierto (4.6). Podemos inferir que comprenden el orden de los racionales ya que comparan correctamente los pares de números propuestos (3.4). Algunos estudiantes de esta clase consideran que en algunos casos hay un número intermedio entre los propuestos y en otros no (2.3).

| **Clase** | Porcentaje de Alumnos | | | |
|---|---|---|---|---|
| | $1^{ro}$ | $3^{ro}$ | $5^{to}$ | Total |
| 1- *Me siento inseguro, no sé, ni idea* | 17 | 23 | 10 | 17 |
| 2- *Me resulta difícil la densidad* | 8 | 12 | 12 | 10 |
| 3- *Uso las propiedades que ya conozco de los números enteros (discretista)* | 43 | 23 | 5 | 25 |
| 4- *Identifico a los racionales con los decimales (finitistas)* | 8 | 20 | 17 | 15 |
| 5- *Me acerco a entender la densidad y el orden; pienso potencialmente en infinitos decimales* | 22 | 18 | 29 | 23 |
| 6- *Entiendo la densidad y el orden, pero los racionales solo son relevantes hasta los décimos (pensando en magnitudes)* | 2 | 4 | 27 | 10 |

Con respecto a la asociación con los años de escolaridad podemos observar que el porcentaje de estudiantes en las clases *Me siento inseguro, no sé, ni idea* es el mayor en tercer año y el menor en quinto.

Los estudiantes de primer año mayormente se encuentran en la clase *Uso las propiedades que ya conozco de los números enteros (discretista)*, aunque hay un porcentaje considerable en la clase *Me acerco a entender la densidad y el orden, pienso potencialmente en infinitos decimales*. Puede apreciarse también que un porcentaje considerable de alumnos de tercero y quinto pertenecen a esta última clase.

La mayor dispersión de estudiantes en las distintas clases se da entre los estudiantes de tercer año, quienes también demuestran mayor inseguridad y confusión. Por otra parte, entre los alumnos de quinto año prepondera la aceptación del infinito y una mayor comprensión de la densidad, grandes porcentajes de ellos están en las dos últimas clases.

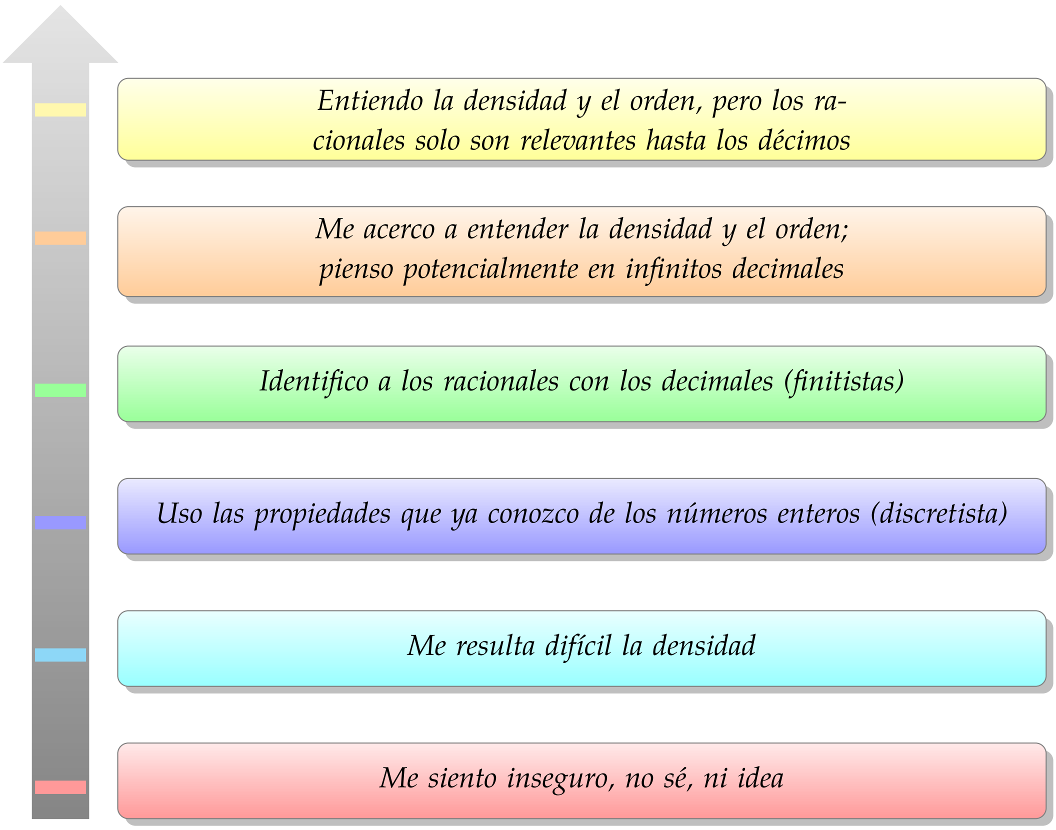
Un comentario aparte merece la clase *Me resulta difícil la densidad*. Esta clase agrupa a estudiantes cuyas respuestas se caracterizan por responder en forma confusa o insegura la tarea vinculada al concepto de densidad en relación al infinito (Tarea 4), es decir, en su forma más profunda, y como ya se anticipó, esta tarea demanda un esfuerzo cognitivo mayor.

Dentro de las preguntas de todo el cuestionario, los estudiantes respondieron en menor cantidad las Tareas 1 y 4, por lo que las consideramos como las tareas "más difíciles". Esto puede deberse a que en ambas actividades se les pide a los alumnos que desarrollen sus respuestas (que las expliquen o definan un concepto o idea). Sin embargo, fueron las preguntas que más aportaron en cuanto a riqueza en clases o modalidades. En particular, se pudo observar que la Tarea 4 fue determinante en cuanto al análisis global de nuestro cuestionario ya que diferenció, por ejemplo, entre las clases quinta y sexta, conformadas por estudiantes cuyas respuestas al cuestionario podrían considerarse satisfactorias o correctas.

## §5. Conclusiones y comentarios finales

En este trabajo se utilizaron herramientas estadísticas para analizar información cualitativa de todo un cuestionario sobre concepciones de los números racionales de estudiantes de la escuela media. Se tuvo como objetivo final analizar las asociaciones entre las respuestas a todas las tareas y así visualizar las relaciones globales entre estas, plausibles de ser interpretadas como concepciones de los estudiantes.

Encontramos un gradiente de profundidad en las concepciones de los estudiantes respecto de los números racionales, mostrando la diversidad de ideas que pueden operar en un grupo de estudiantes, que se ilustra en el siguiente diagrama con la información proveniente del análisis recién expuesto.




En cuanto a las concepciones de los estudiantes, este gradiente se expresa desde una ajenidad respecto al tema, presente fundamentalmente en la clase 1 (*Me* *siento inseguro, no se, ni idea*), le sigue una fase intermedia (tercera y cuarta clase, *Uso las propiedades que ya conozco de los números enteros (discretista)* e *Identifico a los racionales con los decimales (finitistas)*), asociadas principalmente con operar los racionales como si fueran enteros y relacionarlos con objetos ya conocidos como son los números naturales, o con una versión truncada de los racionales como son los números decimales. Se encuentra como diferencia cognitiva entre estas dos clases el manejo de la coma decimal y por ello la cuarta clase se encuentra más arriba en nuestro gradiente.

En este gradiente conceptual, a la clase 2 (*Me resulta difícil la densidad*) la ubicamos transversalmente a las clases 1, 3 y 4. Separada de las clases más avanzadas por la descripción expuesta en la sección anterior.

Finalmente, en el escalón más alto de este gradiente (quinta y sexta clase, *Me acerco a entender la densidad y el orden; pienso potencialmente en infinitos decimales* y *Entiendo la densidad y el orden, pero los racionales solo son relevantes hasta los décimos*) se encuentra la comprensión de los racionales más cercana al respectivo concepto matemático y un buen manejo general de las propiedades de orden y densidad. Sin embargo, se separan dos concepciones distintas relacionadas con la Tarea 4 y la dificultad de comprender el infinito. Entre las dificultades que se pueden distinguir, podemos ver que los integrantes de la clase 5 tienen dificultades en interpretar que los infinitos decimales de 1,99... proporcionan una representación distinta del 2. Por otro lado, en la clase 6 se ve cierta dificultad operativa ligada con la interpretación de número como una magnitud o resultado numérico, es decir, el número representa algo cuya precisión es relativa y es solamente relevante hasta cierta cifra decimal; siguiendo esta línea de pensamiento se podría decir que, por ejemplo, 1,7501 es igual a 1,75011. Además, Mientras que en la clase 5 se encuentran alumnos de todos los años de escolaridad, en la clase 6 se encuentran casi exclusivamente alumnos de quinto año.

Entre las dificultades más evidentes se puede observar con frecuencia que se trasladan las propiedades de los números enteros en cuanto al orden, lo que concuerda con los resultados de (Behr et al., 1983). Por otra parte, los estudiantes más jóvenes presentan una visión finitista, mediando en su concepción de los números (Widjaja et al., 2008). Es en los estudiantes de mayor edad y escolaridad en los cuales está presente una visión infinitista respecto de estas cuestiones.

Las asociaciones entre las respuestas a las distintas tareas nos brindan un complejo panorama de la estructura cognitiva de los estudiantes, mostrando una diversidad de ideas naturalizadas sobre un tema que han trabajado en casi toda su escolaridad como es el número racional. Dados nuestros resultados, observamos que es importante indagar sobre las ideas de los estudiantes y la coherencia (o no) de éstas en un mismo estudiante, pues pueden convivir ideas contradictorias en estos conceptos, por ejemplo, la densidad se presenta como lábil y conectada por momentos con la idea del infinito y en otras instancias conectada con una concepción discreta. Todo esto nos lleva a concluir que estos conceptos son complejos cognitiva y epistemológicamente. Consideramos que estos aspectos deberían ser considerados por la enseñanza, de manera tal que prevea entre sus metas que en los últimos años de secundaria se realice un trabajo específico sobre estas complejas nociones, y así facilitar el pasaje de una matemática escolar a una matemática más avanzada.

## Referencias


Arrigo, G., & D'Amore, B. (2004). Otros hallazgos sobre los obstáculos en la comprensión de algunos teoremas de Georg Cantor. *Educación Matemática*, *16 (2)*, 5-19.

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios de cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática*, 97-140.

Baccalá, N., & Montoro, V. (2008). *Introducción al análisis multivariado* (Vol. 51). Centro Regional Universitario Bariloche: Universidad Nacional del Comahue.

Behr, M., Lesh, R., Post, T., & Silver, E. (1983). Rational number concepts. *In R. Lesh and M. Landau (Eds.), Acquisition of Mathematics Concepts and Processes*, 91-125.

Benzécri, J. (1973). *L'analyse des données. tomo 1: La taxinomie. tomo 2: L' analyse des correspondances* (second ed.). Dunod, Paris.

Crivisqui, E. (1993). *Análisis factorial de correspondencias. un instrumento de investigación en ciencias sociales*. Asunción: Edición del Laboratorio de Informática Social. Universidad Católica de Asunción.

Fischbein, E., Jehiam, R., & Cohen, D. (1994). The irrational numbers and the corresponding epistemological obstacles. *Proceedings XVIII PME*(2), 352-359.

Fischbein, E., Tirosh, D., & Hess, P. (1979). The intuition of infinity. *Educational Studies in Mathematics*, *10*, 3-40.

Juan, M., Montoro, V., & Scheuer, N. (2012). Colecciones infinitas: Ideas de estudiantes de escuelas secundarias. *Educación matemática*, *24*(2), 61-90.

Merenluoto, K. (2003). Abstracting the density of numbers on the number line a quasi - experimental study. *In N. A. Pateman, B. J. Dougherty and J. Zilliox (Eds.), Proceedings of the 2003 Joint Meeting of PME and PMENA*, *3*, 285-292.

Monaghan, J. (2001). Young people's ideas of infinity. *Educational Studies in Mathematics*(48), 239-258.

Montoro, V. (2005). Al infinito y más acá: concepciones de estudiantes universitarios. *Infancia y aprendizaje*, *28*(4), 409-427.

Montoro, V., Scheuer, N., & Pérez-Echeverría, M. P. (2016). ¿cuán abundantes son los conjuntos de números? estudiantes comparando infinitos. *Educación Matemática*, *28*, 145-174.

Moreno-Armella, L., & Waldegg, G. (1995). Variación y representación: del número al continuo. *Revista de Educación Matemática*, *7*, 12-28.

Nardoni, M., Camara, V., & Pochulu, M. (2014). Evaluando la comprensión de los números racionales en estudiantes que culminan la escuela secundaria. *revista YUPANA*, *14*(8), 67-82.

Saiz, I., Gorostegui, E., & Vilotta, D. (2011). La matemática necesaria para la enseñanza de los racionales en secundario. *revista YUPANA*, *11*(6), 11-20.

Stafylidou, S., & Vosniadou, S. (2004). The development of students' understanding of the numerical value of fractions. *Learning and Instruction*, *14*, 503-518.

Steinle, V., & Pierce, R. (2006). Incomplete or incorrect understanding of decimals: an important deficit for student nurses. *In J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká and N. Stehlíková (Eds.), Proceedings of the 30th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *30*(5), 161-168.

Steinle, V., & Stacey, K. (1998). The incidence of misconceptions of decimal notation amongst students in grades 5 to 10. in clive kanes, merrilyn goos, elizabeth warren. (eds). *Teaching Mathematics in New Times, MERGA 21*, *2*, 548-555.

Tirosh, D., Fischbein, E., Graeber, A. O., & Wilson, J. W. (1999). Prospective elementary teachers' conceptions of rational numbers. *Retrieved May 05, 2005 from http://jwilson.coe.uga.edu/Texts.Folder/Tirosh/Pros.El.Tchrs.html.*.

Vamvakoussi, X., & Vosniadou, S. (2004). Understanding the structure of the set of rational numbers: A conceptual change approach. *Learning and Instruction*, *14*(5), 453-467.

Vamvakoussi, X., & Vosniadou, S. (2007). How many numbers are there in an interval? presuppositions, synthetic models and the effect of the number line. *In S. Vosniadou, A. Baltas, and X. Vamvakoussi (Eds.), Reframing the conceptual change approach in learning and instruction*, 267-283.

Vamvakoussi, X., & Vosniadou, S. (2010). How many decimals are there between two fractions? aspects of secondary school students? understanding of rational numbers and their notation. *Cognition and instruction*, *28*, 181-209.

Waldegg, G. (1993). La comparaison des ensembles infinis: un cas de résistance à l'instruction. *Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives*, *5*, 19-36.

Ward, J. (1963). Hierarchical grouping to optimize an objective function. *Journal American Statistical Association*, *58*, 236-244.

Widjaja, W., Stacey, K., & Steinle, V. (2008). Misconceptions about density of decimals: Insights from pre-service teachers' work. *Journal of Science and Mathematics Education in Southeast Asia*, *31*(2), 117-131.

Maximiliano Palacios Amaya
*Departamento de Matemática, Centro Regional Universitario Bariloche - Universidad Nacional del Comahue*
(✉) *palmaxiss@gmail.com*

Verónica Bianchi
*Departamento de Matemática, Centro Regional Universitario Bariloche - Universidad Nacional del Comahue*
(✉) *bianchi.vero@gmail.com*

Virginia Montoro
*Departamento de Matemática, Centro Regional Universitario Bariloche - Universidad Nacional del Comahue*
(✉) *vmontoro@gmail.com*

Recibido: *28 de agosto de 2018*.
Aceptado: *5 de noviembre de 2018*.
Publicado en línea: *21 de diciembre de 2018*.

Revista de Educación Matemática
Volumen 33, N° 3 (2018), páginas 27 – 45
Unión Matemática Argentina - Famaf (UNC)

*Artículo de Matemática*

# SERIES DE LEIBNIZ: UN RELATO DE NOCHE DE BRUJAS

Roberto Ben, Antonio Cafure

Resumen. Presentamos aquí un relato con el que hemos trabajado parcialmente en algunos cursos de cálculo en una variable y al que le hemos ido dando forma intentando hacer confluir las siguientes cuestiones: que despierte interés en docentes y estudiantes de nivel universitario; que sea abordable (parcial o totalmente) en un curso elemental de análisis matemático; que nos permita trabajar temas de la currícula en el aula al tiempo que nos impulse a aprender cosas nuevas junto a los y las estudiantes y que desde la simplicidad de un problema elemental, atraviese la amplitud y profundidad de la matemática contemporánea abordándola desde su formalismo algebraico, su rigurosidad analítica y su potencia computacional.

## §1. La inspiración: Halloween y el Día de los Muertos

*Advertencia: el presente relato contiene lenguaje adulto, escenas de violencia y terror, fórmulas matemáticas y apela a conocimientos elementales de cálculo diferencial e integral!!!*

El 2 de noviembre, en México, se celebra el *Día de Muertos*. En las tumbas se hacen ofrendas a los fallecidos: comidas, flores, bebidas espirituosas y tantas otras cosas que disfrutaban en vida y que terminarán consumiendo sus deudos en una gran fiesta.

Esta festividad mexicana comenzó a mezclarse con otra de origen celta y cercana en el tiempo, 31 de octubre, que se celebra en otros países del hemisferio norte (Canadá, Estados Unidos, Irlanda, Reino Unido) y que es conocida como *Halloween* o *Noche de brujas*. Ya sea por motivos comerciales, por motivos de penetración cultural, etc., la festividad de *Halloween* se está extendiendo cada vez a más países, con mayor o menor alcance, con mayor o menor resistencia.

En Argentina existe una tensión en este intento de instalación/desinstalación de esta celebración. Encontramos en las redes sociales algunos chistes críticos al respecto, como el de la Figura 1:


Figura 1. Es interesante además observar la cuestión lógica que se plantea: cómo negar una disyuntiva. Agradecemos a Matías de Brasi por permitirnos exponer su ilustración, ver http://debrasi.blogspot.com.ar

Y también encontramos imágenes aterradoras, sobre todo para los estudiantes de los cursos iniciales de cálculo. Como, por ejemplo, la imagen de la Figura 2:


Figura 2. Fuente: https://collegemathteaching.wordpress.com

La sola contemplación de símbolos matemáticos en objetos asociados con las brujas no hace más que incrementar el pavor en algunos estudiantes. Seguramente estamos exagerando, aunque es posible que el terror real sea generado más por el conglomerado de símbolos matemáticos que por lo tétrico de la imagen. De todos modos, cabe preguntarse: ¿qué es lo que nos quiere decir esa imagen? ¿Qué secreto se esconde detrás de esos signos?

No sabemos si será porque nos gusta la matemática o porque nos gustan el mate amargo y el truco (de a seis, mejor), pero lo cierto es que esta calabaza y los símbolos matemáticos estampados en ella están muy lejos de asustarnos. Por el contrario, son la excusa ideal en pos de la unión latinoamericana y la elección del festejo mexicano, mucho más alegre y dionisíaco. No obstante, como ningún pueblo del resto del mundo es excluido, aquí dejamos una ofrenda a los pies de las tumbas de Madhava de Sangamagrama, de James Gregory y de Gottfried Leibniz (a su debido tiempo serán presentados), para que festejemos junto con ellos y ustedes el placer de develar lo que hemos dado en llamar **El misterio de la calabaza**.

La serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}$$

estampada en la calabaza es conocida como la serie de Gregory–Leibniz o de Madhava–Leibniz. Con los conocimientos necesarios de Cálculo I no es difícil verificar que es una serie convergente, es decir, que la sucesión de sumas parciales de la serie converge.

Y así la calabaza ya no nos asusta más. Ese conglomerado de símbolos matemáticos no es más que una simple serie alternada convergente. Es decir, lo que tenemos es una calabaza con un número estampado, expresado en una forma quizás un poco rebuscada; pero esa serie es, en definitiva, un número. Ese es el misterio que trataremos de resolver a lo largo de este texto: ¿cuál es ese número? La posibilidad de develarlo es la gran ofrenda que nos legaron Gregory, Leibniz y Madhava y nosotros generosamente la retribuiremos poniendo en sus tumbas apetitosos manjares de Escocia, de Alemania y de India junto con unas cuantas botellas de whisky, cerveza y fenny de Goa, que comeremos y beberemos cuando empiece a sonar la música. (El fenny es un licor preparado a base de coco, originario de Goa, un pequeño estado en la costa oeste de la India. Y aunque Madhava era de Sangamagrama, una antigua ciudad en el actual estado de Kerala, en la costa suroeste de la India, imaginamos que para llegar a tan elevados conocimientos matemáticos debe haber consumido, cuanto menos, algunas copas de fenny de Goa.)

Seguramente haya lectores que ya sepan a qué valor converge la serie; quizás haya otros para los cuales no haya misterio en la calabaza. De todos modos, están invitados a acompañarnos en esta travesía: encontrarán algunas novedades a lo largo de esta historia. Hay suspenso para todos.

## §2. El criterio de Leibniz para series alternadas

Para comenzar, recordemos la definición de serie de números. Si $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de números reales podemos considerar las sumas parciales de los términos de esta sucesión. Es decir, para cada $n \in \mathbb{N}$, consideramos una nueva sucesión $S_n$ definida como

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

Esta sucesión $S_n$ es la *sucesión de sumas parciales de término general* $a_k$. Si la sucesión $S_n$ converge, es decir si existe

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k$$

decimos que la *serie* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge. Una condición necesaria para la convergencia de una serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ es que la sucesión $a_k$ tienda a $0$.

En particular, una *serie alternada* (la elección del adjetivo no es azarosa) es una serie en la que se alternan los términos positivos y negativos. Si $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de números reales no negativos, una de las formas usuales de representar series alternadas es la siguiente:

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots$$

Las series alternadas hacen su aparición bien en los inicios del análisis y si el nombre de Leibniz aparece ligado a ellas es por un motivo concreto. En 1714, Leibniz le envía una carta a Johann Bernoulli contándole acerca de su criterio para la convergencia de series alternadas de números reales. En términos actuales, lo que Leibniz le informa a Bernoulli es el siguiente resultado que establece tanto la convergencia de algunas series alternadas como una estimación sobre el error que se comete al aproximarlas por una determinada suma parcial.

**Teorema 2.1.** *Sea* $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de números reales no-negativos, decreciente y convergente a* $0$*. Entonces:*

*(a) La serie alternada* $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k$ *converge.*

*(b) Sea* $S_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}a_k$*, la sucesión de sumas parciales y sea* $S$ *el límite de* $S_n$*. Si consideramos el error* $R_n = S - S_n$ *que se comete al aproximar* $S$ *por la suma* $S_n$*, entonces*

$$a_{n+1} - a_{n+2} \leq |R_n| \leq a_{n+1}, \tag{2.1}$$

*y* $R_n$ *tiene el signo* $(-1)^n$*.*

**Observación 2.2.** Introducimos una terminología que facilitará la lectura. Decimos que una serie alternada $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k$ es una *serie de Leibniz* si verifica las hipótesis del Teorema 2.1. En consecuencia, toda serie de Leibniz es convergente. En particular, la serie de la calabaza es una serie de Leibniz cuyo término general es $a_k = \frac{1}{2k-1}$.

Podríamos decir que este resultado de Leibniz establece el inicio formal de la teoría de series alternadas. En cualquier curso elemental de cálculo se destina un tiempo a presentarlo y a trabajar con él. Debemos señalar que no es usual encontrar la cota inferior para $|R_n|$ en los textos más conocidos de cálculo y de análisis matemático. Por ejemplo, no se presenta en textos modernos como el libro *Cálculo de una variable* de James Stewart, ni en clásicos como los libros de Rey Pastor, Spivak, Apostol, por nombrar sólo algunos de los que hemos revisado (el estatus de clásico de estos textos se desprende del hecho de que solo mencionando el apellido del autor, sabemos de qué estamos hablando). Elaboramos una explicación al respecto de esta ausencia que compartiremos en breve con los lectores.

Queremos develar el misterio de la calabaza, es decir, necesitamos saber cuál es el número estampado. Para eso necesitamos aproximarlo mediante las sumas parciales. Por ejemplo, si quisiéramos hacerlo con un error $|R_n|$ menor que $10^{-5}$, de acuerdo a la cota superior provista por (2.1), es suficiente considerar, por ejemplo, una suma parcial $S_n$ tal que

$$|R_n| = |S - S_n| \leq a_{n+1} = \frac{1}{2n+1} < 10^{-5}.$$

Encontramos que si $n \geq 50000$, cualquier suma parcial $S_n$ aproxima $S$ con el error propuesto. Claramente, esto es impracticable con lápiz y papel. La pregunta que debemos hacer, que se impone naturalmente, siempre hay estudiantes que la formulan: ¿es realmente necesario sumar *esa* cantidad de términos para obtener tal error? Aquí entra en juego la cota inferior para el error. Tratemos de encontrar cuáles son las sumas parciales $S_n$ para las cuales $|R_n|$ es mayor o igual que $10^{-5}$:

$$|R_n| = |S - S_n| \geq a_{n+1} - a_{n+2} = \frac{2}{(2n+1)(2n+3)} \geq 10^{-5}.$$

Encontramos que esto sucede para $n \leq 222$. Este número está bastante lejos del $50000$ proporcionado por la cota superior. En resumen tenemos la siguiente situación:

- Si consideramos una suma parcial $S_n$ con $n \geq 50000$, entonces $|R_n|$ es menor que $10^{-5}$.
- Si consideramos una suma parcial $S_n$ con $n \leq 222$, entonces $|R_n|$ es mayor que $10^{-5}$.

Sin embargo, no sabemos qué es lo que sucede con las sumas parciales $S_n$ correspondientes a valores de $n$ entre $222$ y $50000$. Es una cantidad significativa de sumas parciales que no estamos considerando. Esta amplitud es consecuencia de que la cota inferior para $|R_n|$ es una sucesión que converge a $0$ más rápido que la propia sucesión $a_k$. En consecuencia, imaginamos que la cota inferior ha sido dejada de lado porque el error que aporta es, en general, demasiado grosero con respecto al que proporciona la cota superior. Con todo, desde un punto de vista didáctico, consideramos que bien podría formar parte de nuestras clases sobre este tópico.

Para terminar esta sección, aun cuando estamos lejos de resolver el misterio de la calabaza, damos una demostración bastante diferente y por cierto elegante (los matemáticos somos muy afectos a utilizar ese calificativo) del Teorema 2.1. La proporcionó Robert Young (Young, 1985) y lo interesante es que utilizando el teorema de encaje de intervalos torna evidente la cota superior para $|R_n|$. Young tampoco presenta la cota inferior que nosotros presentamos. Por este motivo, completamos su demostración con la prueba de la validez de la cota inferior.

*Demostración.* En primer lugar, observemos que $S_{n+1} - S_n = (-1)^n a_{n+1}$, para cada $n \in \mathbb{N}$. De aquí deducimos que para todo $n \in \mathbb{N}$ es válida la acotación $S_{2n} \leq S_{2n-1}$.

Tiene sentido entonces considerar la sucesión $I_n = [S_{2n}, S_{2n-1}]$ de intervalos cerrados. Como $a_n$ converge a $0$, la longitud de $I_n$, que es igual a $a_{2n}$, tiende a $0$. Además, como $a_n$ es decreciente, tenemos que $S_{2n} \leq S_{2(n+1)}$ y $S_{2n-1} \geq S_{2(n+1)-1}$, de donde se deduce que $I_n \supset I_{n+1}$. Esto muestra que la sucesión es encajada. Por lo tanto, por el Teorema de Encaje de Intervalos, existe un único número $S$ en la intersección de estos intervalos; en símbolos, $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{S\}$. En consecuencia, para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$|S - S_n| \leq |S_{n+1} - S_n| = a_{n+1}.$$

De aquí son inmediatas la convergencia de $S_n$ a $S$ y la cota superior para $|R_n|$.

Demostramos a continuación la validez de la cota inferior para el error. Si $n$ es par tenemos que

$$S - S_n = S - S_{n+2} + S_{n+2} - S_n \geq S_{n+2} - S_n = a_{n+1} - a_{n+2},$$

mientras que si $n$ es impar tenemos que

$$S_n - S = S_n - S_{n+2} + S_{n+2} - S \geq S_n - S_{n+2} = a_{n+1} - a_{n+2}.$$

De aquí deducimos que para todo $n \in \mathbb{N}$ se verifica que $|R_n| \geq a_{n+1} - a_{n+2}$. □

**Observación 2.3.** Las diferentes demostraciones del Teorema 2.1 se desarrollan en torno a un argumento decisivo: que la sucesión $a_k$ sea decreciente implica que la sucesión de sumas parciales $S_{2n}$ es creciente, que la sucesión de sumas parciales $S_{2n+1}$ es decreciente y que cualquier suma parcial $S_{2n}$ es menor o igual que cualquier suma parcial $S_{2m+1}$.

## §3. Se puede hacer un poco mejor

La principal objeción hacia la cota superior para $|R_n|$ que provee el Teorema 2.1 es que es necesario sumar una cantidad elevada de términos para obtener una aproximación más o menos razonable. Esto que nos acontece había sido obviamente percibido por el propio Leibniz y por varios de los matemáticos que lo siguieron, quienes se plantearon el interrogante sobre lo genuino de esta necesidad. Podríamos pensar que la búsqueda se orientó entonces a encontrar una cota superior mejor para el error. Es de imaginar que ese interrogante debió haberse respondido por esos tiempos. Lo llamativo del asunto es que pasaron unos cuantos años, más de los imaginados, antes de que se presentara una mejor estimación para el error. En 1962, Philip Calabrese, un estudiante de segundo año de la Universidad de Illinois, publicó una nota en la sección *Classroom Notes* de *The American Mathematical Monthly* (Calabrese, 1962) en la cual, con una hipótesis adicional sobre la sucesión $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, presentó un refinamiento sobre el error que se comete al aproximar las series de Leibniz. A continuación el resultado de Calabrese.

**Teorema 3.1.** *Consideremos una serie de Leibniz $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k$. Si la sucesión de diferencias $\Delta a_k = a_k - a_{k+1}$ es decreciente entonces*

$$|R_n| < \frac{a_n}{2}. \tag{3.1}$$

En el caso de nuestra serie de Leibniz, la sucesión $a_k = \frac{1}{2k-1}$ verifica la hipótesis adicional que requiere el Teorema 3.1 pues la sucesión de diferencias

$$\Delta a_k = \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} = \frac{2}{(2k-1)(2k+1)}$$

es decreciente. Observando que

$$\frac{a_k}{2} = \frac{1}{2(2k-1)} < \frac{1}{2k+1} = a_{k+1},$$

concluimos que la cota superior para $|R_n|$ de Calabrese constituye una aproximación más precisa que la clásica de Leibniz. Es suficiente entonces considerar una suma parcial $S_n$ tal que

$$|R_n| = |S - S_n| \leq \frac{1}{2(2n-1)} < 10^{-5}.$$

Encontramos que si $n > 25000$, la suma parcial $S_n$ aproxima $S$ con error menor que $10^{-5}$.

Cabe otra vez la misma pregunta: ¿se puede hacer con menos términos? Para estimar la mínima cantidad de términos necesarios deberíamos contar con *una* cota inferior para $|R_n|$ mejor que la que proporciona (2.1) ya que, como observamos, no es relevante. Es asombroso saber que *esa* cota inferior existe desde hace muchos años, que existe aún antes de la cota superior de Calabrese. Es sorprendente pensar que haya pasado completamente desapercibida. Ni los libros de textos que hemos leído a lo largo de estos años, ni las clases a las que hemos asistido o que hemos impartido, han tomado en cuenta su existencia. Hay diversas referencias; por ejemplo, Young (Young, 1985) menciona un texto sobre series de principios del siglo XX. Reformulamos entonces el Teorema 3.1 incluyendo esta cota inferior largamente ignorada.

**Teorema 3.2.** *Consideremos una serie de Leibniz* $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k$. *Si la sucesión de diferencias* $\Delta a_k = a_k - a_{k+1}$ *es decreciente entonces*

$$\frac{a_{n+1}}{2} < |R_n| < \frac{a_n}{2}.$$

Con este resultado a nuestra disposición, podemos determinar las sumas parciales que no aproximan $S$ con error menor que $10^{-5}$ pidiendo que

$$10^{-5} < \frac{1}{2(2n+1)} < |R_n|.$$

Resulta entonces que si $n < 25000$, el error que se comete al estimar $S$ por $S_n$ es mayor que $10^{-5}$.

En resumen, tenemos la siguiente situación:

- Si consideramos cualquier suma parcial $S_n$ con $n > 25000$, entonces $|R_n| < 10^{-5}$.

- Si consideramos cualquier suma parcial $S_n$ con $n < 25000$, entonces $|R_n| > 10^{-5}$.

Hemos mejorado ostensiblemente la situación de la sección anterior. Estamos muy cerca de probar cuál es la **primera** suma parcial $S_n$ que aproxima $S$ con un error menor que $10^{-5}$: o bien es $S_{25000}$ o bien es $S_{25001}$. De acuerdo al Teorema 3.2 tenemos que

$$\frac{a_{25001}}{2} < |R_{25000}| < \frac{a_{25000}}{2},$$

lo que es lo mismo que

$$\frac{1}{100002} < |R_{25000}| < \frac{1}{99998};$$

es decir, nada podemos concluir acerca de qué ocurre con la suma $S_{25000}$. Y aunque sigue siendo impracticable con lápiz y papel, y estamos lejos de aproximar el número de la calabaza, no es poco lo que aprendimos con respecto a las sumas parciales. En particular, la argumentación de Calabrese para obtener la estimación (3.1) le permitió demostrar que la **primera** suma parcial de la serie armónica alternada

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

que aproxima el límite de la serie con $4$ decimales exactos es $S_{10000}$.

Antes de proporcionar la demostración del Teorema 3.2, discutamos la necesidad de la hipótesis sobre la sucesión de diferencias, ¿cuál es el rol decisivo en la mejora de la estimación del error? La sucesión de diferencias aparece al reescribir una serie de Leibniz arbitraria. En efecto, se verifica fácilmente que

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}a_k = \left(\frac{a_1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k+1}\Delta a_k\right) + (-1)^{n+1}\frac{a_n}{2}. \tag{3.2}$$

Haciendo tender $n$ a infinito resulta entonces que la sucesión de sumas parciales entre paréntesis también converge a $S$. En consecuencia, restando $S$ y multiplicando por $(-1)^{n+1}$ podemos expresar $|R_n|$ en la forma

$$\begin{aligned}|R_n| &= (-1)^{n+1}\left(\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}a_k - S\right)\\ &= \left((-1)^{n+1}\left(\frac{a_1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k+1}\Delta a_k - S\right)\right) + \frac{a_n}{2}.\end{aligned}$$

Si $\Delta a_k$ es decrececiente entonces la serie $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\Delta a_k$ es una serie de Leibniz. Recordando la Observación 2.3 sabemos que las sumas parciales correspondientes a subíndices pares son menores que $S$ y las correspondientes a impares son mayores que $S$. En estas condiciones, el término entre paréntesis es negativo y, por lo tanto, resulta que $|R_n| < a_n/2$. Esto ya constituye una demostración del resultado de Calabrese dado en el Teorema 3.1.

Una identidad similar a (3.2) es la siguiente

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}a_k = \left(\frac{a_1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\Delta a_k\right) + (-1)^{n+1}\frac{a_{n+1}}{2}. \tag{3.3}$$

Nuevamente, haciendo tender $n$ a infinito resulta que la sucesión de sumas parciales entre paréntesis converge a $S$. En consecuencia, restando $S$ y multiplicando por $(-1)^{n+1}$ reescribimos $|R_n|$ en la forma

$$\begin{aligned}|R_n| &= (-1)^{n+1}\left(\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}a_k - S\right)\\ &= \left((-1)^{n+1}\left(\frac{a_1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\Delta a_k - S\right)\right) + \frac{a_{n+1}}{2}.\end{aligned}$$

Si $\Delta a_k$ es decrececiente entonces la serie $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\Delta a_k$ es de Leibniz y recordando la Observación 2.3 sabemos que el término entre paréntesis es positivo y, por lo tanto, que $|R_n| > a_{n+1}/2$.

En resumen, hemos demostrado el Teorema 3.2. Sin embargo, vamos a proporcionar otra demostración: la que fuera propuesta por Young en su trabajo (Young, 1985) y que generaliza lo hecho para demostrar el Teorema 2.1, reformulando el problema en términos de encajes de intervalos, haciendo evidente la cota inferior y superior para $|R_n|$.

*Demostración.* A partir de $S_n$ se define la siguiente sucesión

$$T_n = S_n + (-1)^n\frac{a_{n+1}}{2}.$$

En particular, la sucesión $T_n$ converge a $S$, el límite de la sucesión $S_n$. De la definición de $T_n$ deducimos que $T_{n+1} - T_n = (-1)^n\Delta a_{n+1}/2$. Una argumentación similar a la utilizada en la demostración del Teorema 2.1 muestra que la sucesión de intervalos $J_n = [T_{2n}, T_{2n-1}]$ es encajada pues $\Delta a_n$ es decreciente y converge a $0$. Por lo tanto, existe un único número $T$ en la intersección de estos intervalos. Dado que $T$ que es el límite de $T_n$, concluimos que $S = T$.

Si $I_n$ es la sucesión de intervalos de la demostración del Teorema 2.1, entonces $I_n \supset J_n$ para $n \in \mathbb{N}$. Además, tenemos que

$$T_{n-1} - S_n = S_{n-1} + (-1)^{n-1}\frac{a_n}{2} - S_n = (-1)^n \frac{a_n}{2}.$$

Para concluir, distinguimos los casos $n$ par e impar. Si $n$ es par

$$T - S_n \geq T_n - S_n = \frac{a_{n+1}}{2} \quad \text{y} \quad T - S_n \leq T_{n-1} - S_n = \frac{a_n}{2}.$$

Un argumento similar se utiliza si $n$ es impar. De esta manera demostramos las cotas para $|R_n|$. □

Las demostraciones de los Teoremas 2.1 y 3.2 bien pueden contarse en un curso básico de cálculo, asumiendo que ya se conoce el teorema de encaje de intervalos, situación que, de hecho, se da en diversos cursos.

Si bien avanzamos, continuamos sin tener una idea de cuál es el límite de esta serie y, por ende, no hemos develado aún el misterio que esconde la calabaza.

## §4. ¿Qué ocurre con la suma $S_{25000}$?

Ya probamos que la suma parcial $S_{25001}$ aproxima a $S$ con un error menor que $10^{-5}$, pero aún no respondimos qué pasa con la suma $S_{25000}$. A esta altura, podríamos no preocuparnos por buscar esa respuesta ya que son demasiados los términos a sumar para obtener un error menor que $10^{-5}$: sumar un término más o un término menos es irrelevante. De todos modos, podemos alegar que continúa siendo una inquietud válida y, de hecho, veremos que hay más por aprender en el intento de responder este interrogante. Recordemos que Calabrese pudo demostrar algo similar en el caso de la serie armónica alternada. Existe un resultado que brinda más información sobre el error que se comete al estimar las series de Leibniz. Fue probado en 1979 por Richard Johnsonbaugh (Johnsonbaugh, 1979) y constituye una generalización del Teorema 3.2 incluyendo sucesiones de diferencias de orden mayor a 1.

**Definición 4.1.** Dada una sucesión $a_k$, la *primera diferencia de* $a_k$ es la sucesión $\Delta a_k = a_k - a_{k+1}$. En forma inductiva se define la $i$-ésima diferencia como $\Delta^i a_k = \Delta(\Delta^{i-1} a_k)$. Definimos $\Delta^0 a_k = a_k$.

Enunciamos a continuación el resultado de Johnsonbaugh. No daremos una demostración aunque sí mencionamos que el resultado se deduce de la reescritura sucesiva de las series de Leibniz como en la sección previa.

**Teorema 4.2.** *Consideremos una serie de Leibniz* $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k$*. Si las sucesiones de diferencias* $(\Delta^i a_k)$ *son decrecientes para* $i = 0, \ldots, m$ *entonces*

$$\frac{a_{n+1}}{2} + \frac{\Delta a_{n+1}}{2^2} + \cdots + \frac{\Delta^{m-1} a_{n+1}}{2^m} < |R_n| < \frac{a_n}{2} - \left(\frac{\Delta a_n}{2^2} + \cdots + \frac{\Delta^{m-1} a_n}{2^m}\right) \tag{4.1}$$

En la sección anterior ya consideramos la primera diferencia en ocasión de los Teoremas 3.1 y 3.2. Calculemos ahora la sucesión de las segundas diferencias $\Delta^2 a_k$. Como un resultado de validez general encontramos que

$$\Delta^2 a_k = \Delta a_k - \Delta a_{k+1} = a_k - 2a_{k+1} + a_{k+2}.$$

En nuestro caso particular resulta que

$$\Delta^2 a_k = \frac{1}{2k-1} - \frac{2}{2k+1} + \frac{1}{2k+3} = \frac{10}{(2k-1)(2k+1)(2k+3)},$$

es decreciente. De acuerdo a (4.1) tenemos que

$$\frac{a_{n+1}}{2} + \frac{\Delta a_{n+1}}{4} < |R_n| < \frac{a_n}{2} - \frac{\Delta a_n}{4},$$

lo cual implica que

$$\frac{a_{25001}}{2} + \frac{\Delta a_{25001}}{4} < |R_{25000}| < \frac{a_{25000}}{2} - \frac{\Delta a_{25000}}{4}.$$

Haciendo las cuentas correspondientes encontramos que

$$\begin{aligned} 0,999 \cdot 10^{-5} \approx \frac{50004}{100002 \cdot 50003} &< |R_{25000}| \\ &< \frac{50000}{99998 \cdot 50001} \approx 1,0000000004 \cdot 10^{-5}. \end{aligned}$$

Es decir, aún no podemos determinar si $|R_{25000}|$ es menor que $10^{-5}$. Pasemos entonces a considerar la sucesión de diferencias $\Delta^3$:

$$\begin{aligned} \Delta^3 a_k &= \Delta(\Delta^2 a_k) = a_k - 3a_{k+1} + 3a_{k+2} - a_{k+3}. \\ &= \frac{1}{2k-1} - \frac{3}{2k+1} + \frac{3}{2k+3} - \frac{1}{2k+5} = \frac{48}{(2k-1)(2k+1)(2k+3)(2k+5)} \end{aligned}$$

Como es decreciente, recurriendo nuevamente al Teorema de Johnsonbaugh sabemos que

$$\frac{a_{n+1}}{2} + \frac{\Delta a_{n+1}}{4} + \frac{\Delta^2 a_{n+1}}{8} < |R_n| < \frac{a_n}{2} - \frac{\Delta a_n}{4} - \frac{\Delta^2 a_n}{8}.$$

Haciendo los cálculos correspondientes, la cota superior para $|R_n|$ es igual a

$$\begin{aligned} \frac{a_{25000}}{2} - \frac{\Delta(a_{25000})}{4} - \frac{\Delta^2(a_{25000})}{8} &= \frac{50000}{99998 \cdot 50001} - \frac{5}{2 \cdot 99998 \cdot 50001 \cdot 50003} \\ &= \frac{100006 \cdot 50000 - 5}{2 \cdot 99998 \cdot 50001 \cdot 50003} = \frac{5000299995}{500029999799988}. \end{aligned}$$

Llegamos a la siguiente situación:

$$|R_{25000}| < \frac{5000299995}{500029999799988} \approx 0{,}9999999994 \cdot 10^{-5} < 10^{-5}.$$

Es decir, la suma parcial $S_{25000}$ es la **primera** suma parcial que aproxima a $S$ con un error menor que $10^{-5}$. En otras palabras y parafraseando al gran René Lavand: bajo estas condiciones, no se puede hacer más rápido.

Aquí comienza una segunda historia interesante. Buscando información sobre las series de Leibniz, otro tipo de abordaje para su enseñanza, dimos con un artículo, recientemente publicado, escrito por Mark Villarino (Villarino, 2018). Encontrarlo fue una grata sorpresa por la cantidad de cosas que aprendimos al leerlo. El objetivo del artículo de Villarino es proporcionar una demostración del Teorema de Johnsonbaugh (Teorema 4.2) utilizando las mismas ideas que Young utilizara para demostrar el Teorema 3.2: la formulación del problema en términos de una sucesión de intervalos encajados.

Con su lectura también aprendimos que, como era de esperar, los seguidores de Leibniz habían logrado acelerar el proceso de convergencia de las series de Leibniz aun cuando no habían obtenido mejores cotas para el error. Sin embargo, seguimos sin saber cuál es el mensaje escondido en la calabaza.

## §5. La transformada de Euler

Como dijimos, los matemáticos que siguieron a Leibniz estaban bien alertados acerca de la lentitud de la convergencia de las series de Leibniz. Por ese motivo, no se preocuparon por buscar mejores cotas para el error. Más bien encararon la búsqueda de maneras de acelerar la convergencia. El gran Leonhard Euler encontró una forma de hacerlo.

Dada una serie de Leibniz $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k$, definimos su *transformada de Euler* como la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Delta^{k-1}a_1}{2^k} = \frac{a_1}{2} + \frac{\Delta a_1}{2^2} + \frac{\Delta^2 a_1}{2^3} + \frac{\Delta^3 a_1}{2^4} + \cdots$$

El logro de Euler fue demostrar que esta serie converge al mismo límite que la serie de Leibniz y que la convergencia es muy *rápida*.

**Teorema 5.1.** *Sea $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k$ una serie de Leibniz cuyo límite es $S$. Supongamos que para $i = 1, 2, 3, \ldots$, las sucesiones $(\Delta^i a_k)$ son decrecientes. Entonces:*

*(a) La trasformada de Euler $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Delta^{k-1}a_1}{2^k}$ converge a $S$.*

*(b) Sea $E_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\Delta^{k-1}a_1}{2^k}$ la sucesión de sumas parciales. Si $R_n^{(E)} = S - E_n$ representa el error que se comete al aproximar $S$ por $E_n$, entonces*

$$0 < R_n^{(E)} \leq \frac{\Delta^n a_1}{2^n}. \tag{5.1}$$

**Observación 5.2.** Es interesante observar que la transformada de Euler de una serie convergente arbitraria siempre converge al mismo límite que la serie. Sin embargo, se necesitan las hipótesis del Teorema 5.1 para asegurar que la convergencia de la transformada es más rápida que la de la serie. El texto de Konrad Knopp (Knopp, 1954) es una posible referencia para consultar los detalles.

Hasta ahora, mostramos que para aproximar $S$ con un error menor que $10^{-5}$ es necesario considerar sumas parciales $S_n$ con $n \geq 25000$ y que $S_{25000}$ es la primera suma parcial que permite aproximar con tal error. Esto nos priva de obtener información sobre el número impreso en la calabaza. Necesitamos realmente acelerar el proceso de convergencia si es nuestra esperanza develar el misterio.

Según (Knopp, 1954, pág. 244), el caso particular de la transformada aplicada a la serie de Gregory-Leibniz como método de aceleración de la convergencia fue notificado a Leibniz por Bernoulli, en una carta que le envió en 1704. Allí, atribuía el descubrimiento a N. Fatzius. Tratemos entonces de estimar el límite $S$ de la serie apelando a (5.1). Para eso necesitaríamos calcular $\Delta^n a_1$. Por inducción se puede probar que

$$\Delta^n a_1 = 2^n \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1)}.$$

Por lo tanto, el error dado por (5.1) debe verificar que

$$R_n^{(E)} \leq \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1)} \leq 10^{-5}.$$

Fácilmente encontramos que el primer valor de $n$ para el cual esto se verifica es $n = 15$. En consecuencia, gracias al Teorema 5.1 sabemos que la suma parcial $E_{15}$ aproxima $S$ con un error menor que $10^{-5}$. ¡Y esto es maravilloso! La transformada de Euler realmente nos permite acelerar la convergencia de nuestra serie de Leibniz. Ahora sí tendremos una idea mucho más acabada de cuál es el límite que estamos buscando. Quizás podremos develar el misterio de la calabaza. Haciendo unas pocas cuentas encontramos que

$$E_{15} = \frac{114.327.952.384}{145.568.097.675} = 0{,}78539153\ldots$$

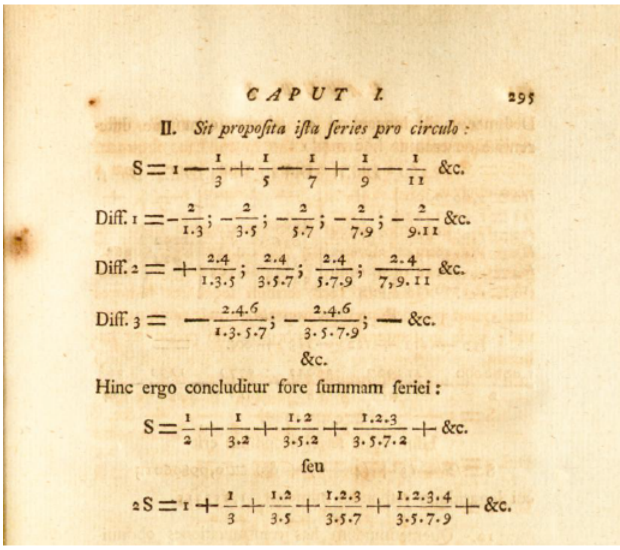
El Teorema 5.1 establece que la serie de Leibniz $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}$ converge a un número aproximado a $0{,}78539153\ldots$ Sin embargo, para obtener el número estampado en la calabaza, debemos recordar que aún nos falta multiplicar esta cantidad por 4. Si calculamos este producto obtenemos

$$4 \cdot 0{,}78539153\ldots = 3{,}14156612\ldots$$

Y esto parece bastante familiar, ¿o no? ¿Acaso el número que está en la calabaza no es otra cosa que $\pi$?

## §6. Aparece el número $\pi$

**6.1. Un poco de cálculo numérico.** Los cálculos "a mano" realizados en el parágrafo anterior nos hacen sospechar que la serie converge a $\pi$ (o a $\frac{\pi}{4}$ antes de multiplicar por el 4). Hasta aquí nos hemos centrado en hacer las cuentas "a mano" ya que esa era la manera en que procedían Leibniz, Bernoulli, Euler. De hecho, Euler publicó "sus cuentas" en su *Institutiones Calculi Differentialis Cum Eius Vsu In Analysi Finitorum Ac Doctrina Serierum* de 1755. En la Figura 3 apreciamos una bella imagen de ese libro en la que se calculan los primeros términos de la transformada de Euler de la serie de Leibniz.



CAPUT I. 295

II. *Sit propoſita iſta ſeries pro circulo:*

$$S = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} \text{ \&c.}$$

$$\text{Diff. } 1 = -\frac{2}{1.3};\ -\frac{2}{3.5};\ -\frac{2}{5.7};\ -\frac{2}{7.9};\ -\frac{2}{9.11} \text{ \&c.}$$

$$\text{Diff. } 2 = +\frac{2.4}{1.3.5};\ \frac{2.4}{3.5.7};\ \frac{2.4}{5.7.9};\ \frac{2.4}{7.9.11} \text{ \&c.}$$

$$\text{Diff. } 3 = -\frac{2.4.6}{1.3.5.7};\ -\frac{2.4.6}{3.5.7.9};\ - \text{ \&c.}$$

&c.

Hinc ergo concluditur fore ſummam ſeriei:

$$S = \frac{1}{2} + \frac{1}{3.2} + \frac{1.2}{3.5.2} + \frac{1.2.3}{3.5.7.2} + \text{ \&c.}$$

ſeu

$$2S = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1.2}{3.5} + \frac{1.2.3}{3.5.7} + \frac{1.2.3.4}{3.5.7.9} + \text{ \&c.}$$

FIGURA 3. Leonhard Euler. *Institutiones Calculi Differentialis Cum Eius Vsu In Analysi Finitorum Ac Doctrina Serierum.*, pág. 295, 1755. (ETH-Bibliothek Zürich)

Hoy disponemos de programas de cálculo numérico, como Octave y otros, que con unas pocas líneas de código nos permiten hacer cuentas rápidamente. El estudio sistemático de estos procedimientos ha dado origen a lo que se denomina *Análisis Numérico*. Como disciplina se ha desarrollado profundamente en el último siglo buscando formas más eficientes, precisas y estables de hacer las cuentas. Sin embargo, muchos de los métodos numéricos que hoy se utilizan han sido desarrollados junto con el surgimiento del análisis matemático. En este sentido, la transformada de Euler es un ejemplo de un método numérico significativamente más preciso y eficiente.

Volvamos a considerar entonces $S_n$ y $E_n$, la sucesión de sumas parciales de la serie de la calabaza $\sum_1^\infty \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}$ y la de su transformada de Euler, respectivamente.

La siguiente tabla presenta una comparación entre la convergencia de $4S_n$ y $4E_n$. Podemos apreciar que en tan sólo $16$ pasos, la suma $4E_n$ aproxima de forma exacta los primeros 5 dígitos de $\pi \approx 3{,}14159$, mientras que $4S_n$ solo aproxima de forma exacta el primer dígito.

| n | $4S_n$ | $4E_n$ | n | $4S_n$ | $4E_n$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 4.00000 | 2.00000 | 9 | 3.25237 | 3.13947 |
| 2 | 2.66667 | 2.66667 | 10 | 3.04184 | 3.14058 |
| 3 | 3.46667 | 2.93333 | 11 | 3.23232 | 3.14111 |
| 4 | 2.89524 | 3.04762 | 12 | 3.05840 | 3.14136 |
| 5 | 3.33968 | 3.09841 | 13 | 3.21840 | 3.14148 |
| 6 | 2.97605 | 3.12150 | 14 | 3.07026 | 3.14154 |
| 7 | 3.28374 | 3.13216 | 15 | 3.20819 | 3.14157 |
| 8 | 3.01707 | 3.13713 | 16 | 3.07915 | 3.14158 |

Al mismo tiempo, la Figura 4 permite apreciar las diferencias entre $S_n$ y $\frac{\pi}{4}$ (trazo de triángulos rojos) y entre $E_n$ y $\frac{\pi}{4}$ (trazo de círculos azules).

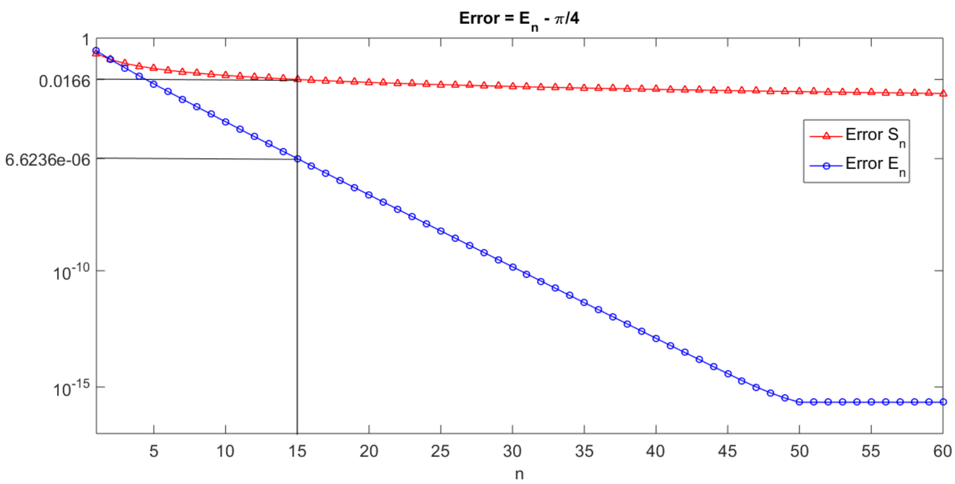



FIGURA 4. Comparación entre los errores $R_n$ y $R_n^{(E)}$

En 15 pasos, el error $R_n^{(E)}$ ya alcanza el orden de $10^{-6}$, mientras que $R_n$ es del orden de $0{,}0166$. Además, con tan sólo $50$ pasos la transformada de Euler alcanza un error del orden de la unidad de redondeo de máquina (observar que en la figura el error se estanca en el orden de $10^{-16}$ dado que esa es la unidad de redondeo de la máquina utilizada). En cambio, la serie original requiere más que cientos de miles de millones de pasos para alcanzar un error del mismo orden (puede calcularse la cantidad exacta de pasos necesarios realizando las mismas cuentas que hicimos en la Sección 4 aplicando el Teorema 3.2).

De este modo notamos que la transformada de Euler no sólo es una herramienta que permite hacer las cuentas a mano, sino que es un potente método de cálculo numérico. Por caso, si utilizando la serie de Gregory-Leibniz quisiéramos aproximar $\frac{\pi}{4}$ con un error del orden de la unidad de redondeo de máquina, $10^{-16}$, conservando en un vector todas las sumas parciales de esta serie, necesitaríamos una memoria de cientos de gigabytes para guardar toda esa información y, en una PC de escritorio convencional, probablemente no podríamos terminar la cuenta porque dejaría de responder. Mientras que aplicando la transformada de Euler, calculando apenas 50 pasos, hemos obtenido en una milésima de segundo un error del orden $10^{-16}$ en un simple ordenador de 4Gb de memoria RAM utilizando el software Octave.

**6.2. Una justificación formal.** Sí, la serie en cuestión converge a $\pi$. ¡Y hemos podido observarlo numéricamente! Sin embargo, usualmente los matemáticos no nos conformamos con las observaciones numéricas, dado que no constituyen una demostración rigurosa del hecho observado. Así que ahora intentaremos ir un poco más allá y proporcionaremos una demostración.

Muchas demostraciones han sido elaboradas. Una que se suele dar en los cursos básicos de cálculo es la que se basa en la fórmula

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arc\,tg} 1 = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$$

y que a continuación recordamos. Observemos primeramente que a partir de la expresión para la suma de una serie geométrica podemos deducir que

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+x^2} &= 1 - x^2 + x^4 + \cdots + (-1)^{n-1}x^{2n-2} + (-1)^n \frac{x^{2n}}{1+x^2} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^{2k} + (-1)^n \frac{x^{2n}}{1+x^2}. \end{aligned} \tag{6.1}$$

Integrando la identidad (6.1) entre 0 y 1 tenemos que

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\, dx &= \int_0^1 \left( \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^{2k} + (-1)^n \frac{x^{2n}}{1+x^2} \right) dx \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \int_0^1 x^{2k}\, dx + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2}\, dx \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \left. \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \right|_0^1 + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2}\, dx \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2}\, dx \\ &= S_n + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2}\, dx. \end{aligned}$$

Cuando $n \to \infty$ tenemos que

$$0 \le \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2}\, dx \le \int_0^1 x^{2n} dx = \frac{1}{2n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

y, por lo tanto,

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = \lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}.$$

De esta manera, llegamos a la identidad buscada, la que nos permite develar el misterio de la calabaza:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} = \frac{\pi}{4}.$$

En su más que recomendable texto *Excursions in Calculus* (Young, 1992, pág. 314), Young (el mismo de las demostraciones presentadas en este artículo), escribe unas palabras muy interesantes, que traducimos a continuación:

> *...la fórmula más sorprendente –y uno de los más hermosos descubrimientos matemáticos del siglo* XVII*– es la famosa serie de Leibniz para el número $\pi$:*
>
> $$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots.$$
>
> *Esta admirable serie alternada, con una ley de formación tan simple, permite apreciar la relación entre $\pi$ y los enteros en una forma mucho más profunda que a través de su desarrollo decimal, el cual no proporciona ningún orden aparente de regularidad en la sucesión de sus dígitos. Sin embargo, su belleza no va de la mano de su practicidad: se requerirían $100{,}000$ términos para calcular $\pi$ con una precisión similar a la que consiguió de Arquímedes.*
>
> *[...]*
>
> *Esta fórmula reduce el misterioso número $\pi$ a los enteros con una simpleza y una elegancia -y sorpresa- característica del arte más elevado. Y con todo, el resultado aún es misterioso ya que su deducción por medio de integrales y series geométricas no revela la relación que existe entre $\pi$ y los números impares. ¿Por qué un círculo tiene algo que ver con los números impares?*

Ahora que sabemos que la cantidad estampada en la calabaza no es otra cosa que el número $\pi$, ¿cuál es el sentido de esa inscripción? ¿cuál es el mensaje oculto, la información implícita? En suma, ¿cuál es el misterio de la calabaza? Es un juego de palabras en inglés cuya gracia se pierde al traducirlo al español. En inglés, $\pi$ y la palabra *pie*, que significa pastel, se pronuncian de igual modo: paɪ. Y es una tradición de Halloween comer pastel de calabaza, es decir, *pumpkin pie*. Este es el juego que sugiere la imagen. Es claro que el chiste no es gracioso en español pues además no solemos comer pastel de calabaza; más bien comemos tarta de calabaza. Es cierto, el chiste carece de gracia. De todos modos, era el disparador para construir un relato en torno a la satisfacción y las sorpresas que hemos experimentado a medida que lo fuimos construyendo.

## §7. Conclusiones

Llegamos al final del relato. Intentamos compartir con los lectores algunas experiencias propias. Cuando comenzamos la escritura aún no conocíamos el paper de Villarino. Su artículo nos permitió encontrar la idea para darle cierre a nuestra historia. Por supuesto, como en todo relato, hay una elección del énfasis, una elección del modo de relatar.

Hemos aprendido bastante sobre las series alternadas, un aprendizaje que además tiene un impacto inmediato en nuestras clases. Ese es el trabajo del investigador docente, buscar, estudiar, aprender. Y lo que más nos interesa resaltar es que hay mucho por hacer, aun en lo más básico de la matemática.

Y ahora que empiece la música, mientras vamos presentando a los homenajeados:

**Madhava de Sangamagrama** (1340-1425) fue un matemático y astrónomo indio, fundador de la escuela de Kerala. Para algunos historiadores (Rajagopal y Rangachari, 1978) los matemáticos keraleses se cuentan entre los creadores del análisis matemático, con importantes desarrollos en el campo de las series y las series de potencias. Madhava estudió -entre otras cuestiones- la serie del arcotangente que para $\frac{\pi}{4} = \operatorname{arc\,tg}(1)$ da lugar a la serie de la calabaza.

**James Gregory** (1638-1675) fue un matemático y astrónomo escocés, profesor de las universidades de St. Andrews y Edinburgh. Aunque en su época pasó desapercibido, demostró que los problemas de la tangente y del área son problemas inversos (una especie de "teorema fundamental del cálculo integral") y también, en su *Vera Circuli et Hiperbolae Quadratura*, utilizó series convergentes y procesos de paso al límite (algo que recién comenzaban a hacer Newton y Leibniz, los fundadores del análisis matemático) para obtener áreas, volúmenes de sólidos de revolución y longitudes de curvas. En 1671 Gregory redescubrió (Kline, 1992) el teorema de la serie del arcotangente formulado originalmente por Madhava.

**Gottfried Wilhelm Leibniz** (1646-1716) probablemente no necesita presentación. Fue uno de los más grandes pensadores de los siglos XVII y XVIII en los más diversos campos del pensamiento: metafísica, epistemología, lógica, física, y un largo etcétera que, por supuesto, incluye a la matemática. Sin dudas su mayor aporte en este campo fue la creación del cálculo diferencial e integral (título compartido o disputado con otro genio de la época: Isaac Newton).

## Referencias

Calabrese, P. (1962). Classroom Notes: A Note on Alternating Series. *Amer. Math. Monthly*, *69*(3), 215–217.

Johnsonbaugh, R. (1979). Summing an alternating series. *Amer. Math. Monthly*, *86*(8), 637–648.

Kline, M. (1992). *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días*. Alianza Editorial.

Knopp, K. (1954). *Theory and application of infinite series*. Blackie & Son Limited, London and Glasgow. (Second english edition)

Rajagopal, C., y Rangachari, M. (1978). On an untapped source of medieval Keralese mathematics. *Arch. History Exact Sci.*, *18*(2), 89–102.

Villarino, M. (2018). The error in an alternating series. *Amer. Math. Monthly*, *125*(4), 360–364.

Young, R. (1985). The error in alternating series. *Math. Gaz.*, *69*, 120–121.

Young, R. (1992). *Excursions in calculus – an interplay of the continuous and the discrete*. Mathematical Association of America, Washington, DC. (volume 13 of The Dolciani Mathematical Expositions)

Roberto Ben
*Instituto del Desarrollo Humano, Universidad Nacional de General Sarmiento*
*Ciclo Básico Común, Universidad de Buenos Aires*
(✉) *rben@ungs.edu.ar*

Antonio Cafure
*Instituto del Desarrollo Humano, Universidad Nacional de General Sarmiento*
*Ciclo Básico Común, Universidad de Buenos Aires*
(✉) *acafure@ungs.edu.ar*

Recibido: *21 de septiembre de 2018*.
Aceptado: *25 de noviembre de 2018*.
Publicado en línea: *21 de diciembre de 2018*.

## ¿Por qué las sucesiones?

*Nota editorial por Juan Carlos Pedraza*

Las sucesiones son objetos matemáticos muy sencillos que se apoyan en la ordenación de un conjunto (finito o infinito) de números. En la literatura matemática, la idea de sucesión se suele formular en términos del concepto de función, este último mucho más moderno y general que el primero, ver (Courant y John, 1994) y (Hardy, 1962). Sin embargo esta correcta visión de las sucesiones puede ocultar a veces su sencillez y su potencialidad como disparador de ideas, métodos y modelos. Daremos en esta nota editorial, algunas pinceladas históricas (desprovistas de rigor) que nos acercarán un poco a las razones de por qué estudiar sucesiones y que servirán a la vez como motivación e introducción a la lectura de las bellas técnicas y resultados presentados en el artículo *Series de Leibniz: un relato de Noche de Brujas* que forma parte de este número.

Podemos decir que la idea de sucesión ha estado presente desde siempre en la historia de la matemática. Galileo observó y anotó cuidadosamente el espacio que en cada segundo, recorría una bolita al caer por un plano inclinado. Estudiando la sucesión finita de números obtenidos, concluyó que el espacio recorrido en $t$ segundos era proporcional al cuadrado del tiempo y que la constante de proporcionalidad dependía de la inclinación del plano.

Dos mil años antes, Arquímedes dejó preparadas las ideas del cálculo infinitesimal a la espera de que la ciencia le perdiera el miedo al infinito usando la idea de sucesión. Para calcular el área de un "triángulo parabólico" (Figura 1), dividió la figura en bandas rectangulares y calculó, tanto por defecto como por exceso, aproximaciones del área buscada (Figura 1a y Figura 1b).

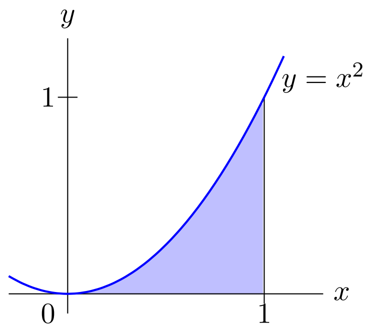



Figura 1

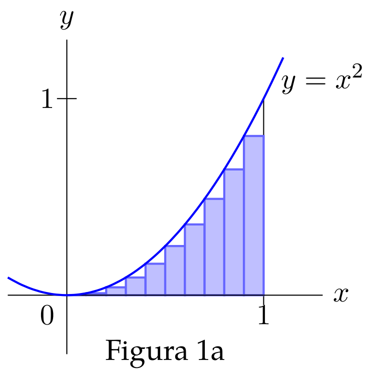



Figura 1a

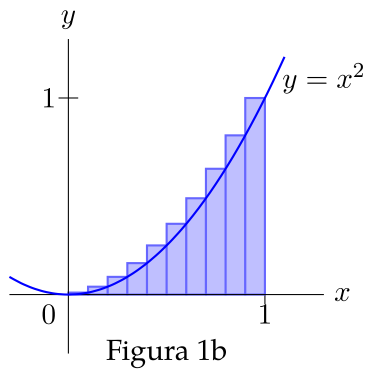



Figura 1b

A medida que agregaba rectángulos, crecían los términos a sumar y mejoraban las aproximaciones. Más precisamente, si llamamos $A$ al área del triángulo parabólico y $k$ a la cantidad de divisiones, resulta

$$\frac{1}{k^2}\left(1^2+2^2+3^2+\cdots+(k-1)^2\right) < A < \frac{1}{k^2}\left(1^2+2^2+3^2+\cdots+(k-1)^2+k^2\right).$$

Arquímedes calculó estas sumas de cuadrados, ver (Bunge, 2011) y obtuvo

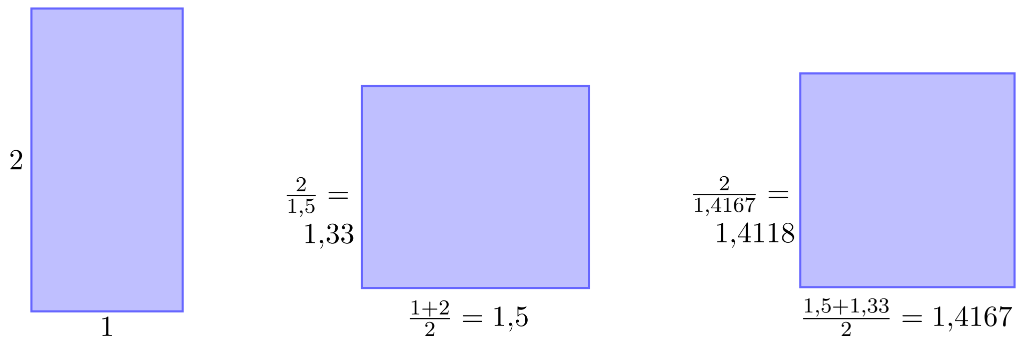
$$\frac{1}{3}-\frac{1}{2k}+\frac{1}{6k^2} < A < \frac{1}{3}+\frac{1}{2k}+\frac{1}{6k^2}.$$

El único número comprendido entre estas dos expresiones, que hacen cierta la desigualdad para todo valor de $k$, es $\frac{1}{3}$. Esta idea, tendría que esperar la llegada de Newton y Leibniz para cristalizarse en el cálculo integral.

Dos siglos antes de Arquímedes, Zenón de Elea desafiaba a los pitagóricos planteando algunas paradojas del infinito. Los eleáticos, corriente filosófica a la que pertenecía Zenón, planteaban que fenómenos como el movimiento eran producto de nuestros sentidos. Para "demostrar" la imposibilidad del movimiento decía que si para ir de $A$ a $B$ nos demoramos 2 minutos, primero debemos hacer la primera mitad del recorrido en 1 minuto, luego la mitad de la mitad restante en $\frac{1}{2}$ minuto, luego la mitad de lo que resta en $\frac{1}{4}$ de minuto y así "hasta la eternidad". Zenón pensaba que la suma infinita de tiempos positivos que genera este razonamiento $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots$ es infinito. De allí concluía que ir de $A$ a $B$ era imposible. Ergo, el movimiento no existe, ver (Boyer, 1986). Si bien Zenón estaba equivocado, planteaba un problema que solo una buena definición de "suma infinita" iba a poder resolver muchos siglos después. Además se recurría, tal vez por primera vez, al método por el absurdo, herramienta imprescindible en el quehacer matemático.

Como vemos, las "sumas infinitas" o series estuvieron siempre presentes en el desarrollo de nuestra ciencia. Las series son un caso particular de sucesiones y surgen, como en el caso de Arquímedes o de Zenón, cuando se pretende sumar todos los términos de una sucesión infinita. Sorprende (o tal vez no debiera) que tanto Newton como Leibniz, dieran sus primeros pasos en la matemática, estudiando algunas de ellas. Newton, cuando tenía entre 22 y 23 años, descubrió el teorema binomial, que no es el que conocemos como Binomio de Newton y muestra la manera de calcular la potencia de una suma cuando el exponente es un entero positivo ($(a+b)^n$ con $n=1,2,3,\ldots$). Este resultado era conocido mucho tiempo antes que Newton naciera. A Newton le interesaba este binomio cuando el exponente era una fracción. Más concretamente, logró escribir la expresión $(1+x^2)^{\frac{1}{2}}$ como una suma infinita de potencias de $x$. Este estudio, lo llevó a convencerse de que el análisis mediante series infinitas tenía la misma consistencia interna que el álgebra de cantidades finitas. Escribió en 1669: *"Todo lo que el Álgebra lleva a cabo por medio de ecuaciones con un número finito de términos (siempre que ello pueda hacerse), este nuevo método puede siempre conseguir lo mismo por medio de ecuaciones infinitas" (Boyer, 1986).* Newton con esto daba el salto que ni Zenón ni Arquímedes ni los que lo sucedieron por dos mil años, se habían atrevido.

Las sucesiones han cobrado una gran importancia en la generación de algoritmos para el cálculo y la programación. La creación del cálculo infinitesimal le permitió a Newton formular un algoritmo muy efectivo para calcular los ceros de una función dada. Usamos sus ideas para mostrar uno que calcula la raíz cuadrada de un número positivo, pero apelando a un argumento geométrico, ver (Pedraza, 2000) y (Hardy, 1962). El problema consiste en encontrar un algoritmo que calcule la raíz cuadrada de un número dado (por ejemplo $\sqrt{2}$), utilizando sólo las cuatro operaciones básicas. Se construyen sucesivos rectángulos **todos de área 2**. La base de cada uno de ellos es el promedio de la base y la altura del anterior.




Así resulta que la base de los sucesivos rectángulos son

$$b_1 = 1, \qquad b_2 = \frac{1+2}{2} = \frac{b_1 + \frac{2}{b_1}}{2}, \qquad b_3 = \frac{b_2 + \frac{2}{b_2}}{2}$$

y así sucesivamente

$$b_{n+1} = \frac{b_n + \frac{2}{b_n}}{2}$$

Geométricamente se observa que los rectángulos se van aproximando a un cuadrado de área 2, por lo cual las bases se van aproximando al lado del cuadrado de área 2, es decir $\sqrt{2}$. Si suponemos que $L$ es el límite de la sucesión $b_n$, resulta que $L$ debe cumplir

$$L = \frac{L + \frac{2}{L}}{2}$$

y despejando llegamos a que efectivamente $L = \sqrt{2}$. Todo se reduce a probar que $L$ efectivamente existe, para lo cual necesitamos tener bien claro el concepto de límite de una sucesión.

También en la obra temprana de Leibniz aparecen las sumas infinitas. Nos cuenta Boyer en (Boyer, 1986) que el físico y matemático holandés, C. Huygens, le planteó el problema de calcular la suma de los inversos de los números triangulares. Los números triangulares son los de la forma $\frac{n(n+1)}{2}$ (suma de los primeros $n$ números naturales). El desafío que el holandés le propuso era calcular la serie numérica

$$S = \frac{2}{1 \times 2} + \frac{2}{2 \times 3} + \frac{2}{3 \times 4} + \cdots + \frac{2}{n(n+1)} + \ldots$$

La habilidad de Leibniz lo llevó a descomponer cada término de la suma como

$$\frac{2}{n(n+1)} = \frac{2}{n} - \frac{2}{n+1}$$

generando así una "suma telescópica", donde cada término se cancela con el siguiente, y "hace fácil" la suma de la serie:

$$S = \frac{2}{1} - \frac{2}{2} + \frac{2}{2} - \frac{2}{3} + \frac{2}{3} - \frac{2}{4} + \cdots + \frac{2}{n} - \frac{2}{n+1} + \frac{2}{n+1} - \frac{2}{n+2} + \ldots$$

y como todos los términos, salvo el primero, se cancelaban, obtuvo

$$S = 2.$$

Si bien el método usado por Leibniz no fue muy ortodoxo por falta de una buena definición de serie en términos del concepto de sucesión y de límite, la idea, además de hermosa, es en la actualidad una herramienta de uso frecuente en el cálculo. El cálculo infinitesimal tuvo que lidiar durante casi dos siglos con las críticas bien fundadas de varios matemáticos y filósofos. Las cantidades "infinitamente pequeñas" que no llegaban a ser cero, permitían que aparecieran como denominadores en cocientes, al mismo tiempo que se podían tomar como cero cuando esto simplificaba los cálculos. Uno de los críticos más relevantes fue el matemático francés Jean Le Ronde D'Alembert (1717 – 1783). Él decía de estas cantidades infinitesimales:

> *... una cantidad es algo o nada; si es algo, aún no se ha desvanecido,*
> *si es nada ya se ha desvanecido. La suposición de que hay un estado intermedio*
> *entre estos dos es una quimera ...*

Esta suerte de inconsistencia lógica en los razonamientos hacía pensar a muchos que las nuevas teorías tenían pies de barro... Pero las objeciones de D'Alembert eran constructivas. Fue uno de los redactores principales de la Encyclopédie, que precedió y de alguna manera preparó el terreno intelectual para la Revolución Francesa. En ella muestra la necesidad de introducir una nueva noción: llama a una cantidad el *límite* de una segunda cantidad variable si la segunda puede aproximarse a la primera hasta diferir de ella en menos que cualquier cantidad dada (sin llegar nunca a coincidir con ella), ver (Robinson, 1966). Hubo que esperar al siguiente siglo para dar mayor precisión y sobre todo hacer operativo a este concepto fundamental de la matemática. A comienzos del siglo XIX, la cantidad y calidad de los resultados obtenidos con las ideas introducidas por Newton y Leibniz, volvió imperioso dotar al análisis del mismo nivel de rigor que se había utilizado en geometría desde los tiempos de Euclides. Con este espíritu, en 1821, Augustine Cauchy (1789 – 1857) publicó su *Course d'analyse* destinado a los estudiantes de la Escuela Politécnica de París. Introduce una noción de variable que permite darle al concepto de límite un carácter operativo y práctico. Con esta noción los molestos infinitésimos pasan a ser variables que tienen límite cero. Esta tarea de fundamentación del cálculo es terminada por Karl Weiestrass (1815 – 1897).

## Referencias

Boyer, C. B. (1986). *Historia de la matemática*. Alianza Editorial.

Bunge, M. (2011). La suma de cuadrados. *Qed*, *5*, 18–22.

Courant, R., y John, F. (1994). *Introducción al cálculo y al análisis matemático*. Limusa.

Hardy, G. H. (1962). *Curso de análisis matemático*. Ed. Nigar. (Traducción de la 10ª Edición inglesa)

Pedraza, J. C. (2000). Las raíces de newton. *Boletín Federación Iberoamericana de Competencias Matemáticas*, *7*, 3–4.

Robinson, A. (1966). *Non-standard analysis*. North Holland, Amsterdam.

Revista de Educación Matemática
Volumen 33, N° 3 (2018), páginas 51 – 67
Unión Matemática Argentina - Famaf (UNC)

*Artículo de Matemática*

# MATEMÁTICA EN AZAR Y JUEGOS

Roberto J. Miatello, Angel D. Villanueva

Resumen. El objetivo de esta nota es aplicar la teoría de probabilidades a diversas situaciones en azar y juegos. Haremos uso de las nociones básicas de la probabilidad discreta y de la combinatoria. Nos interesará especialmente el comportamiento de la probabilidad cuando algunos de los parámetros involucrados crece arbitrariamente.

## §1. Introducción

El concepto de probabilidad surge en los siglos XVI y XVII, en parte ante la necesidad de resolver problemas que se plantean en los juegos de azar (L. Pacioli, Tartaglia, G. Cardano, B. Pascal). Se considera entre los iniciadores a P. Fermat y B. Pascal quienes, con motivo del problema de repartición del premio, alrededor de 1654 fijaron los primeros conceptos. El físico holandés C. Huygens fue uno de los pioneros en el estudio de la probabilidad, tema sobre el que publicó en 1656 el libro *De ratiociniis in ludo aleae* (Razonamientos sobre los juegos de azar). En él introdujo algunos conceptos importantes en este campo, como la esperanza matemática, y resolvió algunos de los problemas propuestos por Pascal, Fermat y De Méré. Esta obra de Huygens sería estudiada profundamente por Jakob Bernoulli en su *Ars conjectandi*.

Hoy en día la idea de probabilidad (y de su disciplina hermana, la estadística) aparece en muchos campos de la ciencia, en eventos deportivos, juegos de azar, en pronósticos económicos, pronósticos de tiempo, entre tantas otras disciplinas o actividades humanas. Se considera que la teoría 'moderna' de probabilidades fue iniciada por el matemático ruso A. Kolmogorov quien en 1933 publicó un libro fundamental sobre el tema.

Resumidamente, dado un experimento con una cantidad de resultados posibles se desea saber si un determinado evento puede ocurrir y con qué chances (en inglés 'what are the odds'?). Cuando hay un número finito de resultados posibles y todos ellos son equivalentes, la probabilidad de un evento se calcula dividiendo el número de resultados favorables (al evento) por el número total de casos posibles. Cuando hay una infinidad de casos, la situación es más compleja, es necesario dividir la 'medida' del conjunto de casos favorables por la 'medida' del conjunto de casos posibles. Obviamente, elegir la manera adecuada de medir depende del problema que se estudie y es un aspecto esencial de la dificultad.

De alguna manera, la teoría de probabilidades intenta explicar en conceptos matemáticos cual será el devenir de ciertos acontecimientos. Laplace (1749 – 1827) decía que *"la teoría de probabilidades no es más, en el fondo, que el buen sentido reducido al cálculo; ella hace apreciar con exactitud lo que los espíritus justos sienten por una especie de instinto, sin que puedan a menudo darse cuenta de ello"*.

En estas notas aplicamos conceptos básicos de la teoría de probabilidades a diversas situaciones de azar dentro del primer tipo, esto es, con un número finito de resultados posibles todos ellos equivalentes. En particular analizaremos el problema de repartición del premio, mostraremos que en un curso de 40 estudiantes es muy probable que haya al menos dos que cumplan años el mismo día y explicaremos por qué en un torneo a eliminación directa, aumentan las chances del equipo que es superior si la serie se define en un número creciente de partidos (3, 5 o más) en lugar de en un sólo encuentro.

## §2. Cálculo de probabilidades

Dado un experimento con una cantidad finita de resultados posibles, todos ellos equivalentes, se define la probabilidad de un evento $E$ como el cociente de los casos favorables sobre los casos totales

$$p(E) = \frac{\#\{\text{resultados favorables}\}}{\#\{\text{resultados posibles}\}},$$

donde el símbolo $\#$ denota el número de elementos de un conjunto.

Veamos algunos ejemplos para ilustrar esta definición.

**Ejemplos**

(1) Si se lanza un dado, la probabilidad de que salga el número 1 es de una (favorable) en 6 (posibles), es decir

$$p(\{1\}) = \tfrac{1}{6}.$$

(2) Ahora bien, si nuevamente se lanza un dado, la probabilidad de obtener un número par es

$$p(\text{par}) = \frac{\#\{2,4,6\}}{\#\{1,2,3,4,5,6\}} = \tfrac{1}{2}.$$

(3) Ahora bien, si se lanzan 2 dados, nos preguntamos cuál es la probabilidad de que salga al menos un 1.

El número de resultados posibles es $6 \cdot 6 = 36$, pues para cada uno de los dados hay 6 posibilidades. Los resultados favorables son los del tipo

$$\begin{cases} 1y & \text{(si sale 1 en el primer dado y cualquier número y en el segundo),} \\ x1 & \text{(si sale cualquier número x en el primer dado y 1 en el segundo).} \end{cases}$$

Notar que hay 6 posibilidades en cada caso y que al $11$ lo hemos contado 2 veces, luego hay que restarlo. Luego, los casos favorables son $6 + 6 - 1 = 11$ y se tiene

$$p(\text{obtener al menos un } 1) = \tfrac{11}{36}.$$

(4) Si se lanzan 3 dados, queremos nuevamente saber la probabilidad de que salga al menos un 1.

Los casos posibles son $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$. Enumeremos los casos favorables. Ellos son del tipo

$$\begin{cases} 1yz & \text{hay } 6.6 = 36 \text{ casos,} \\ x1z & \text{hay } 5.6 = 30 \text{ casos,} \\ xy1 & \text{hay } 5.5 = 25 \text{ casos.} \end{cases}$$

Observamos que en la opción $x1z$, $x$ puede tomar 5 valores (2, 3, 4, 5, 6) pues el caso en que toma el valor 1 ya se contó en el primer combo $1yz$. Similar argumento es válido para el combo $xy1$. De acuerdo a este razonamiento, el conteo de casos favorables da $36 + 30 + 25 = 91$, luego

$$p(\text{salga al menos un } 1) = \tfrac{91}{216}.$$

Teniendo en mente estos ejemplos, veremos a continuación que hay un modo más simétrico de contar los casos favorables.

**Teorema 2.1.** *(Principio de inclusión-exclusión) Si $A_1, \ldots, A_n$ son conjuntos finitos entonces*

$$\begin{aligned} \#(A_1 \cup \cdots \cup A_n) &= \sum_{1 \le i \le n} \#A_i - \sum_{1 \le i < j \le n} \#(A_i \cap A_j) \\ &\quad + \sum_{1 \le i < j < k \le n} \#(A_i \cap A_j \cap A_k) - \cdots + (-1)^{n+1} \#(A_1 \cap \cdots \cap A_n) \end{aligned}$$

*donde $\#A$ denota el cardinal, o sea la cantidad de elementos, de $A$.*

Veamos de justificar esta fórmula en los casos $n = 2$ y $n = 3$.

Si $n = 2$ tenemos

$$\#(A_1 \cup A_2) = \#A_1 + \#A_2 - \#(A_1 \cap A_2),$$

ya que los elementos de $A_1 \cap A_2$ han sido contados dos veces.

Si $n = 3$ tenemos que

$$\begin{aligned}\#(A_1 \cup A_2 \cup A_3) =& \#A_1 + \#A_2 + \#A_3 \\ & - \#(A_1 \cap A_2) - \#(A_1 \cap A_3) - \#(A_2 \cap A_3) + \#(A_1 \cap A_2 \cap A_3)\end{aligned}$$

pues, en la primera suma, los elementos de los $A_i \cap A_j$ han sido contados dos veces y entonces hay que restarlos y, por otra parte, los de $A_1 \cap A_2 \cap A_3$ fueron contados tres veces y luego restados tres veces, por lo tanto es necesario sumarlos una vez, como indica la fórmula.

Aplicaremos la fórmula del teorema en el caso del ejemplo (4), calculando los casos favorables por medio del principio de inclusión-exclusión. Es decir, contaremos las ternas con al menos un número 1, restaremos las ternas que tienen al menos dos números 1 y finalmente sumaremos las ternas que tienen tres números 1.

En la notación del teorema tenemos

$$\begin{aligned} A_1 &:= \{\text{ternas con 1 en la primera posición}\}, \\ A_2 &:= \{\text{ternas con 1 en la segunda posición}\}, \\ A_3 &:= \{\text{ternas con 1 en la tercera posición}\}. \end{aligned}$$

Los casos en que hay al menos un número 1 son

$$\begin{cases} 1yz & (\text{esto es, } A_1), \\ x1z & (\text{esto es, } A_2), \\ xy1 & (\text{esto es, } A_3), \end{cases}$$

y en cada caso hay $36$ posibilidades.

Los casos en que hay al menos dos números 1 son

$$\begin{cases} 11z & (\text{esto es, } A_1 \cap A_2), \\ 1y1 & (\text{esto es, } A_1 \cap A_3), \\ x11 & (\text{esto es, } A_2 \cap A_3), \end{cases}$$

en cada caso hay $6$ posibilidades.

Finalmente, el caso en que hay tres números 1 es

$$111 \quad (\text{esto es, } A_1 \cap A_2 \cap A_3).$$

Por lo tanto, el número de casos favorables es

$$36 + 36 + 36 - 6 - 6 - 6 + 1 = 91.$$

Antes de discutir algunas aplicaciones introducimos los siguientes conceptos que utilizaremos a lo largo del texto.

El *factorial* de un entero positivo $n$ se define como el producto de todos los enteros positivos desde $1$ hasta $n$ y lo denotamos $n!$ Por ejemplo, $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$. Por convención, se toma $0! = 1$.

Dados $n \geq m$ enteros positivos, el *número combinatorio* $\binom{n}{m}$ se define como

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{(n-m)!m!}.$$

Este, representa el número total de subconjuntos de $m$ elementos de un conjunto de $n$ elementos.

A modo ilustrativo, si tenemos $4$ jugadores de tenis $A, B, C$ y $D$ ¿Cuáles son todas las parejas de dobles que podemos armar? Tenemos

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!2!} = 6.$$

Estas son: $AB, AC, AD, BC, BD$ y $CD$.

## §3. Repartición del premio.

Un problema que algunos consideran que fue el origen del cálculo de probabilidades es el siguiente. *Dos jugadores, A y B, juegan un juego en que ambos tienen las mismas probabilidades de ganar, por ejemplo, tirar una moneda equilibrada: cuando sale cara (C) gana A y cuando sale escudo (E) gana B. El ganador será el primero en ganar (por ejemplo) 6 rondas. La pregunta es ¿Cómo se debería repartir el premio si el juego se interrumpe antes de finalizar cuando un jugador ya ha ganado (por ejemplo) 5 rondas y el otro 3?*

Este problema fue considerado por matemáticos importantes de la época y tuvo varias soluciones incorrectas. Esto dio origen a una correspondencia entre Pascal y Fermat (aproximadamente 1650) quienes finalmente dieron la solución acertada. Christian Huygens, que tuvo conocimiento de esta correspondencia en 1655 publicó en 1657 el tratado *De Ratiociniis in Ludo Aleae* (Calculando en juegos de azar) en el que resolvía los problemas sobre probabilidades que circulaban en aquella época. Este tratado se convirtió en el primer tratado publicado sobre cálculo de probabilidades.

Según Pascal y Fermat, la repartición del premio debería tener en cuenta lo que puede suceder si el juego continúa.

En efecto, si el juego continuara, terminaría como máximo en 3 rondas, si ganara las tres el jugador B y en menos si A ganara alguna. Notar que para que B gane el premio, debería salir tres veces seguidas escudo (E). La probabilidad de que esto suceda es

$$p(\mathrm{EEE}) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}.$$

Por lo tanto, de 8 casos posibles, hay 7 casos en los que gana el jugador A y un caso en que gana B

| | | | |
|---|---|---|---|
| CCC | CCE | CEC | CEE |
| ECC | ECE | EEC | EEE |

Notar que el único caso en que gana B es el último (EEE).

La conclusión es que corresponde recibir $\frac{7}{8}$ partes del premio al jugador A y $\frac{1}{8}$ parte al jugador B.

Más generalmente, consideremos el caso en que varía el número de rondas. Supongamos que B necesita $n$ rondas para vencer y A $m$ rondas, con $n > m$. En este caso, el juego termina en

$$(n-1)+(m-1)+1=n+m-1$$

rondas y A, para vencer, precisa ganar un número $j \geq m$ de rondas. Luego

$$p_A = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+m-1} \sum_{j=m}^{n+m-1} \binom{n+m-1}{j}.$$

Por ejemplo, si $m = 1$ y $n = 3$ queda

$$p_A = \frac{1}{8} \sum_{j=1}^{3} \binom{3}{j} = \frac{1}{8}(3+3+1) = \frac{7}{8},$$

como hallamos anteriormente.

## §4. Cumpleaños

En una reunión de 30 personas, *¿cuál es la probabilidad de que dos de ellas cumplan años el mismo día?*

Para determinarlo, es más conveniente calcular la probabilidad de que NO haya dos personas que cumplan años el mismo día.

Notar que la primer persona tiene los 365 días del año disponibles, pero la segunda persona sólo dispone de 364 días, y así hasta la persona número 30 que tiene disponibles 336 días.

Luego, en un grupo de 30 personas, la probabilidad de que todas ellas cumplan años en distintos días es

$$p(\text{cumplan días distintos}) = \frac{365 \cdot 364 \cdots 337 \cdot 336}{365^{30}} \sim 0,29.$$

Dejamos la verificación del cálculo al lector.

Por lo tanto, la probabilidad de que haya al menos 2 personas que cumplan el mismo día, es

$$p(\text{dos cumplen el mismo día}) = 1 - p(\text{todos cumplen en días distintos})$$
$$= 1 - 0,29 = 0,71 \sim 71\,\%.$$

Uno puede hacer otro cálculo y comprobar que en un grupo de 23 personas o más resulta más probable que haya al menos 2 que cumplan años el mismo día, a que no los haya. Asimismo, se puede ver que en un grupo de 60 personas, la probabilidad de que haya dos que cumplan años el mismo día es realmente muy grande, de aproximadamente $99\,\%$.

## §5. Dígitos en un número natural

La pregunta es ahora estimar la probabilidad $p_n$ de que un dígito fijo (digamos 7) aparezca en la expresión de un número natural y analizar el comportamiento de $p_n$ cuando $n$ tiende a infinito.

Supondremos que $n$ tiene a lo sumo $h$ cifras. Si $h = 1$, entonces n puede tomar todos los valores entre 0 y 9 salvo 0 y 7 (ya que 0 no es natural), es decir hay $8$ posibilidades. Si h=2, la primera cifra tiene 8 valores posibles y la segunda 9 pues 0 ahora está permitido. Similarmente, si $n$ posee $h$ cifras, todas las cifras salvo la primera tienen 9 valores posibles.

Esto nos dice que entre $0$ y $n = 10^h - 1$ el número de casos desfavorables es

$$8(1 + 9 + 9^2 + \cdots + 9^{h-1}) = 8\frac{9^h - 1}{9 - 1} = 9^h - 1.$$

Luego, la probabilidad de que no aparezca el dígito 7 es

$$p_n = \frac{9^h - 1}{10^h} = \left(\frac{9}{10}\right)^h - \left(\frac{1}{10}\right)^h,$$

cantidad que tiende a $0$ si $h$ (o $n$) tiende a infinito. Esto nos dice que la probabilidad de que el dígito $7$ no aparezca en un número natural $n$ cuando $n$ es muy grande tiende a $0$. Sin embargo, el comportamiento de esta sucesión de números es muy lento. En efecto, se puede calcular que

$$\begin{aligned}
h &= 2, \qquad & p &= \frac{81 - 1}{100} = 0{,}8\\
h &= 3, \qquad & p &= \frac{729 - 1}{1000} = 0{,}728\\
h &= 4, \qquad & p &= \frac{6561 - 1}{10000} = 0{,}656\\
h &= 6, \qquad & p &= \frac{53145 - 1}{100000} = 0{,}531\\
h &= 9, \qquad & p &= \frac{38742705 - 1}{100000000} = 0{,}429\,.
\end{aligned}$$

Esto dice en particular que aún para números $n$ con un millón de cifras, la probabilidad de que no aparezca el dígito 7 es elevada y mayor que $\frac{1}{2}$. Sin embargo, cuando $n$ tiende a infinito, la probabilidad de que aparezca el dígito 7 tiende a 1.

## §6. Torneos y competencias

Consideremos ahora un torneo de eliminación simple, es decir, aquél en el cual se enfrentan dos rivales y el vencedor avanza de fase y el perdedor queda eliminado. Por ejemplo los torneos de tenis, el mundial de fútbol a partir de los octavos de final, los play-offs en la NBA, etc.

**6.1. Eliminación simple.** Supongamos que un jugador (o un equipo) A llega a los octavos de final y que la probabilidad de vencer a cualquier otro es de $\frac{2}{3}$. Surge la pregunta natural *¿Cuál es la probabilidad de que A sea campeón?*

La probabilidad de que A gane los octavos de final es de $\frac{2}{3}$.

Los octavos y los cuartos de final son eventos independientes entre sí, por lo tanto las probabilidades de vencer en cada uno se multiplican, luego la probabilidad de que A llegue a semifinales, es decir, de que gane octavos y cuartos de final es

$$p(\text{semi final}) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9} = 0,44\ldots \sim 44\,\%.$$

Observamos que aún siendo A superior a cualquiera de sus rivales la probabilidad de llegar a semifinales ya es menor al 50 %.

Finalmente, la probabilidad de que A salga campeón es

$$p_{2/3}(\text{A campeón}) = \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{81} = 0,1975\ldots \sim 19,75\,\% < 20\,\%.$$

• Hagamos la misma pregunta suponiendo que A tiene una mayor superioridad sobre sus contrincantes. Por ejemplo, supongamos que la probabilidad de vencer a cualquier otro equipo sea de $\frac{3}{4}$. Entonces,

$$p_{3/4}(\text{A campeón}) = \left(\frac{3}{4}\right) . \left(\frac{3}{4}\right) . \left(\frac{3}{4}\right) . \left(\frac{3}{4}\right) = \left(\frac{3}{4}\right)^4 = \frac{81}{256} = 0,316\ldots \sim 31,6\,\%.$$

Como vemos la chance de ser campeón es aún pequeña, pese a la superioridad sobre cada rival.

**6.2. Definiciones al mejor de 3, 7 ó una cantidad arbitraria de partidos**

*Al mejor de 3.* Ahora nos preguntamos qué sucede si la serie se juega al mejor de 3 partidos, es decir, se enfrentan 3 veces los mismos rivales y el que haya ganado más partidos avanza de fase.

Sea $p$ la probabilidad que tiene A de vencer a sus rivales. Las formas que tiene A de pasar de fase son

(a) ganando los tres partidos,
(b) ganando dos partidos y perdiendo uno.

La probabilidad de que A gane los tres partidos es

$$p(\text{A gana tres}) = p \cdot p \cdot p = p^3.$$

El evento de que A gane dos partidos y pierda uno puede darse de tres maneras distintas:

- A gana los primeros dos partidos y pierde el último,
- A gana el primer y tercer partido y pierde el segundo,
- A pierde el primer partido y gana los últimos dos.

Cada una de estas situaciones tiene probabilidad $p^2(1-p)$. Entonces

$$p(\text{A gana dos}) = 3p^2(1-p).$$

Luego,

$$p(\text{A gana al mejor de tres}) = p^3 + 3p^2(1-p) = 3p^2 - 2p^3 = p^2(3-2p).$$

En consecuencia, si la probabilidad de que A venza a cualquier rival es de $\frac{2}{3}$, entonces la probabilidad de que A pase de fase al mejor de tres partidos es

$$p(\text{A gana al mejor de tres}) = \left(\frac{2}{3}\right)^2\left(3 - 2\cdot\frac{2}{3}\right) = \frac{20}{27} = 0{,}74\ldots \sim 74\,\%.$$

Luego, la probabilidad de que A salga campeón jugando cada fase al mejor de tres partidos es

$$p_{2/3}(\text{A campeón}) = \left(\frac{20}{27}\right)\cdot\left(\frac{20}{27}\right)\cdot\left(\frac{20}{27}\right).\left(\frac{20}{27}\right) = \left(\frac{20}{27}\right)^4 = 0{,}30\ldots \sim 30\,\%.$$

Haciendo el mismo cálculo pero suponiendo que la probabilidad que tiene A de vencer a cualquier rival es de $\frac{3}{4}$, resulta que la probabilidad de que A pase de fase al mejor de tres partidos es

$$p_{3/4}(\text{gana A al mejor de tres}) = \left(\frac{3}{4}\right)^2.\left(3 - 2\cdot\frac{3}{4}\right) = \frac{27}{32} \sim 84{,}4\,\%.$$

y de que A salga campeón con este sistema

$$p_{3/4}(\text{A campeón}) = \left(\frac{27}{32}\right)\cdot\left(\frac{27}{32}\right)\cdot\left(\frac{27}{32}\right).\left(\frac{27}{32}\right) = \left(\frac{27}{32}\right)^4 \sim 50{,}7\,\%.$$

*Al mejor de 7.* Ahora nos preguntamos qué sucede si la serie se juega al mejor de 7 partidos.

Sea $p$ la probabilidad que tiene A de vencer a cualquiera de sus rivales. Las formas que tiene A de pasar de fase son

(a) ganando los siete partidos,
(b) ganando seis partidos y perdiendo 1,
(c) ganando cinco partidos y perdiendo 2,
(d) ganando cuatro partidos y perdiendo 3.

Con el mismo razonamiento que en la subsección anterior, tenemos

$$\begin{aligned}
p(\text{caso a}) &= p^7,\\
p(\text{caso b}) &= \binom{7}{6}p^6(1-p),\\
p(\text{caso c}) &= \binom{7}{5}p^5(1-p)^2,\\
p(\text{caso d}) &= \binom{7}{4}p^4(1-p)^3.
\end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}
p(\text{A pasa}) &= p^7 + \binom{7}{6}p^6(1-p) + \binom{7}{5}p^5(1-p)^2 + \binom{7}{4}p^4(1-p)^3\\
&= p^7 + 7p^6(1-p) + 21p^5(1-p)^2 + 35p^4(1-p)^3.
\end{aligned}$$

Si suponemos que la probabilidad que tiene A de vencer a cualquier rival es $p = \frac{2}{3}$ $(1 - p = \frac{1}{3})$ entonces la probabilidad de que A pase la serie al mejor de 7 es

$$p_{2/3}(\text{A pasa}) = \left(\frac{2}{3}\right)^7 + 7\left(\frac{2}{3}\right)^6\left(\frac{1}{3}\right) + 21\left(\frac{2}{3}\right)^5\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 35\left(\frac{2}{3}\right)^4\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1808}{2187} \sim 82,7\,\%.$$

Luego, la probabilidad de que A sea campeón con este sistema es

$$p_{2/3}(\text{A campeón}) = \left(\frac{1808}{2187}\right)^4 \sim 46,7\,\%.$$

Si suponemos que la probabilidad que tiene A de vencer a cualquier rival es $p = \frac{3}{4}$ $(1 - p = \frac{1}{4})$ entonces la probabilidad que tiene A de pasar la serie al mejor de 7 es

$$p_{3/4}(\text{A pasa}) = \left(\frac{3}{4}\right)^7 + 7\left(\frac{3}{4}\right)^6\left(\frac{1}{4}\right) + 21\left(\frac{3}{4}\right)^5\left(\frac{1}{4}\right)^2 + 35\left(\frac{3}{4}\right)^4\left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{15.228}{16.384} \sim 92,94\,\%.$$

Luego, la probabilidad de que A sea campeón con este sistema es

$$p_{3/4}(\text{A campeón}) = \left(\frac{15.228}{16.384}\right)^4 \sim 74,62\,\%.$$

Estos cálculos muestran, como era de esperar, que la probabilidad de A aumenta si el número de partidos disputados en la serie crece.

*Al mejor de n.* Ahora generalizaremos el problema anterior, cuando el enfrentamiento se decide con $n$ partidos. Nos interesa especialmente ver lo que sucede cuando $n \to \infty$.

Haremos uso de las siguientes identidades entre números combinatorios válidas con las convenciones de que $\binom{n}{j} = 0$ si $j < 0$ y $\binom{n}{0} = 1$.

$$
\begin{aligned}
\binom{2n+3}{j} &= \binom{2n+2}{j} + \binom{2n+2}{j-1} \\
&= \binom{2n+1}{j} + \binom{2n+1}{j-1} + \binom{2n+1}{j-1} + \binom{2n+1}{j-2} \\
&= \binom{2n+1}{j} + 2\binom{2n+1}{j-1} + \binom{2n+1}{j-2}.
\end{aligned} \tag{6.1}
$$

Sea $p_{2n+1}$ la probabilidad de A de vencer en $2n+1$ partidos. Usando (6.1) establecemos una relación entre $p_{2n+3}$ y $p_{2n+1}$. Tenemos

$$p_{2n+3} = \sum_{j=n+2}^{2n+3} \binom{2n+3}{j} p^j (1-p)^{2n+3-j}.$$

Luego,

$$
\begin{aligned}
p_{2n+3} &= \sum_{j=n+2}^{2n+3} \binom{2n+1}{j} p^j (1-p)^{2n+3-j} + 2 \sum_{j=n+2}^{2n+3} \binom{2n+1}{j-1} p^j (1-p)^{2n+3-j} \\
&\quad + \sum_{j=n+2}^{2n+3} \binom{2n+1}{j-2} p^j (1-p)^{2n+3-j} \\
&= \sum_{j=n+2}^{2n+1} \left( \binom{2n+1}{j} p^j (1-p)^{2n+1-j} \right) (1-p)^2 \\
&\quad + 2p(1-p) \sum_{j=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{j} p^j (1-p)^{2n+1-j} + p^2 \sum_{j=n}^{2n+1} p^j (1-p)^{2n+1-j} \\
&= p_{2n+1}(1-p)^2 - \binom{2n+1}{n+1} p^{n+1}(1-p)^{n+2} + p_{2n+1}(2p(1-p) + p^2) \\
&\quad + \binom{2n+1}{n} p^{n+2}(1-p)^{n+1},
\end{aligned}
$$

de donde

$$p_{2n+3} = p_{2n+1} + \binom{2n+1}{n} \big(p(1-p)\big)^{n+1} (2p-1).$$

Esto muestra que si $p > \frac{1}{2}$ el segundo sumando a la derecha es positivo, luego la probabilidad, de $2n+1$ juegos a $2n+3$ juegos, ha aumentado. Además se tiene

$$\begin{aligned} p_{2n+3} &= (p_{2n+3} - p_{2n+1}) + (p_{2n+1} - p_{2n-1}) + \cdots + (p_3 - p_1) \\ &= (2p-1)\sum_{j=0}^{2n+1} \binom{2j+1}{j} (p(1-p))^{j+1} + p. \end{aligned}$$

Se sabe que, para $n \in \mathbb{N}$, vale la identidad

$$2\sum_{j=0}^{\infty} \binom{2j+n}{j} x^j = \frac{1}{\sqrt{1-4x}} \left( \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} \right)^n$$

(ver por ejemplo *Anexo: series matemáticas* en Wikipedia). Usando esto con $n = 1$ sale que

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} p_{2n+1} &= p + (2p-1)p(1-p)\sum_{j=0}^{\infty} \binom{2j+1}{j} (p(1-p))^j \\ &= p + (2p-1)\,\frac{1-\sqrt{1-4p(1-p)}}{2\sqrt{1-4p(1-p)}}. \end{aligned}$$

El lector interesado puede encontrar el límite anterior en Wikipedia.

Ahora ponemos $p = \frac{1}{2} + t$. Luego, $4p(p-1) = 4t^2 - 1$ y obtenemos que el límite anterior es igual a

$$p + (2p-1)\,\frac{1-2t}{4t} = p + \tfrac{1}{2} - t = 1.$$

Este cálculo verifica que si $p > \frac{1}{2}$ la función $p_{2n+1}$ tiende a 1 cuando $n$ crece arbitrariamente, es decir que el jugador que tiene alguna superioridad, aunque sea pequeña, vence con probabilidad aproximada a 1 si se juega al mejor de un número suficientemente grande de partidos. Por otra parte el argumento también prueba que $p_n$ nunca es igual a $1$, salvo que se parta inicialmente de $p = 1$.

## §7. Regalos

Ahora planteamos el siguiente problema. Supongamos que hay un grupo de $n$ compañeros de trabajo y cada uno compra un regalo para repartirse entre ellos de manera aleatoria. *¿Cuál es la probabilidad de que a ninguno le toque el regalo que el mismo compró?*

Analicemos la situación. Supongamos que el grupo es de 2 personas: $A_1$ y $A_2$. Hay 2 situaciones posibles: que se intercambien los regalos o que a cada uno le toque el que compró:

$$p(\text{ninguno recibe su propio regalo}) = \frac{1}{2} = 50\,\%.$$

Supongamos ahora que el grupo es de 3 personas: $A_1, A_2, A_3$. Hay $3! = 6$ formas posibles de repartir los regalos:

$$\begin{array}{lll} A_1\ A_2\ A_3, & A_1\ A_3\ A_2, & A_2\ A_1\ A_3, \\ A_2\ A_3\ A_1, & A_3\ A_2\ A_1, & A_3\ A_1\ A_2. \end{array}$$

En el primer caso a cada uno le toca su propio regalo; en el segundo caso a $A_1$ le tocó su propio regalo, a $A_2$ el regalo que compró $A_3$ y a $A_3$ el que compró $A_2$, etc. En el cuarto y en el sexto caso nadie recibe el regalo que compró. Luego,

$$p(\text{ninguno recibe su propio regalo}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \sim 33,3\,\%.$$

Nos gustaría poder deducir qué ocurre en un grupo con un número arbitrario $n$ de personas.

Etiquetamos a las personas de $a_1$ a $a_n$. Utilizaremos el principio de inclusión-exclusión para contar los casos en que hay al menos una persona que recibe su propio regalo. Para eso, primero sumamos los casos en que $a_1$ recibe su propio regalo, mas los casos en que $a_2$ recibe su propio regalo, siguiendo así hasta sumar los casos en que $a_n$ recibe su propio regalo

$$\sum_{i=1}^{n} \#\{\text{casos que } a_i \text{ recibe su propio regalo}\} = \binom{n}{1}(n-1)!$$

ya que hay $\binom{n}{1}$ formas de elegir a la persona que recibe su propio regalo y para cada una de esas elecciones hay $(n-1)!$ formas de repartir los regalos entre las $n-1$ personas restantes.

Notar que los casos en que hay dos personas que reciben su propio regalo los hemos contado en más de una oportunidad. Por lo tanto, debemos sustraer:

$$\begin{aligned} &\#\{\text{casos que } a_1 \text{ y } a_2 \text{ reciben su propio regalo}\} + \cdots \\ &+ \#\{\text{casos que } a_1 \text{ y } a_n \text{ reciben su propio regalo}\} + \cdots \\ &+ \#\{\text{casos que } a_2 \text{ y } a_3 \text{ reciben su propio regalo}\} + \cdots \\ &+ \#\{\text{casos que } a_2 \text{ y } a_n \text{ reciben su propio regalo}\} + \cdots \\ &+ \#\{\text{casos que } a_{n-1} \text{ y } a_n \text{ reciben su propio regalo}\} = \binom{n}{2}(n-2)! \end{aligned}$$

pues tenemos $\binom{n}{2}$ formas de elegir a las 2 personas que reciben su propio regalo y para cada una de esas elecciones hay $(n-2)!$ formas de repartir los regalos entre las $n-2$ personas restantes.

Notar que los casos en que exactamente un mismo grupo de 3 personas reciben su propio regalo ha sido sumado primero 3 veces y luego sustraido 3 veces.

Entonces tenemos que sumar:

$$\#\{\text{casos que } a_1, a_2 \text{ y } a_3 \text{ reciben su propio regalo}\}+$$
$$\#\{\text{casos que } a_1, a_2 \text{ y } a_4 \text{ reciben su propio regalo}\} + \cdots +$$
$$\#\{\text{casos que } a_{n-2}, a_{n-1} \text{ y } a_n \text{ reciben su propio regalo}\} = \binom{n}{3}(n-3)!$$

Procedemos con el mismo razonamiento, sumando y restando los casos siguientes para concluir que la cantidad de casos desfavorables, es decir, aquellos en que al menos una persona recibe su propio regalo, es

$$\binom{n}{1}(n-1)!-\binom{n}{2}(n-2)!+\binom{n}{3}(n-3)!-\cdots+(-1)^n\binom{n}{n-1}(n-(n-1))!+(-1)^{n+1}\binom{n}{n}(n-n)!$$

Aplicamos esta fórmula cuando el grupo es de 3 personas:

$$\begin{aligned}\#(\text{casos desfavorables}) &= \binom{3}{1}2! - \binom{3}{2}1! + \binom{3}{3}\\ &= \frac{3!}{1!2!}2! - \frac{3!}{2!1!}1! + \frac{3!}{3!} = 3!\left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!}\right) = 4.\end{aligned}$$

Es decir, los casos favorables son $6-4=2$ como habíamos verificado anteriormente.

Supongamos ahora que el grupo es de 4 personas, entonces tenemos

$$\begin{aligned}\#(\text{casos desfavorables}) &= \binom{4}{1}3! - \binom{4}{2}2! + \binom{4}{3}1! - \binom{4}{4}\\ &= \frac{4!}{1!3!}3! - \frac{4!}{2!2!}2! + \frac{4!}{3!1!}1! - \frac{4!}{4!} = 4!\left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!}\right) = 15.\end{aligned}$$

Los casos totales son $4! = 24$, entonces los favorables son 9 y

$$p(\text{ninguno recibe su propio regalo}) = \frac{9}{24} = \frac{3}{8} = 0,375 \sim 37,5\,\%.$$

Finalmente, cuando el grupo es de $n$ personas se tiene

$$\begin{aligned}\#(\text{casos desfavorables}) &= \binom{n}{1}(n-1)! - \binom{n}{2}(n-2)! + \cdots + (-1)^{n+1}\binom{n}{n}\\ &= \frac{n!}{1!(n-1)!}(n-1)! - \frac{n!}{(n-2)!2!}(n-2)! + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{n!}{n!}\\ &= n!\left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n!}\right).\end{aligned}$$

Como

$$\#(\text{casos favorables}) = \#(\text{casos totales}) - \#(\text{casos desfavorables})$$

se tiene que

$$\begin{aligned}\#(\text{casos favorables}) &= n! - n!\left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n!}\right)\\ &= n!\left[1 - \left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n!}\right)\right]\\ &= n!\left[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + (-1)^{n}\frac{1}{n!}\right].\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}p(\text{nadie recibe su propio regalo}) &= \frac{n!\left[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + (-1)^{n}\frac{1}{n!}\right]}{n!}\\ &= 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + (-1)^{n}\frac{1}{n!}\end{aligned}$$

y esta suma es la expansión en serie del inverso de un número muy importante: $e \approx 2,718281828459\ldots$

Tenemos que

$$e^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots + \frac{(-1)^n}{n!} + \cdots$$

y se puede verificar usando el teorema de Taylor que a partir de $n = 5$ la diferencia entre $e^{-1}$ y la suma $1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}$ es menor que $0,01$.

Luego, obtenemos que la probabilidad de que en un grupo de $n$ personas, con $n \geq 5$, a una persona le toque el regalo que compró es aproximadamente

$$\frac{1}{e} = 0,36787944117144\ldots \sim 36,78\,\%.$$

## §7. El mono y la máquina de escribir

Este es un problema clásico que plantea *calcular la probabilidad de que un mono tipee al azar, idealmente, una obra de la literatura, por ejemplo 'El Quijote', si lo intenta un número suficiente de veces*.

El planteo es que el mono comienza a tipear, en una computadora con M teclas, los caracteres de la obra, digamos que sean T en total. Se supone que hace un intento y otro sucesivamente repitiéndolo una y otra vez indefinidamente. Cada $T$ intentos el mono retoma la acción sin saber si ya cumplió su cometido. En el desarrollo no tenemos en cuenta el tiempo que le lleva hacer cada intento y se incluyen entre los caracteres, los espacios, acentos y otros símbolos necesarios en la obra.

Claramente, la probabilidad de acertar el primer carácter es $p_1 = 1/M$, la de acertar los dos primeros es $p_{1,2} = 1/M^2$ y así sucesivamente la probabilidad de acertar de entrada los $T$ caracteres de la obra es $p_{1,2,\ldots T} = 1/M^T$.

Para cada número natural $n$, dividamos en segmentos de longitud $T$ los intentos del mono, es decir, primero el segmento $1, 2, \ldots, T$, luego $T + 1, T + 2, \ldots, 2T$, y, en el paso $n$-ésimo, $(n - 1)T + 1, \ldots, nT$.

Supongamos hipotéticamente que el mono erra en alguno de sus primeros $T$ intentos de reproducir la obra y también en alguno de sus segundos $T$ y en alguno de los $n$-ésimos T y acierta en todo el siguiente, el $N + 1$-ésimo segmento. La probabilidad de que esto suceda es

$$p_N = \sum_{n=0}^{N} (1 - M^{-T})^n M^{-T} \tag{8.1}$$

ya que erra en los primeros $N$ intentos (con probabilidad $(1 - M^{-T})$) y acierta en el intento $N + 1$. Denotaremos desde ahora $p = M^{-T}$, por simplicidad.

Entonces

$$p_N := \sum_{n=0}^{N} \left(1 - M^{-T}\right)^n M^{-T} = p \sum_{n=0}^{N} (1 - p)^n = \frac{p(1 - (1 - p)^{n+1})}{1 - (1 - p)} = 1 - (1 - p)^{N+1}.$$

Esta es una serie geométrica de razón $1 - p < 1$, luego su suma cuando $N \to \infty$ es

$$p \sum_{n=0}^{\infty} (1 - p)^n = p \frac{1}{1 - (1 - p)} = 1,$$

lo que nos dice que en tiempo indefinido, con probabilidad 1, el mono logrará reproducir toda la obra.

Este resultado si bien es teóricamente correcto, carece de valor práctico pues el tiempo necesario para lograr el objetivo puede ser muy grande, incluso comparable a la edad de la tierra (unos $4.500$ millones de años) o de la del universo, estimada en $13.700$ millones de años.

Como vemos, es imprescindible, en todo cálculo probabilístico con un número creciente indefinido de intentos, poder estimar cuan rápido el valor parcial se aproxima a su valor límite.

## Comentarios

Cursillo dictado por los autores el 9/10/18 en el Instituto de Enseñanza Superior Simón Bolívar, Córdoba, destinado a estudiantes de Profesorado en Matemática.

**Agradecimientos.** Los autores desean agradecer a Juan Pablo Rossetti por la lectura completa del trabajo y por enviar algunas correcciones y varias sugerencias que ayudaron a mejorar la exposición del mismo.

## Referencias

Kisbye, Patricia, y Miatello, Roberto. (2004). Álgebra I – Matemática Discreta I. *Trabajos de Matemática, Serie C, FaMAF*.

Santaló, Luis A. (1955). La probabilidad y sus aplicaciones. *Editorial Iberoamericana, Buenos Aires*.

Székely, Gábor J. (2001). Paradoxes in Probability Theory and Mathematical Statistics . *Mathematics and its Applications. Reidel 1986, Springer Verlag 2001*.

Roberto J. Miatello
*Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación (FaMAF) – Universidad Nacional de Córdoba (UNC)*
(✉) *miatello@famaf.unc.edu.ar*

Angel D. Villanueva
*Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación (FaMAF) – Universidad Nacional de Córdoba (UNC)*
(✉) *villanueva@famaf.unc.edu.ar*

Recibido: *22 de mayo de 2018*.
Aceptado: *25 de julio de 2018*.
Publicado en línea: *21 de diciembre de 2018*.

## ¿Sabías que...

*por Leandro Cagliero y Ricardo Podestá*

***el área de las cuatro lúnulas rosadas es igual al área del cuadrado celeste?***

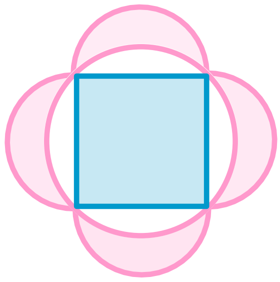


FIGURA 1

Este bonito y sorprendente resultado es conocido como la *cuadratura de las lúnulas de Hipócrates*. Contemos algo de su historia y veamos por qué es cierto.

Se conoce como *la cuadratura del círculo* al famoso problema que consiste en construir con regla y compás un cuadrado de la misma área que un círculo dado. Este problema tuvo ocupados a los matemáticos desde siempre, hasta que en el siglo XIX por fin se pudo demostrar que esto es imposible. Resulta que para lograr "cuadrar" el círculo de radio 1 es necesario construir con regla y compás el número $\sqrt{\pi}$, lo cual equivale a construir con regla y compás el número $\pi$, y esto es imposible. ¿Por qué?

En 1882 ya se sabía, desde hacía mucho tiempo, que si un número real $\alpha$ se puede construir con regla y compás, entonces hay un polinomio $p(x)$ **con coeficientes enteros** tal que $\alpha$ es raíz de $p(x)$, es decir que $p(\alpha) = 0$. En ese año, Lindemann y Weierstrass obtienen un resultado que implica que no existe ningún polinomio $p(x)$ con coeficientes enteros tal que $p(\pi) = 0$, con lo que queda probado que es imposible construir con regla y compás el número $\pi$, y por lo tanto es imposible cuadrar el círculo de radio 1. El Teorema de Lindemann y Weierstrass es profundo y un poco difícil. Aprovechamos para recordar que los números reales que son raíces de polinomios con coeficientes enteros se llaman **números algebraicos**, mientras que los que no lo son, se llaman **números trascendentes**.

El argumento anterior se resume en:

(1) Todo número construíble con regla y compás es algebraico.
(2) En 1982 Lindemann y Weierstrass demuestran que $\pi$ es trascendente.
(3) Es imposible cuadrar el círculo de radio 1 pues si se pudiera $\pi$ sería algebraico.

Por otro lado, Hipócrates de Quíos, intentando resolver la cuadratura del círculo, descubrió que las *lúnulas* se pueden "cuadrar". Éste, fue autor de un libro llamado *Elementos*, del cual no se conservan copias aunque otros documentos históricos (v. gr. Eudemo) dan cuenta de él. Se piensa que éste, y otros libros, han sido modelos de lo que luego fue el famoso 'Elementos' de Euclides. En dicho libro, Hipócrates demuestra un teorema que implica que la lúnula se puede cuadrar. Una versión muy elegante de éste es como sigue.

**Teorema.** ***En la Fig. 1, las cuatro lúnulas tienen la misma área que el cuadrado.***

La demostración es muy elegante y sólo utiliza el Teorema de Pitágoras que, en una de sus versiones, dice que dado un triángulo rectángulo, el área del semicírculo cuyo diámetro es la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de los semicírculos cuyos diámetros son cada uno de los catetos.

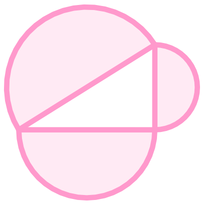
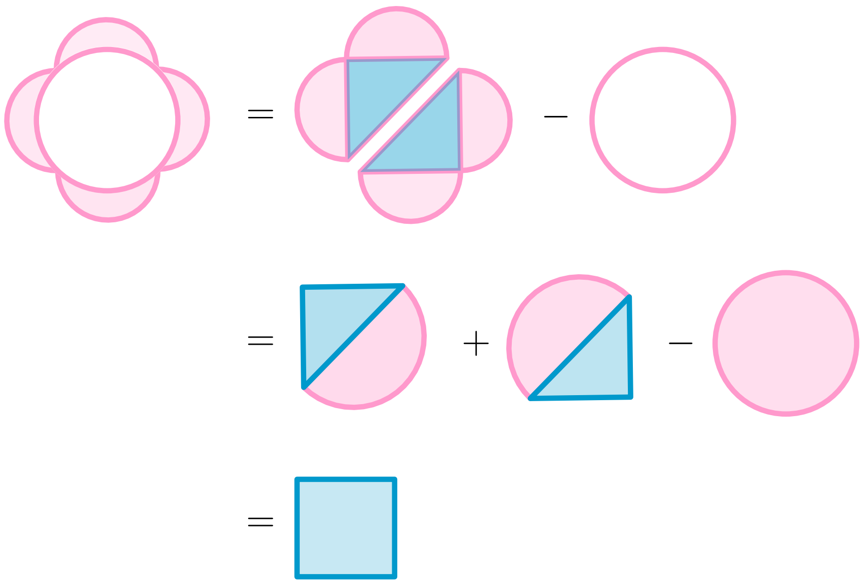


FIGURA 2. *Interpretación gráfica del Teorema de Pitágoras usando círculos.*

Utilizando esto, la prueba del teorema es inmediata.

*Demostración.*



□

¡¡Sin palabras!! Bellísima demostración que no utiliza palabras y nos deja sin ellas.

Hipócrates de Quíos fue un matemático, geómetra y astrónomo griego que vivió entre 470 – 410 a. C., aproximadamente 100 años antes de Euclides. De hecho, se lo considera el geómetra mas importante del siglo V a. C. Escribió una obra de carácter enciclopédico titulada *Elementos*, en el que expone teoremas a partir de unos axiomas y postulados (los cuales fueron incluidos por Euclides en su famosa obra del mismo nombre). Éste no debe ser confundido con su contemporáneo Hipócrates de Cos, el famoso médico de Antigua Grecia autor del Juramento Hipocrático.

# Sección de Problemas

☞ *por Juan Pablo Rossetti*

Los siguientes problemas están pensados para un público amplio. Las soluciones se encuentran en la página siguiente.

*Problema 1.* Adivinar un número. Un problema clásico consiste en adivinar un número entero $x$ entre 1 y $n$ con preguntas donde la respuesta es *sí* o *no*. Cada pregunta podría ser si $x$ es mayor que $\frac{n}{2}$ (o $\frac{n+1}{2}$ si $n$ impar), de modo de reducir el conjunto de valores posibles para $x$ a la mitad y así en $k$ pasos se puede saber el valor de $x$, donde $k$ es el único número entero tal que $2^{k-1} < n \leq 2^k$, es decir, $k$ es el menor entero mayor o igual que $\log_2(n)$.

Proponemos una modificación de este problema, donde también hay que adivinar un número entero $x$ entre 1 y $n$ con preguntas *¿es $x$ mayor que?* un cierto número entero, pero con la condición que no se podrá seguir preguntando cuando se obtiene una segunda respuestas *no*. Es decir, si hay dos respuestas *no* (no necesariamente consecutivas), entonces hay que ser capaces de adivinar el número sin realizar más preguntas.

*¿Se puede adivinar el número $x$? ¿Cuántas preguntas se necesitan? ¿Cómo es la estrategia para llegar al mínimo de preguntas necesarias?* Un caso concreto es cuando $n = 100$. *¿Cuántas preguntas se necesitan en este caso?*

---

*Problema 2.* Volumen de una caja. Hallar el máximo volumen de una caja hecha a partir de un cartón cuadrado de 60 cm por 60 cm al recortarle cuatro cuadrados iguales, uno en cada esquina, y doblar los lados del cartón hacia arriba de modo de formar una caja sin tapa.

---

*Problema 3.* Progresión aritmética de primos. Hallar un progresión aritmética de siete números naturales que sean primos. Es decir, hallar $a$ y $b$ naturales de modo que $a$, $a+b$, $a+2b, \ldots, a+6b$ sean todos números primos. *Hallar la progresión de modo que $a+6b$ sea lo menor posible.*

---

*Problema 4.* Reparto de premios. En un juego, dos personas tiran la moneda al azar, y el primero que llega a 6 aciertos, gana $x$ pesos. Cuando van 5 a 3, se interrumpe el juego, y no se va a poder continuar, de modo que un jurado deberá decidir cómo dar el premio, de la manera más justa. Quien iba ganando, quiere que le den todo el premio a él. El otro, quiere que repartan mitad y mitad. Alguien propone dar cinco octavas partes del premio a quien llevaba 5 aciertos y tres octavas partas e quien llevaba 3 aciertos. Por suerte en el jurado hay una profesora de matemática y se da cuenta que lo más justo, sería repartir el premio, de acuerdo a las probabilidades de triunfar de cada uno. *¿Cómo se debería repartir entonces el premio?* [Ayuda: leer el artículo sobre Probabilidades en este mismo número!]

## SOLUCIONES

*Solución 1.* Sí, claramente se puede llegar al valor de $x$. Una estrategia, lenta pero válida, sería preguntar si $x$ es mayor que uno. Si la respuesta es no, entonces $x = 1$; si la respuesta es sí, entonces preguntamos ¿es $x$ mayor que 2?, y así, seguimos, hasta que nos digan que no. Esta estrategia es muy ineficiente y podríamos necesitar hasta $n - 1$ preguntas. Mejor es elegir un número $k$ que sea aproximadamente la raíz cuadrada de $2n$ y preguntar ¿es $x > k$? Si la respuesta es no, entonces tendremos que empezar a subir desde el $1$ hasta el $k - 1$, uno por uno, hasta obtener el segundo no. Si la respuesta a ¿$x > k$? es sí, entonces pasamos a preguntar ¿es $x > 2k-1$? Ahora procedemos de manera análoga: si la respuesta es *no*, comenzamos a subir desde $k + 1$, de a uno, en caso contrario, preguntamos ¿es $x > 3k - 3$?, y así continuamos, con preguntas ¿es $x > tk - \frac{t(t-1)}{2}$? Esto da una solución utilizando $k$ preguntas, cuando $n \leq k(k + 1)2 + 1$.

Para ser más precisos, con $k$ preguntas podemos adivinar un número que está entre 1 y $n$ donde $n \leq \frac{k(k+1)}{2}+1$. El caso en que $n = 100$, se ve que $k$ debe ser 14.

*Solución 2.* Los cuadrados que se recortan en las esquinas son de 10 cm x 10 cm, la caja que se arma es de base cuadrada de 40 cm de lado y de alto 10 cm, por lo tanto, su volumen es 16 mil cm$^2$.

Para justificarlo, se pueden usar la desigualdad entre las medias geométrica y aritmética; o hallar el máximo con derivadas (sería de la función cúbica $f(x) = x^2(60 - x)$ para $x$ que satisface $0 \leq x \leq 60$).

*Solución 3.* La respuesta es $a = 7$, $b = 60$, por lo que $a + 6b = 367$.

Notemos que $b$ tiene que tener en su descomposicion en primos al 2, al 3, al 5, de lo contrario, entre los primeros 2 términos de la progresión habrá uno que es múltiplo de 2 (y si $a$ =2, entonces el 3er término de la progresión será un número par compuesto). Un análisis similar se puede hacer con el 3 y con el 5. De modo que $b$ debe ser múltiplo de 2, 3 y 5. Con el 7, sucedería algo similar: si $b$ no es múltiplo de 7, cada siete elementos de la progresión, habrá un múltiplo de 7. Pero justo podemos tomar $a = 7$. El intento con $a = 7$ y $b = 30$ falla pues $187 = 11 \cdot 17$. Por lo que hay que aumentar $b$ al doble.

*Solución 4.* Le tocará $7/8$ del premio al que marcha primero y solo $1/8$ al otro. Esto surge de analizar las probabilidades de ganar que tendrían ambos en caso de que el juego continuare.

## ¡Sucesiones al toque!

¿Cuál creés que es el próximo número en las siguientes sucesiones y por qué? ¿Te animás a encontrar más términos de estas sucesiones?

$$\{a_n\}: \quad 1, 5, 7, 17, 31, 65, 127, 257, \ldots$$

$$\{b_n\}: \quad 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 2, 4, 4, 3, 5, 5, 3, 6, 6, 4, 7, 7, 4, 8, 8, 5, \ldots$$

$$\{c_n\}: \quad 10, 5, 13, 10, 16, 15, 19, 20, 22, 25, \ldots$$

$$\{d_n\}: \quad 4, 6, 12, 18, 30, 42, 60, 72, 108, \ldots$$

No se sabe si la última sucesión es infinita o no, se espera que sí. Ayuda: tiene que ver con los números primos.

Podés encontrar las soluciones en la página 75.

# Reseña de libro

*por Dilma Fregona*

• ***La escuela construye aprendizajes. Experiencias y propuestas para la enseñanza de Matemática y Ciencias Naturales***
GONZALO GUTIÉRREZ, AGUSTINA ZAMANILLO Eds.


Unión de Educadores de la Provincia de Córdoba
1ª edición, 2017, 173 páginas.
ISBN 978-987-46201-4-9

EL libro es el segundo de la serie *"La escuela construye…"* donde el Instituto de Capacitación e Investigación de los Educadores de Córdoba (ICIEC), de la Unión de Educadores de la Provincia de Córdoba, hace visible ideas y experiencias que alimentan el trabajo docente. En este caso se presentan relatos de enseñanza en Ciencias Naturales y Matemática, dos de ellos corresponden al nivel inicial y cinco al primario y fueron presentadas en el IV Concurso de Experiencias Pedagógicas *"De Boca en Boca"*, organizado por el ICIEC entre noviembre de 2015 y abril de 2016.

Acompañan los relatos de esas experiencias, otros textos que dialogan con ellos y proponen algunas pistas para interpretar o enmarcar parte de los procesos desplegados en las propuestas que reúnen docentes y estudiantes, miembros no solo de la comunidad educativa sino también de otras instituciones. Los proyectos recogen la participación de padres de alumnos de los establecimientos involucrados y de su personal directivo, vecinos, comerciantes, funcionarios municipales, radios locales, profesionales en diferentes áreas (técnico en bromatología; ingeniero agrónomo; profesores de tecnología, educación física, música; etc.).

EN MI opinión este es un libro para que los docentes en actividad o en la formación inicial lo estudien, es decir lo discutan, lo analicen… Invita a reflexionar sobre los conocimientos que circulan en las escuelas o en las aulas, en diferentes contextos, a través de experiencias que dan cuenta de que es posible *"jugar otro juego"* en la escuela como afirma Sadovsky[1], y esto precisamente en relación con los conocimientos.

Las experiencias relatadas están acompañadas por una ficha didáctica que intenta presentar de un modo breve los principales contenidos abordados, los objetivos, las actividades que se desarrollaron y los recursos con los que se implementaron. Esa información no es suficiente para reproducir en otros contextos esas experiencias, no son modelos a copiar y trasladar, por eso es necesario estudiarlas… para identificar las condiciones que hicieron posible tales experiencias, tanto en su realización como en su difusión, y reflexionar sobre ellas. Las referencias bibliográficas en cada capítulo sustentan decisiones tomadas en la escritura, que seguramente son el reflejo de las decisiones tomadas en la ejecución. El texto da cuenta de una selección de experiencias, pero seguramente hay docentes y establecimientos con muchas otras propuestas que se realizan en diferentes contextos y de las cuales no tenemos información.

Otro aspecto que me parece muy importante es que se revaloriza la escuela como tal, en su función formativa… Algunas tendencias actuales tienden a mostrar que todo lo interesante con respecto al conocimiento se hace fuera del horario escolar, inclusive en otros espacios físicos como para alejarse de la regulación curricular y la relación monumentalista con el conocimiento. En los diferentes capítulos hay referencias a los diseños curriculares, las propuestas no intentan mostrar cuestiones extracurriculares sino que trabajan sobre apropiaciones de esas regulaciones que son altamente formativas para los alumnos, eventualmente la comunidad y fundamentalmente para los mismos docentes como sujetos responsables del trabajo de enseñar. En las tareas involucradas en el diseño, implementación y comunicación del proceso realizado, los autores se han enfrentado con desafíos y puntos de encuentro entre prácticas de investigación y prácticas docentes, y eso sin duda es enriquecedor.

Advierto que hay una perspectiva compartida con respecto al conocimiento en Ciencias Naturales y en Matemática, y esto se refleja en diferentes niveles de análisis:

- las ciencias naturales, y la matemática, son consideradas como productos culturales y sociales, esto genera un movimiento hacia la producción de conocimiento en las aulas, a través de diferentes actividades que efectivamente corresponden a aprendizajes relativos a los objetos matemáticos,
- los conocimientos son tratados desde una perspectiva funcional más que cultural, es decir que se usan para tomar decisiones, para explorar el entorno, para modelizar situaciones de la vida diaria o que son de interés para el grupo. Así, el conocimiento se convierte en un medio para describir, analizar y ampliar la comprensión de diferentes situaciones,
- la comunicación, verbal o escrita, es de gran importancia tanto al interior de las clases, como en las relaciones con la comunidad.

[1] Sadovsky, P. (2005). Enseñar matemática hoy. Miradas, sentidos y desafíos. Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Finalmente, quisiera valorar la experiencia del ICIEC de diseñar y llevar adelante un proyecto en el cual se trabaja con los docentes, y no sobre los docentes o para los docentes, y que recupera las voces de actores que ocupan diferentes posiciones en el sistema educativo. En particular, en tiempos en que se desprestigia el trabajo docente con ligeras interpretaciones de los resultados obtenidos en nuestro país en evaluaciones nacionales e internacionales, las experiencias mostradas en este libro evidencian la diversidad de aprendizajes posibles y la imposibilidad de capturarlos en una prueba estandardizada.

*Nota.* El libro está disponible digitalmente en

http://www.uepc.org.ar/conectate/wp-content/uploads/2018/04/Libro-la-escuela-construye-Cs-Mat-.pdf

---

**Soluciones de ¡sucesiones al toque!**

- $a_9 = 511$. Pues el término general es $a_n = 2^n + (-1)^n$.
- $b_{26} = 9$. Sigue así: 9, 9, 5, 10, 10, 6, etc. Si ponemos cuatro objetos en fila, digamos A, B, C, D, y vamos del extremo A al D, y volvemos de D a A, sin repetir los extremos, tendríamos el siguiente recorrido: A B C D C B A B C D C B A B C D... Nuestra sucesión cuenta las veces que se ha pasado por cada letra.
- $c_{11} = 25$. Sigue el 25, luego el 30, etc. Son dos progresiones artiméticas intercaladas. La primera empieza en el 10 y va sumando de a 3, la segunda empieza en el 5 y va sumando de a 5.
- $a_{10} = 138$. Son los números encerrados entre dos primos gemelos, es decir primos $p$ tales que $p + 2$ también es primo. Los primeros pares de primos gemelos son $(3, 5)$, $(5, 7)$, $(11, 13)$ y $(17, 19)$. No se sabe si es infinita, puesto que ¡aún no se ha demostrado que hay infinitos primos gemelos!

Viene de la página 72.