

Revista de Educación Matemática

Consejo Editorial

Editor Ejecutivo

Leandro Cagliero, FAMAF, Universidad Nacional de Córdoba - CONICET, Argentina

Editores Asociados

Juan Carlos Pedraza, Universidad de Buenos Aires, Argentina

Mónica Villarreal, FAMAF, Universidad Nacional de Córdoba - CONICET, Argentina

Comité Editorial

Abraham Arcavi, Weizmann Institute of Science, Israel

Susana Paula Graça Carreira, Universidade do Algarve, Portugal

Cristina Esteley, FAMAF, Universidad Nacional de Córdoba, Argentina

Patricio Herbst, Universidad de Michigan, Estados Unidos

Teresa Krick, Universidad de Buenos Aires - CONICET, Argentina

Ricardo Podestá, FAMAF, Universidad Nacional de Córdoba - CONICET, Argentina

Nélia Maria Pontes Amado, Universidade do Algarve, Portugal

Juan Pablo Rossetti, FAMAF, Universidad Nacional de Córdoba - CONICET, Argentina

Jhony Alexander Villa-Ochoa, Universidad de Antioquia, Colombia

Registro Nacional de la Propiedad Intelectual N° 168024

ISSN 0326-8780 (versión impresa)

ISSN 1852-2890 (en línea)

Página web: <https://revistas.unc.edu.ar/index.php/REM/index>

Correo electrónico: revm@famaf.unc.edu.ar

Revista de Educación Matemática

Volumen 34, N° 2 – 2019

ÍNDICE

- Editorial 3

ARTÍCULOS

- **EL MÉTODO DE LILL PARA EVALUAR POLINOMIOS**
Javier Pedro García 5
- **ACTITUDES HACIA LA MATEMÁTICA: ALGUNAS CONSIDERACIONES
EN SU RELACIÓN CON LA ENSEÑANZA Y EL APRENDIZAJE**
*Claudia Patricia Orjuela, Rubinsten Hernández Barbosa,
Luis Miguel Cabrera González* 23
- **PROBABILIDADES EN EL JUEGO DEL TRUCO**
Emiliano Gómez 41

-
- Sección de Problemas 69
-

También encontrarás curiosidades bajo los títulos *¿Sabías que...?* y *¡Sucesiones al toque!*

Editorial

SEMANAS atrás, el matemático Hao Huang de la Universidad de Emory de Estados Unidos, probó la llamada conjetura de la sensibilidad; un problema importante de la teoría de la complejidad computacional, formulado en 1989 por Noam Nisan y Mario Szegedy.

Llamó mi atención que Huang necesitara apenas un par de páginas de argumentación, reduciendo un problema que venía resistiendo el intento de expertos, a uno más sencillo y entendible, incluso para no especialistas. La anécdota se completa diciendo que Huang resolvió el problema refugiado en un hotel de Madrid, en una breve estadía durante la intensa ola de calor que castigó a Europa este año.

No interesa aquí ahondar en qué consistía la conjetura, ahora teorema, ni por dónde transitó la solución aunque ambas cuestiones han llegado a la primera plana de algunos periódicos y portales del mundo. Baste decir que el resultado compara el grado de sensibilidad de una regla de decisión (máximo número de datos a los que una regla puede ser sensible a cambiar) y la complejidad de preguntas de dicha regla de decisión.

¿Por qué demoró 30 años la respuesta si la misma era, si no elemental, accesible para muchos? Nos podemos imaginar, como en otras ocasiones de la historia, que una mirada distinta, una pregunta no formulada hasta entonces, pudo ser la llave que le permitió llegar a la solución.

Salvando las distancias en el tiempo y en la importancia del resultado, podemos recordar a un adolescente que, en lugar de buscar como otros, un patrón que permitiera predecir cuál sería el siguiente número primo, decidió atacar el problema desde otro ángulo: se preguntó cómo estaban distribuidos los esquivos números primos. Esto lo llevó a ver y a conjeturar que mientras que entre los primeros diez números casi la mitad eran primos, entre los primeros cien eran una cuarta parte, entre los primeros mil solo una sexta parte aproximadamente lo eran y así sucesivamente. El joven adolescente era nada menos que Gauss y hubo que esperar poco más de cien años para que esta conjetura fuera probada por J. Hadamard y C.J. de la Vallée Poussin. Tanto o más trascendente es el ejemplo de Galois que, inflamado por los trabajos de N. Abel, que había establecido que existen ecuaciones quinticas

que no pueden resolverse por radicales, decidió dar un paso más, cambiar la pregunta: si algunas quinticas no son resolubles pero otras sí lo son, ¿qué distingue a un grupo de otras? La pregunta revolucionó la matemática y una teoría nueva impactó la ciencia durante todo el siglo XX y aún hoy sigue produciendo nuevos descubrimientos.

Por supuesto que el relato de estos casos están aquí simplificados deliberadamente. Todos ellos están insertos en su correspondiente contexto histórico y político y cada uno de los protagonistas, parafraseando a Newton, se subieron a los hombros de otros matemáticos para ver más allá.

El célebre profesor de lógica Arthur Seldom, protagonista de la novela *Los crímenes de Alicia* de nuestro colega Guillermo Martínez, se pregunta un tanto angustiado *¿cuánto de lo que pensamos y conjeturamos y abandonamos queda a la distancia de una vuelta más, de una intuición afortunada, de un truco de cálculo?* El nuevo enfoque de Gauss, la pregunta distinta de Galois, tal vez la otra mirada de Huang en el verano español...

LAS reflexiones que generan esta pregunta trascienden la matemática y nos interpelan en cómo entendemos el entorno que nos circunda y los problemas que enfrentamos cotidianamente como individuos y como sociedad. Decía G. Polya que la resolución de un problema (en fin, hacer matemática) no es un asunto puramente intelectual. La determinación, la tenacidad y las emociones juegan un papel fundamental, haciendo de la Matemática, contrariamente a lo que se suele creer, una ciencia humana por excelencia.

En este número, uno de los artículos reflexiona sobre la actitud hacia la matemática y su impacto en la enseñanza. Un exhaustivo artículo que estudia las chances en el popular juego de El Truco, vincula, una vez más, al juego con la matemática. La matemática siempre es un juego, aunque es muchas cosas más decía el catedrático español Miguel de Guzmán. También se encontrarán con un sorprendente método para encontrar geoméricamente ceros de polinomios. Las secciones habituales de *¿Sabías que?* y de *Problemas* completan el presente número. Esperamos que su lectura, estimule nuevas preguntas y nuevos desafíos.

Juan Carlos Pedraza

NOTA: Es muy importante para la RevEM contar con la colaboración de ustedes a través del envío de contribuciones de calidad para publicar. Solicitamos enviar los artículos preferentemente a través del sistema en la página web, pero si tienen inconvenientes pueden hacerlo a la dirección de correo electrónico que figura abajo.

Página web: <https://revistas.unc.edu.ar/index.php/REM/index>

Correo electrónico: revm@famaf.unc.edu.ar

EL MÉTODO DE LILL PARA EVALUAR POLINOMIOS

Javier Pedro García

RESUMEN. Si bien el tópico *Polinomios* es clásico en la escuela secundaria y pareciera estar agotada la posibilidad de nuevos abordajes, aún queda mucho por decir. En este sentido, en el presente escrito mostramos una forma muy interesante de interpretar la evaluación de polinomios en términos gráficos, conocida como el *método de Lill*. Este método sorprende tanto por su elegancia como por la novedad que representa (aún cuando haya surgido en la segunda mitad del siglo XIX), así como por la riqueza de contenidos matemáticos que se entrelazan en su desarrollo: el algoritmo de división, la regla de Ruffini o de Horner, la geometría y las funciones trigonométricas.

ABSTRACT. While the topic *Polynomials* is classic in high school and the possibility of new approaches seems to be exhausted, much remains to be said. In this sense, in this paper we show a very interesting way to interpret the evaluation of polynomials in graphical terms, known as *Lill method*. This method surprises both for its elegance and the novelty it represents (even when it emerged in the second half of the nineteenth century), as well as for the many mathematical contents intervening in its development: the division algorithm, Ruffini or Horner's rule, geometry and trigonometric functions.

§1. La sorpresa inicial

La idea de utilizar un gráfico para estimar las raíces de un polinomio parece desde el vamos una idea original. Y fue el ingeniero austríaco Eduard Lill quién en 1867 desarrolló un método para hacerlo: mediante el simple trazado de dos poligonales podemos estimar la evaluación de un polinomio f en un número real x . Tomemos, por ejemplo, el polinomio $f = 2x^3 + 3x^2 + 5x + 6$. Queremos evaluar f en $x = -1$. En la Figura 1 presentamos la idea de Lill. La primera poligonal (la de trazo grueso) representa, en un sentido que precisaremos, al polinomio f : la longitud de cada uno de sus segmentos coincide con los coeficientes de f . La segunda poligonal (la de trazo punteado) representa el hecho de que queremos evaluar en $x = -1 = \tan(-45^\circ)$. La distancia entre los extremos finales de cada una

Palabras clave: representación de polinomios, método de Lill, regla de Horner.

Keywords: polynomials representation, Lill's method, Horner's rule.

de las poligonales es igual a 2. Si calculamos $f(-1)$ como lo hacemos usualmente, obtenemos $f(-1) = -2 + 3 - 5 + 6 = 2$. ¿Será una casualidad?

Es de imaginar que no lo es. Teniendo en cuenta que la función $\tan x$ definida de $(-\pi/2, \pi/2)$ en \mathbb{R} es biyectiva, cada número real x puede identificarse con un cierto ángulo θ ($x = \tan \theta$) y, de esta manera, para cada $x \in \mathbb{R}$ se construye la segunda poligonal: la misma comienza con el trazado de una semirrecta que forma un ángulo θ con el eje x . Midiendo de manera apropiada la distancia entre los extremos finales de las poligonales podremos calcular el valor de $f(x)$.

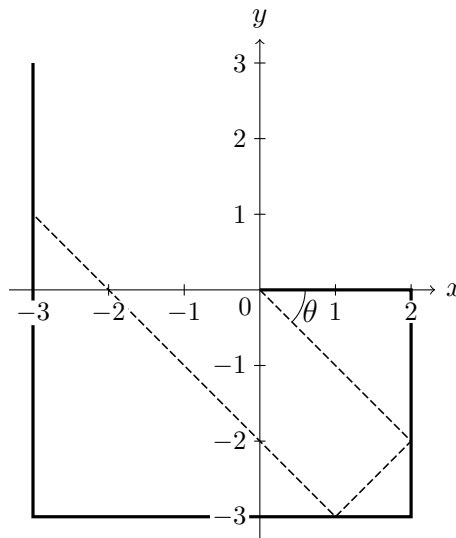


FIGURA 1. Las dos poligonales para f , y su interpretación; $\theta = -45^\circ$, $f(-1) = 2$

Por supuesto, el entramado que subyace detrás de este ejemplo introductorio es de una riqueza que vale la pena explorar. ¿Cómo es que funciona? ¿Cuáles son las ideas que lo inspiran? Esperamos que el discurrir del texto nos permita responder las preguntas formuladas. Y esperamos también que el lector experimente, al igual que nosotros, la sorpresa que nos abordó la primera vez que conocimos este método: cómo los polinomios aún constituyen un concepto con un gran potencial para comprender mejor la matemática escolar.

§2. Representación de polinomios

Existe un puente que va desde el álgebra a la geometría y está vinculado a las formas en las que expresamos los polinomios, específicamente a una forma en particular: la llamada *forma de Horner*. Esto nos lleva directamente, a tratar este tema con dedicación.

Cuando de polinomios se trata, desde el primer momento es común escribirlos como

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

Esta es la definición inicial, aunque no hay que perder de vista que no es la única forma de representar un polinomio. Nos interesa entablar una primera discusión con respecto a este punto.

Un ejemplo típico se da en el contexto del trabajo con funciones cuadráticas o, también, polinomios de grado 2. Cuando se consideran, suelen clasificarse atendiendo a la información que proporciona cada una de las escrituras:

$$f = ax^2 + bx + c \quad \text{“forma polinómica”}$$

$$f = a(x - x_0)^2 + y_0 \quad \text{“forma canónica”}$$

$$f = a(x - x_1)(x - x_2) \quad \text{“forma factorizada”}$$

Aunque siempre nos estemos refiriendo al mismo polinomio f , la palabra *polinómica* aparece sólo en la primera expresión. ¿Acaso f no es un polinomio independientemente de la forma en que se escriba? En función de la definición inicial, nuestra percepción de un polinomio está sesgada por la representación $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, que bien podríamos llamar *forma descendente*.

La forma factorizada puede extenderse a otros polinomios más allá de los cuadráticos, por supuesto, entendiéndola en un sentido más amplio: interviene aquí el estudio de la factorización de un polinomio en *factores irreducibles* sobre un anillo de polinomios $\mathbb{K}[x]$, donde \mathbb{K} es un cuerpo (ver (Childs, 2009), Part IV, ch. 14). Así, la identidad

$$x^4 + x^3 - 3x^2 - x + 2 = (x + 1)(x + 2)(x - 1)^2,$$

muestra las formas descendente y “factorizada” como producto de irreducibles para el mismo polinomio. Las comillas pretenden indicar que cuando factorizamos polinomios, tenemos que tener especial cuidado con la noción de factor irreducible ya que no es una noción intrínseca: el carácter de irreducible depende del anillo de polinomios $\mathbb{K}[x]$. Si no tomamos este recaudo, la escritura de un polinomio como producto de factores no está bien definida. Por ejemplo, también podríamos expresar el polinomio de arriba en la forma

$$x^4 + x^3 - 3x^2 - x + 2 = (x^2 - 1)(x - 1)^2.$$

Entendemos esta discusión como una oportunidad para poner de manifiesto la flexibilidad que poseen los polinomios a la hora de escribirlos, en contraste con su usual representación en forma descendente. Sin embargo no es en vano la popularidad de la que goza esta forma.

Ciertamente, la representación en forma descendente es la más adecuada para tratar con la mayoría de los problemas o propuestas escolares. Una de las situaciones que requieren de esta representación es la famosa *regla de Ruffini*. Los libros escolares la presentan como un *método* para dividir un polinomio f por un polinomio de la forma $x - a$. Más aún, se invoca este método casi exclusivamente en el caso en que a es una raíz del polinomio f .

En el Cuadro 1 recordamos el procedimiento: calculamos el cociente y el resto de la división de $f = 5x^3 - 4x^2 + 7x + 2$ por $x - 2$. El método nos dice que los números obtenidos en la última fila, son los coeficientes del cociente expresado en forma descendente y que el último número, en este caso **40**, es el resto de la división.

2	5	-4	7	2
		10	12	38
	5	6	19	40

CUADRO 1. Regla de Ruffini

Lo que no resulta del todo claro en los textos escolares es que la regla de Ruffini es una forma abreviada del algoritmo de división usual, que se basa también en la forma descendente de los polinomios. Dedicemos entonces un espacio a explicitar el modo en que la regla de Ruffini se deduce del algoritmo de división. Si hubiésemos hecho *la división extendida* tendríamos una situación como la de la Figura 2. Si prestamos atención a los coeficientes en rojo, obtenemos la regla de Ruffini:

$$\begin{array}{r}
 5x^3 - 4x^2 + 7x + 2 \\
 - \\
 5x^3 - 10x^2 \\
 \hline
 6x^2 + 7x + 2 \\
 - \\
 6x^2 - 12x \\
 \hline
 19x + 2 \\
 - \\
 19x + 38 \\
 \hline
 40
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 \overline{) x - 2} \\
 5x^2 + 6x + 19
 \end{array}$$

FIGURA 2. Algoritmo de división y regla de Ruffini

Una observación esencial es que, como consecuencia del algoritmo de división en el caso particular en que se divide por el polinomio $x - a$, obtenemos que el resto de la división coincide con $f(a)$ (ver (Childs, 2009), Part IV, ch. 14). Usaremos este hecho más adelante. Reiteramos un detalle no menor: los procedimientos son consecuencia de expresar los polinomios en forma descendente.

Nos interesa presentar a continuación una nueva forma de representar polinomios que se desprende de la regla de Ruffini. Veremos, con sorpresa, que siempre estuvo a nuestro alcance. Focalicemos nuestra atención en la secuencia de operaciones realizadas en el Cuadro 1. Comenzamos *bajando* el 5, luego multiplicamos por 2 y sumamos el resultado al segundo coeficiente; multiplicamos por 2 y sumamos el tercer coeficiente; multiplicamos por 2 y así sucesivamente. La secuencia de cálculos es la siguiente:

$$((5 \cdot 2 + (-4)) \cdot 2 + 7) \cdot 2 + 2.$$

Si en lugar de considerar $x = 2$, pensamos esta secuencia con un número real arbitrario x , la expresión de la sucesión de operaciones sería:

$$(2.1) \quad ((5x + (-4))x + 7)x + 2.$$

¿Qué sucede si expandimos esta secuencia de cálculos? Obtenemos la representación descendente del polinomio.

$$(2.2) \quad \begin{aligned} ((5x - 4)x + 7)x + 2 &= (5x^2 - 4x + 7)x + 2 \\ &= 5x^3 - 4x^2 + 7x + 2. \end{aligned}$$

Reflexionemos un poco sobre lo que hemos hecho. Por un lado, pasamos de la representación descendente de f a una nueva representación que surge de rastrear las operaciones realizadas en el método de Ruffini. Por otro, y es consecuencia de saber que estamos haciendo una división muy particular, es posible calcular por ejemplo, $f(2)$ (o $f(a)$ para un número real a arbitrario) de una forma particular, pues según lo que hemos observado anteriormente, la expresión (2.1) nos conduce a $f(a)$ cuando $x = a$. Vale la pena destacar que la forma (2.1) puede ser alcanzada sacando factor común x sucesivamente, por lo que también tenemos una forma de obtenerla prescindiendo de Ruffini, aunque lo que buscamos con este análisis es todo lo contrario: estamos de alguna forma, redescubriendo Ruffini. Esta forma de representar un polinomio, se llama *forma de Horner*.

Este enfoque contrasta con el modo usual de evaluar un polinomio f o, más aún, una función arbitraria. En efecto, nuestra *experiencia* nos conduce a reemplazar cada ocurrencia de x por el valor numérico de interés. Esto armoniza con el sentido funcional de f : visto como una función en la variable x , para calcular $f(x)$, reemplazamos cada ocurrencia de x por el valor en cuestión. Sin embargo, en el caso de polinomios, es posible considerar una forma de evaluar más relevante desde lo computacional. Es más sencillo utilizar la regla de Ruffini que la forma usual. Al observar la secuencia de cálculos (2.1) dos cosas son evidentes: no hay exponentes y la cantidad de multiplicaciones realizadas es menor. Por esto mismo es que a la evaluación de un polinomio mediante esta forma se la conoce como *evaluación rápida*. En nuestro camino hacia el método de Lill nos encontraremos con la forma de Horner de manera natural.

§3. El Método de Lill

El método de Lill encierra una forma de representar geoméricamente un polinomio y, al mismo tiempo, de aproximar sus raíces gráficamente. Dado un polinomio f , le asociamos una poligonal, que llamaremos S -poligonal, cuya construcción

consiste en trazar un segmento por cada coeficiente de f , comenzando por el coeficiente principal y continuando en forma descendente hasta el coeficiente constante, tal como se describe a continuación.

Comenzamos por el origen y trazamos un segmento de longitud igual al coeficiente principal sobre la parte positiva del eje x . Dibujamos luego un segmento perpendicular a este, de longitud igual al valor absoluto del coeficiente que le sigue en grado. La convención es dibujarlo *hacia la derecha* si el coeficiente tiene el mismo signo del coeficiente anterior, o *hacia la izquierda* si el signo es diferente. Esto se puede apreciar en la Figura 3: en este caso se produce un giro hacia la derecha, mientras que en el caso de la Figura 4, corresponde girar hacia la izquierda. Este mecanismo se repite con cada coeficiente de f , hasta llegar al coeficiente constante. Así obtenemos la S -poligonal (en negrita en ambos casos).

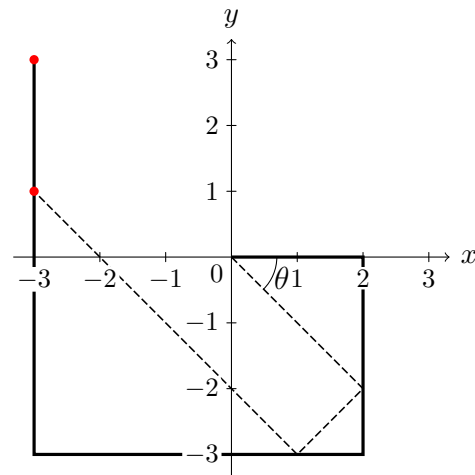


FIGURA 3. $f = 2x^3 + 3x^2 + 5x + 6$,
 $\theta = -45^\circ$, $f(-1) = 2$

A continuación se construye una segunda poligonal, que llamaremos T -poligonal, en función de la cantidad $f(a)$ que se pretende estimar, siendo a un número real arbitrario. Consideramos el ángulo θ en el intervalo abierto $(-\pi/2, \pi/2)$ tal que $\tan \theta = a$ y trazamos el primer segmento de T desde el origen hasta la intersección con el segundo segmento de S o su prolongación, en caso de ser necesario. Para determinar el segundo segmento de T , giramos 90° de manera tal que trazando una recta cortemos al tercer segmento de S o a su prolongación. El segundo segmento de T será entonces el que comienza donde termina el primer segmento ya construido, y termina donde dicha recta corta al segmento de S mencionado. Repetimos este proceso hasta cortar al último segmento de la S -poligonal. La poligonal resultante será T , que hemos representado en línea punteada.

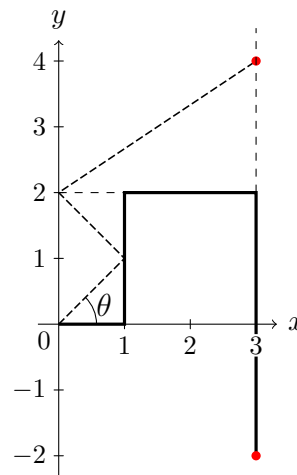


FIGURA 4. $f = x^3 - 2x^2 - 2x - 4$,
 $\theta = -45^\circ$, $f(1) = -6$

El método de Lill nos dice entonces que la distancia entre los extremos de las poligonales, *medida convenientemente*, coincide con $f(a) = f(\tan \theta)$. En las Figuras precedentes observamos dos ejemplos de esta situación.

¿Cómo se calcula $f(\tan \theta)$ entonces? Debemos medir la distancia entre los extremos de las poligonales S y T en relación a la **orientación** del último segmento de S y el signo del coeficiente de f con el cual se corresponde. Por ejemplo, en la Figura 3, el último segmento de S corresponde al coeficiente $+6$, y está orientado de abajo hacia arriba en el trazado de la poligonal. La poligonal T , termina en el punto $(-3,1)$ y para medir la distancia con el extremo de S , debemos ir en la misma dirección de este segmento (de abajo hacia arriba) una cantidad de 2. Entonces esa magnitud tendrá el mismo signo que $+6$, es decir, $f(\tan -45^\circ) = f(-1) = 2$. Podemos verificarlo evaluando: $f(-1) = 2$. En la Figura 4, la distancia entre los extremos de las poligonales es igual a 6, y la medición nuevamente coincide con el sentido del segmento, que en este caso se corresponde con el coeficiente negativo -4 . Luego $f(\tan \theta) = f(1) = -6$.

Veamos ahora el trazado de las poligonales en un ejemplo con más cambios de signo. Consideramos el polinomio $f(x) = 3x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 5x + 2$. Para calcular $f(-1)$, obtenemos las poligonales de la Figura 5. La distancia entre sus extremos es 5, y el sentido de la medición es contrario al sentido del último segmento de S , que se corresponde con el coeficiente positivo $+2$. Por lo tanto $f(\tan \theta) = f(-1) = -5$.

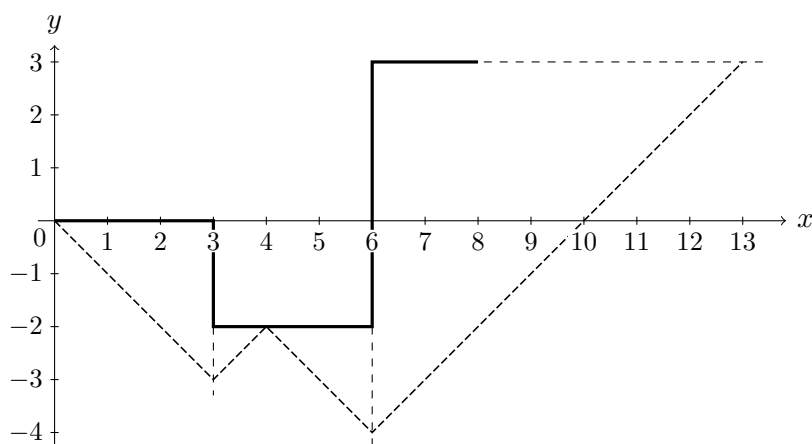


FIGURA 5. $f = 3x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 5x + 2$, $\theta = -45^\circ$, $f(-1) = -5$

Hasta aquí, hemos visto la operatoria con la que se rige este método. Estamos en condiciones de profundizar un poco más e intentar dilucidar la matemática subyacente.

3.1. Un esbozo de demostración. Por diversos motivos, el método de Lill ha pasado desapercibido a lo largo de los años, aunque hay diversos textos que lo han presentado. El texto de Turnbull (Turnbull, 1947, ch. 2, sec. 15) dedica una sección a su tratamiento. Un texto más moderno es el de Dan Kalman (Kalman, 2009, ch. 1, sec. 3). Si bien los textos difieren en la forma de encarar la construcción de las poligonales, tienen como denominador común realizar un primer acercamiento al

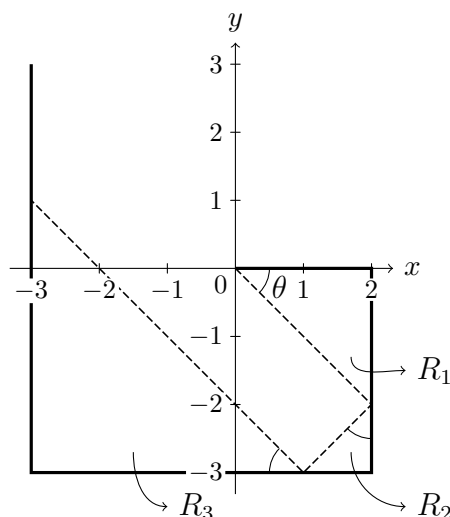


FIGURA 6. $f = 2x^3 + 3x^2 + 5x + 6$, $\theta = -45^\circ$, $f(-1) = 2$

por qué del funcionamiento, mediante el establecimiento del vínculo natural con la forma de Horner.

Vamos a demostrar en el caso particular de $f = 2x^3 + 3x^2 + 5x + 6$ y $\theta = -45^\circ$ que el método de Lill efectivamente nos da el valor de $f(-1) = f(\tan -45^\circ)$. Nuestro fin es mostrar de modo geométrico y en forma constructiva cómo la distancia entre los extremos de las poligonales, medida como corresponde, coincide con $f(-1)$.

La esencia del razonamiento es la que se sugiere en la Figura 6. Observamos allí que las poligonales T y S dan lugar a una serie R_1, R_2, R_3 de triángulos semejantes, todos ellos poseyendo uno de sus ángulos igual a θ . Con la intención de hacer más general el argumento, podemos pensar que θ es un ángulo menor que 0, y por lo tanto, que $a = \tan \theta < 0$.

Teniendo en cuenta la observación del párrafo precedente, el cateto opuesto a θ en el triángulo R_1 tiene una longitud de $-2 \tan \theta$. Cuando pasamos a R_2 , la longitud del cateto adyacente a θ es la del segundo segmento de S menos la del cateto opuesto a θ en R_1 . Recordando que θ es negativo, el cateto adyacente a θ en R_2 tiene una longitud igual a $3 + 2 \tan \theta$ y esta cantidad es positiva debido al contexto de la figura: estamos sustrayendo de un segmento mayor, que mide 3, uno menor que mide $-2 \tan \theta$. Luego podemos afirmar que el cateto opuesto a θ en R_2 será $(3 + 2 \tan \theta) \tan \theta$ y será una magnitud negativa. Siguiendo este razonamiento para interpretar los signos de los catetos, tenemos que el cateto adyacente a θ en R_3 tiene una longitud igual a $5 + (3 + 2 \tan \theta) \tan \theta$, magnitud positiva; por lo tanto el cateto opuesto a θ es $((3 + 2 \tan \theta) \tan \theta + 5) \tan \theta$, magnitud negativa. Finalmente, la distancia entre las poligonales es igual a

$$((3 + 2 \tan \theta) \tan \theta + 5) \tan \theta + 6 = (((3 + 2a)a + 5)a + 6 = f(a).$$

La última igualdad es consecuencia de la forma de Horner de f .

Al parecer el método funciona, al menos en este ejemplo. Sin embargo, este argumento debe ser independiente del ángulo elegido y del tipo de poligonal. Es decir, deberíamos ver que esto funciona para cualquier polinomio y cualquier ángulo. Mas vayamos con calma, tal vez esto que parece tan sorprendente, quizás no lo sea, quizás ya estaba implícito en casos más simples como los polinomios de grado 1.

3.2. Rastreado el método de Lill. A riesgo de ser reiterativos, el método de Lill es sorprendente y sencillo por demás. Y cuando de un resultado matemático de esta índole se trata, nos desvela saber de dónde vino, cómo es que alguien pudo darse cuenta de su validez, cómo es que fue traído a la luz.

Lo interesante es que las ideas básicas están al alcance de la mano. Es cuestión de analizar en detalle qué ocurre con los polinomios de grado 1.

Supongamos entonces que $f = ax + b$ es un polinomio de grado 1. En particular, que a es positivo y b negativo. En la Figura 7 observamos la S -poligonal correspondiente a f y las tres posibles T -poligonales dependientes de los valores que tome el ángulo θ .

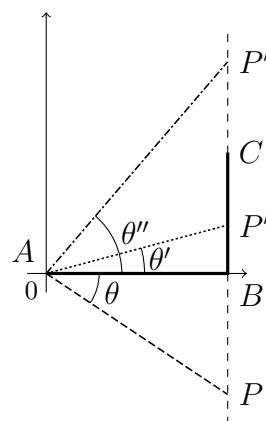


FIGURA 7. El caso lineal

Queremos mostrar que en este caso simple, ya encontramos la esencia del método de Lill. La idea es entonces mostrar que la distancias $|PC|$, $|P'C|$ y $|P''C|$ que se presentan en la Figura 7 son iguales, salvo el signo, a $f(\tan \theta)$, $f(\tan \theta')$ y $f(\tan \theta'')$, respectivamente. Aquí es donde juega un papel el hecho de *cómo* medir.

Proposición 3.1. Sea $f = ax + b$ un polinomio de grado 1, con $b \neq 0$ y $x = \tan \theta$ un número real, con $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$. Denotemos por C el extremo final de la S -poligonal y por P el extremo final de la T -poligonal. Entonces la distancia del segmento PC es igual a $|f(\tan \theta)|$. Más precisamente, el signo de $f(\tan \theta)$ coincide con el de b si el sentido de PC es el mismo que el del segmento asociado a b ; en caso contrario, el signo es distinto.

Demostración. Vamos a considerar el caso en que a es positivo y b negativo tal como se ilustra en la Figura 7. Los otros casos son similares.

Comenzamos con el caso $-\pi/2 < \theta < 0$. La poligonal T asociada a θ corta a la prolongación del segmento BC en un punto P . Como el sentido del segmento PC es el mismo del segmento BC (el último segmento de la S -poligonal asociada a f) y este corresponde al coeficiente b que es negativo, obtendremos que $f(\tan \theta)$ es negativo. Teniendo en cuenta que $\tan \theta < 0$, resulta que $a \tan \theta$ también es negativo. Por lo tanto, $|PB| = |a \tan \theta| = -a \tan \theta$.

En consecuencia tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
 |PC| &= |PB| + |BC| \\
 &= |a \tan \theta| + |b| \\
 &= -a \tan \theta - b \\
 &= -(a \tan \theta + b) \\
 &= -f(\tan \theta).
 \end{aligned}$$

Así, $f(\tan \theta) = -|PC|$ como queríamos ver.

Consideremos ahora el caso θ' . Sea P' el punto de intersección entre la T -poligonal asociada a θ' y el segmento BC . Como en el caso anterior, dado que el sentido del segmento $P'C$ es el mismo del segmento BC , también obtendremos que $f(\tan \theta')$ es negativo. Como $0 < \theta' < \pi/2$ entonces $\tan \theta'$ también es positivo. Por lo tanto, $|BP'| = a \tan \theta'$ y

$$\begin{aligned}
 |P'C| &= |BC| - |BP'| \\
 &= -b - a \tan \theta' \\
 &= -(a \tan \theta' + b) \\
 &= -f(\tan \theta')
 \end{aligned}$$

Concluimos entonces que $f(\tan \theta') = -|P'C|$.

Resta analizar el caso θ'' . En esta situación, siendo el sentido del segmento $P''C$ contrario al del segmento BC , obtendremos que $f(\tan \theta'')$ es positivo. Argumentando como en casos previos tenemos que

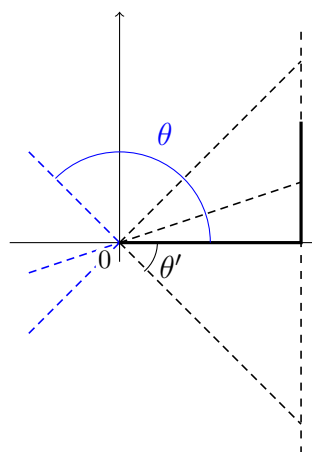
$$\begin{aligned}
 |P''C| &= |BP''| - |BC| \\
 &= a \tan \theta'' + b \\
 &= f(\tan \theta'').
 \end{aligned}$$

Esto completa la demostración. □

Podemos apreciar que la prueba es bastante directa en el caso de polinomios de grado 1. Para la prueba en el caso general necesitaremos, sin embargo, de más cuidado. Aunque antes vale la pena continuar con algunas consideraciones interesantes.

3.3. Rango de θ . Hemos visto que el método de Lill nos permite calcular $f(a)$ para $a = \tan \theta$, eligiendo θ en el intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$. De esta manera, el segmento inicial de T corta al segundo segmento de S , o a su prolongación, y esto permite comenzar a construir la T -poligonal. ¿Qué ocurre si elegimos θ en el intervalo $(\pi/2, 3\pi/2)$? Inicialmente la semirrecta que sale del origen conformando un ángulo θ con el eje x , no se encuentra con S .

A modo de ejemplo, consideremos el caso en el que el polinomio comienza con un coeficiente positivo, y luego continúa con uno negativo. Tendremos entonces una situación como en la Figura 8. Vemos entonces que si $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3}{2}\pi$, la semirrecta correspondiente al primer segmento de T , no se interseca con S . Esta situación ha sido representada con el ángulo θ marcado en azul en la figura. ¿Qué corresponde hacer en este caso?



Existe entonces una forma natural de interpretar esta situación, que es “prolongar T ” y encontrar a S en el semiplano derecho. Es decir, como la semirrecta azul no encuentra a S en el semiplano izquierdo, la prolongamos en sentido opuesto y lo hará en el semiplano derecho.

FIGURA 8. En azul θ , en negro $\theta' = \theta - \pi$.

Al considerar esta prolongación en sentido opuesto, lo que estamos haciendo es considerar una semirrecta que sí se encontraría con la S -poligonal y que nos permitiría construir una T -poligonal (aquella que es generada por dicha semirrecta), pero en este proceso, hemos cambiado el ángulo inicial θ por otro $\theta' = \theta - 180$ como se indica en la figura. Lo relevante es que precisamente esto último, no es otra cosa que la expresión de la propiedad $\tan(\theta \pm \pi) = \tan \theta$.

Esta propiedad garantiza entonces la buena definición del procedimiento, es decir, podemos realizar el método de Lill con θ' , y obtendremos $f(\tan \theta') = f(\tan \theta)$, que es lo que buscábamos desde un comienzo. Así vemos que el método de Lill en realidad no tiene restricciones a la hora de elegir un ángulo θ en particular.

3.4. Coeficientes perdidos. Estudiemos cómo construir el diagrama de Lill cuando el polinomio tiene *coeficientes perdidos* o nulos. Por ejemplo, el caso $f(x) = x^2 - 2$. Una forma de dar con dicho diagrama es apelando a un argumento que involucra un proceso de paso al límite, valiéndonos de la continuidad de las funciones polinómicas.

Para ello consideramos $\varepsilon > 0$ y definimos $f_\varepsilon = x^2 - \varepsilon x - 2$. La esencia del razonamiento es observar que f_ε "tiende a f cuando ε tiende a cero", y la pregunta inmediata es, ¿será que los diagramas de Lill de los polinomios f_ε también convergen al diagrama de Lill de f ? La respuesta es sí, aunque en principio no queda claro que sería *converger al diagrama de Lill de f* .

Apliquemos el método de Lill con el fin de calcular $f_\varepsilon(1) = f_\varepsilon(\tan 45^\circ)$. Hemos representado esto en la Figura 9. Podemos ver que el sentido de la medición entre los extremos de las poligonales coincide con el sentido del último segmento de S . De esta manera, concluimos que $f_\varepsilon(1)$ tiene el mismo signo que el último coeficiente de f_ε .

Observando la figura, vemos que la distancia entre las poligonales es $1 + \varepsilon$. Por lo tanto, $f_\varepsilon(1) = -(1 + \varepsilon)$ y esta última cantidad tiende a $f(1) = -1$ cuando ε tiende a cero. Es decir, aplicar el método de Lill a los polinomios f_ε aproxima a $f(1)$, que es el resultado esperado de aplicar el método de Lill a f . En forma similar, se puede tratar el caso $f_\varepsilon = x^2 + \varepsilon x - 2$ y convencerse de que el método de Lill aplicado a los polinomios f_ε , converge al método de Lill aplicado a f .

Establecidos sobre este resultado resulta natural definir el diagrama de Lill para f como el límite de los diagramas de Lill de los polinomios f_ε , obteniendo entonces el diagrama de la Figura 10.

Es sumamente interesante destacar que, a partir del razonamiento de aproximaciones desarrollado anteriormente, es posible ensayar un método para obtener el mismo diagrama en forma directa. Veamos esto continuando con el mismo ejemplo. La idea es pensar que nuestro polinomio es $f = x^2 + 0x - 2$ o $f = x^2 - 0x - 2$. Independientemente del caso considerado, llegaremos al mismo diagrama. Analicemos el procedimiento considerando $f = x^2 - 0x - 2$ (el caso límite del polinomio $f_\varepsilon = x^2 - \varepsilon x - 2$).

El recorrido sería el siguiente. Primero una unidad hacia la derecha por x^2 ; luego, *cero* unidades hacia la izquierda (tenemos aquí un cambio de signo) por el término $-0x$. Esta forma de proceder revela la interpretación que hacemos respecto del término $-0x$: interpretamos el efecto del mismo en el diagrama como un giro de una magnitud infinitesimal hacia la izquierda, que en el caso límite, se reduciría a cero, pero *nos dejaría mirando hacia la izquierda*. Esto produce

entonces el efecto de dar medio giro hacia la izquierda *en el lugar*. Finalmente, debemos dar medio giro hacia la derecha, los signos se mantienen, y terminamos moviéndonos 2 unidades hacia la derecha sobre el eje x . En total, la S -poligonal se ve como un segmento sobre el eje x , que va desde el origen hasta el punto $(3, 0)$.

Si tomábamos $+0x$, el recorrido hubiese sido: una unidad hacia la derecha por x^2 , *cero* unidades hacia la derecha por el término $+0x$, y finalmente 2 unidades hacia la izquierda (cambio de signo) sobre el eje x , volviendo a terminar en el punto $(3, 0)$.

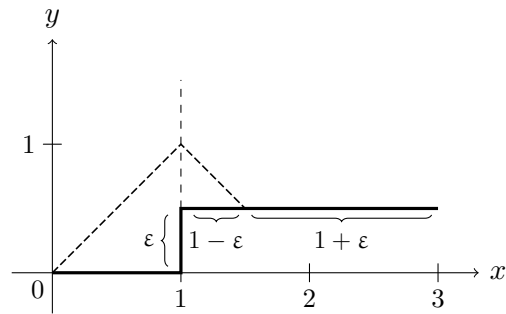


FIGURA 9. Diagrama para $f_\varepsilon = x^2 - \varepsilon x - 2$

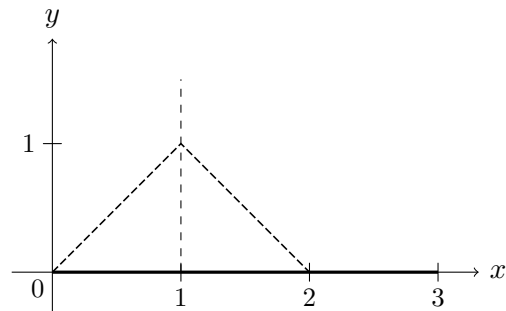


FIGURA 10. Diagrama de Lill para $f = x^2 - 2$

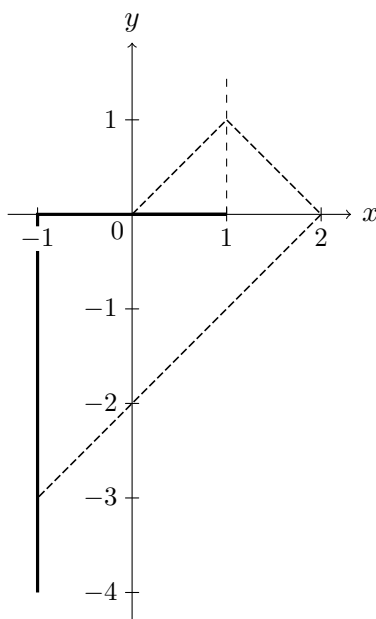


FIGURA 11. $f = x^3 + 2x - 4$, $\theta = 45^\circ$, $f(1) = -1$

Para terminar con el desarrollo del método, debemos mostrar como construir la T -poligonal. En la misma figura, podemos ver como construirla para un ángulo $\theta > 0$ cualquiera. Notemos que en un diagrama correspondiente a un polinomio sin coeficientes nulos, la semirrecta que parte del origen formando un ángulo θ con el eje x y que da inicio a T , intersecaría al segmento de S que se corresponde con el segundo coeficiente de f , o a su prolongación en caso de ser necesario. En nuestro caso, el segundo coeficiente de f es nulo ¿Cómo asignarle un segmento en S ? La idea es pensar que la participación del término $-0x$ en el diagrama, es la heredada por el término lineal en $f_\varepsilon = x^2 - \varepsilon x - 2$. En estos casos obteníamos un segmento vertical comenzando en el final del primer segmento de S , y su prolongación resultaba estar contenida en la recta vertical $x = 1$. La idea es imaginar lo que sucede en el caso límite: al hacer tender ε a cero, el pequeño segmento vertical desaparece, y sobrevive la prolongación del mismo.

Por lo tanto, la forma de construir T en este caso, descansa sobre el hecho de ubicar adecuadamente la prolongación del segmento nulo que se corresponde con $-0x$. Para ello consideramos la recta perpendicular al segmento inicial de S con pie en el final del mismo, es decir, la recta $x = 1$. Luego de hacer esto, es posible trazar la semirrecta que da inicio a T , y obtener una intersección con dicha recta vertical. Así es posible formar el primer segmento de T . Entonces la poligonal continua de manera usual buscando cortar el tercer segmento de S o su prolongación, obteniendo así el diagrama de la Figura 10.

Podemos tomar entonces este método, como una forma económica de construir el diagrama de Lill en el caso de que el polinomio f tenga coeficientes nulos.

En la Figura 11 mostramos la construcción del diagrama de Lill para calcular $f(1)$, siendo $f(x) = x^3 + 2x - 4$. Comenzamos con la S -poligonal, moviéndonos una unidad hacia la derecha por x^3 . Ahora, según lo que vimos, podemos considerar que el término siguiente es $+0x^2$ o $-0x^2$. Tomemos por ejemplo $+0x^2$. Entonces corresponde girar a la derecha *en el lugar* 90° . Como el coeficiente que sigue tiene el mismo signo, volvemos a girar a la derecha 90° ; y en esta instancia ya hemos dado medio giro (180°) en sentido horario, por lo que *quedamos mirando hacia la izquierda*, y corresponde entonces avanzar en esa dirección una cantidad de 2 para llegar al punto $(-1, 0)$. Por último, al tener un cambio de signo, corresponde girar 90° hacia la izquierda, lo que produce *bajar* una cantidad de 4.

Para construir la T -poligonal, se procede de manera análoga al caso anterior. El detalle es el mismo: cuando salimos desde el origen con la semirrecta que forma un ángulo θ con el eje x , consideramos la prolongación del término nulo $+0x^2$ como una semirrecta perpendicular al segmento anterior en la dirección pertinente, para encontrarnos con ella y formar el primer segmento de T . Para el resto de la construcción se prosigue como siempre, obteniendo así el diagrama de la figura.

§4. Una demostración del Método de Lill

Esperamos que los ejemplos previos hayan contribuido a convencer al lector de la validez del método de Lill. No queremos dejar de mencionar que no encontramos una demostración del método en los textos consultados: el libro (Kalman, 2009) dedica su atención a un caso particular del método: cuando los extremos de las poligonales coinciden; es decir, la situación de haber encontrado una raíz del polinomio en cuestión. Por otro lado el libro (Turnbull, 1947), si bien desarrolla el método en general, sólo alcanza a ofrecer una demostración de un caso particular, tal como hicimos en la Sección 3.1. Vamos entonces a proporcionar una demostración propia del resultado.

La demostración que daremos es por inducción en el grado del polinomio y se basa sobre la posibilidad de determinar *la naturaleza del ángulo* θ sin requerir de toda la poligonal S . En concreto, queremos ser capaces de determinar si $\tan \theta$ será una magnitud positiva o negativa, sin tener a disposición el comienzo de las poligonales. Veremos que esto es un hecho inherente a la construcción de las poligonales S y T .

Observamos primero un hecho conocido: $\tan \theta > 0$ para θ en el primer y tercer cuadrante y $\tan \theta < 0$ para θ en el segundo y cuarto cuadrante. En segundo lugar, observamos que la poligonal S está compuesta por una sucesión de segmentos verticales y horizontales, por lo que las rectas que contienen los segmentos de S , son todas rectas o bien verticales, o bien horizontales.

Finalmente observamos la mecánica con la que se construye T a partir de las consideraciones anteriores: una vez que tenemos S , elegimos un ángulo θ apropiado para comenzar a construir la T -poligonal. Si por ejemplo, $\theta < 0$ como en la Figura 12, tenemos que la semirrecta que da inicio a T tiene pendiente negativa, y el primer segmento de T se forma al encontrarse esta recta con una recta vertical (aquella que contiene al segundo segmento de S), y esto será así incluso en el caso en el que f tenga coeficientes nulos, como hemos visto en §3.4.

Luego, corresponde girar 90° hacia la derecha o hacia la izquierda respecto de esta semirrecta inicial, e ir al encuentro de una recta horizontal *viajando* sobre una recta de pendiente positiva, para formar así el siguiente segmento de T . Al volver a girar 90° grados, volvemos a obtener una recta de pendiente negativa y el proceso se repite.

Entonces todos los segmentos de T que se encuentran con rectas verticales lo harán con pendiente negativa, y todos los segmentos de T que se encuentran con rectas horizontales lo harán con pendiente positiva.

Como podemos ver en la figura, el mismo comportamiento ocurriría si θ produjese una semirrecta en sentido opuesto, hacia el segundo cuadrante. Una observación similar tiene lugar cuando $\tan \theta > 0$. Estamos en presencia del siguiente resultado:

Proposición 4.1. *Si θ es tal que $\tan \theta < 0$, los segmentos de T que se encuentran con rectas verticales, están contenidos en rectas de pendiente negativa, y los que se encuentran con rectas horizontales, están contenidos en rectas de pendiente positiva. Un resultado análogo se obtiene para $\tan \theta > 0$, esto es, los segmentos de T que se encuentran con rectas verticales, estarán contenidos en rectas de pendiente positiva, y los que se encuentran con rectas horizontales, estarán contenidos en rectas de pendiente negativa.*

Teniendo a disposición el resultado anterior, procedemos a dar una demostración del método de Lill.

Teorema 4.2 (El método de Lill). *Sea f un polinomio de grado $n > 1$ y consideremos la S -poligonal asociada a f . Dado un número real $\alpha = \tan \theta$, con $\theta \in (-\pi/2, \pi/2) \cup (\pi/2, 3\pi/2)$ consideremos la T -poligonal asociada a θ .*

Entonces la distancia entre los extremos finales de S y T , medida como corresponde, coincide con $f(\tan \theta)$.

Demostración. La Proposición 3.1 muestra que el resultado es válido si $n = 1$.

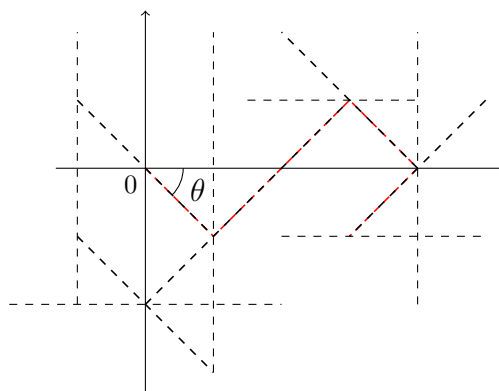


FIGURA 12. Comportamiento de las rectas que contienen a los segmentos de T . En rojo una posible T .

Supongamos entonces que el resultado vale para todo polinomio de grado menor que n , y sea f un polinomio de grado $n > 1$. Consideremos un posible final para el diagrama de Lill de f , como se muestra en la Figura 13. Debemos ver que la distancia de D a E , medida como corresponde, coincide con $f(\tan \theta)$. Para esto, debemos conocer el signo del segmento BE que se corresponde con a_0 , el último coeficiente de f . Tenemos dos casos para considerar: cuando $a_0 < 0$ y cuando $a_0 > 0$. Consideremos primero el caso $a_0 < 0$. Bajo este supuesto, como el sentido de la medición es el mismo que el del segmento BE , queremos ver que $f(\tan \theta) = -|DE|$. En la figura tenemos que $|DE| = |BE| - |BD|$, y por otro lado $|BD| = |CB| \tan \theta$.

La clave está en advertir que podemos aplicar el método de Lill al polinomio que tiene el mismo diagrama que f hasta el anteúltimo segmento. Para hacer esto debemos replicar la idea de Horner una vez. En efecto, llamando $a = \tan \theta$ y escribiendo f en forma descendente, obtenemos que:

$$\begin{aligned}
 f(a) &= a_n a^n + a_{n-1} a^{n-1} + \cdots + a_2 a^2 + a_1 a + a_0 \\
 (*) \quad &= (a_n a^{n-1} + a_{n-1} a^{n-2} + \cdots + a_2 a + a_1) a + a_0 \\
 &= h(a) a + a_0,
 \end{aligned}$$

donde h es un polinomio de grado $n - 1$ y cuyo diagrama de Lill coincide con el diagrama de Lill de f hasta el paso previo a la construcción de los últimos segmentos de S y T en la figura. Luego podemos calcular la distancia de C a B usando el método de Lill, ya que aplicando la hipótesis inductiva para h , tenemos que esta distancia, medida como corresponde, coincide con $h(\tan \theta)$.

Así, tenemos que $|BD| = |CB| \tan \theta = |h(\tan \theta)|$. Ahora suceden dos cosas interesantes que nos permiten concluir la demostración: la primera, es que como estamos bajo el supuesto de que $a_0 < 0$, el diagrama nos dice que el segmento BE tiene el mismo signo que el segmento anterior, pues fue construido girando a la derecha respecto de este. Esto nos indica que aplicando el método de Lill para h , resulta ser $h(\tan \theta) > 0$. La segunda es que la T -poligonal para f está incidiendo

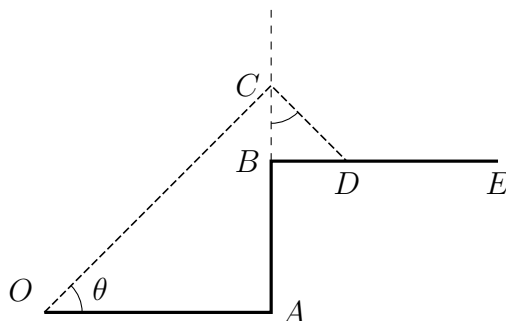


FIGURA 13. Un posible final de diagrama para un polinomio f cualquiera

en la recta horizontal que contiene a BE con pendiente negativa; esto implica, por 4.1, que $\tan \theta > 0$. Luego

$$\begin{aligned} -|DE| &= -(|BE| - |BD|) \\ &= -(|a_0| - |h(\tan \theta)| |\tan \theta|) \\ &= -(-a_0 - h(\tan \theta) \tan \theta) \\ &= a_0 + h(\tan \theta) \tan \theta \\ &= f(\tan \theta), \end{aligned}$$

donde en el último paso se ha usado (*). El caso $a_0 > 0$ es similar, concluyendo así la demostración. \square

Por una cuestión de espacio no hemos considerado todos los posibles diagramas de Lill para esta elección de S , ni tampoco las posibles poligonales S que podríamos haber considerado, pero es posible demostrar en cada caso el resultado de manera análoga, y se deja como ejercicio para el lector.

§5. Conclusiones

Es claro que no estamos ni cerca de haber agotado el potencial del método de Lill. Muchas cuestiones han quedado fuera de este artículo. Por ejemplo, es posible hacer un tratamiento de raíces sucesivas, *aplicando doblemente* el método sobre un mismo diagrama (ver (Kalman, 2009)).

Por otro lado, programar la construcción de las poligonales es un ejercicio interesante, no solo desde la programación, sino desde lo visual: encontramos muy didáctico observar los applets de la página de Kalman (<http://dankalman.net/ume/lill/animation1.html>), donde podemos ver el método de forma animada. Una construcción similar podría hacerse, por ejemplo, en GeoGebra para explorar las raíces de polinomios de manera interactiva.

Hemos visto como el método de Lill conjuga varios tópicos de matemática elemental de una forma elegante, novedosa, pero además no trivial. El proceso de construcción y análisis de diagramas dio lugar al surgimiento de enriquecedores debates en los que el despliegue de estos tópicos nos permitieron no solo aprender, sino que constituyeron momentos lúdico-creativos que hallamos formativos para el quehacer matemático. Creemos que el método de Lill abre las puertas para tratar un montón de cuestiones matemáticas de forma interesante, ya sea a la hora de trabajar en el aula, como en un curso de formación de profesores. Esperamos compartir con el lector el interés y la que generó en nosotros el método de Lill.

Bibliografía

Childs, L. N. (2009). *A Concrete Introduction to Higher Algebra*. Springer, New York.

Kalman, D. (2009). *Uncommon Mathematical Excursions. Polynomia and Related Realms*. The Mathematical Association of America (Incorporated).

Turnbull, H. (1947). *Theory of Equations*. Oliver and Boyd, Edinburgh; Interscience, New York.

JAVIER PEDRO GARCÍA

Ciclo Básico Común, Universidad de Buenos Aires – Departamento de Matemática y Estadística, Universidad Torcuato Di Tella

✉ *javgrzgarcia@gmail.com*

Recibido: *1 de abril de 2019*.

Aceptado: *27 de junio de 2019*.

Publicado en línea: *28 de agosto de 2019*.

ACTITUDES HACIA LA MATEMÁTICA: ALGUNAS CONSIDERACIONES EN SU RELACIÓN CON LA ENSEÑANZA Y EL APRENDIZAJE DE LA MISMA

Claudia Patricia Orjuela, Rubinsten Hernández Barbosa,
Luis Miguel Cabrera González

RESUMEN. La importancia de la matemática en los diferentes ámbitos de la vida, nadie la pone en discusión actualmente, sin embargo, los resultados de las evaluaciones tanto en el ámbito colombiano como en el internacional señalan muy bajos resultados, e incluso conforman parte del fracaso escolar en los diferentes niveles educativos. Por ello en este ensayo se exponen algunas consideraciones con respecto al dominio afectivo, el cual se piensa fundamental al suponer las actitudes de los estudiantes como un factor preponderante en los procesos de enseñanza y aprendizaje de este campo de conocimiento. Tal consideración se realiza con el ánimo de que la misma sea objeto de reflexión para los docentes, quienes son, en última instancia, los que proponen formas diversas para su enseñanza y aprendizaje.

ABSTRACT. The importance of mathematics in different spheres of life is not currently being questioned; however, the results of both Colombian and international assessments show very low results and even form part of school failure at different levels of education. For this reason, this essay presents some considerations with respect to affective domain, which is thought to be fundamental when assuming the attitudes of students as a preponderant factor in the processes of teaching and learning in this field of knowledge. This consideration is made with the intention of making it the object of reflection for teachers, who are, in the last instance, the ones who propose diverse forms of teaching and learning.

§1. Introducción

Las actitudes de los estudiantes hacia el aprendizaje de ciertos contenidos escolares, deben ser entendidas como parte fundamental de la motivación y del impacto que genera en la vida académica, en diferentes órdenes, comprendiendo los procesos de enseñanza y aprendizaje como un sistema complejo donde confluyen

Palabras clave: actitud hacia la matemática, aprendizaje de la matemática, enseñanza de la matemática.

Keywords: Attitude towards mathematics, Learning of mathematics, Teaching of mathematics.

factores netamente racionales y aspectos menos concretos y más abstractos, como pueden ser el gusto, la motivación y el interés, entre otros. En este texto se insiste sobre la necesidad de comprender las actitudes de los estudiantes hacia la enseñanza y el aprendizaje de la matemática en el aula, partiendo del reconocimiento de la importancia de la misma. Se analizan las variables que inciden en la actitud negativa hacia la matemática, tales como la edad, el género, inclusive la percepción que se trae desde el hogar. Posteriormente se hace un breve análisis sobre la situación de la enseñanza de la matemática, buscando con ello evidenciar las posibles causas que llevan a motivaciones negativas en los estudiantes, para luego analizar algunas variables que puedan ser interpretadas como posibles problemas del aprendizaje de la matemática. Para finalizar con el análisis de las actitudes hacia la matemática en estudiantes universitarios, buscando con ello focalizar los factores internos y externos, que influyen en las actitudes que se tienen respecto a esta disciplina.

§2. Importancia de las actitudes

Una actitud, desde la filosofía, puede ser una manera de ser, de actuar, pero esta definición tan escueta aparentemente encierra mucho más, ya que cobija al ser y al acto, es decir el hombre como hecho concreto y en potencia de algo. Implica lo interno y lo externo, ya que las actitudes se aprenden, pero es el ser humano en su conciencia quien matiza, con el tiempo y el aprender, lo que es bueno o malo de ese aprendizaje que se vuelve actitud. Es por ello que éstas tienen que ver con los sentimientos, las creencias y las conductas, en la medida que implica lo pulsional, lo racional y lo intuitivo, lo subjetivo y lo objetivo operando en el accionar humano (Rueda, 2006).

Es por ello que en los procesos de enseñanza y aprendizaje es tan importante tener en cuenta las actitudes, es decir la posición que se toma respecto a la enseñanza y al aprendizaje mismo, pero que está mediada por las experiencias particulares, las expectativas o el conocimiento, generalmente mediático, que tiene quien aprende o quien enseña, respecto a esa enseñanza y por ende también al aprendizaje; en tal sentido, las actitudes tienen una doble vía, es decir tanto de parte del profesor como del alumno, en donde la enseñanza y el aprendizaje están mediados realmente por esas actitudes. Pero se entiende y se comprende que tiene un componente óntico, como lo señala (Rueda, 2006), en el sentido que el aprendizaje es personal, particular, cada ser humano diariamente está en ese proceso, es la preocupación constante por descubrir y re-descubrir su mundo, por interpretar, por explicar y darle sentido y significados a ese universo del que forma parte y que lo rodea.

En atención a lo dicho, es necesario reconocer que cada individuo es único, de ahí que las estrategias para la enseñanza y el aprendizaje deben ser amplias, aquí

las actitudes empiezan a tomar un lugar importante, sobre todo reconociendo el medio en el que se ha desarrollado la persona, registrando que los factores económicos, ambientales, sociales y culturales deben ser tenidos en cuenta al momento de la planeación del currículo, en la selección, organización y secuenciación de contenidos y la importancia de estos para resaltar los contextos donde se desarrollan. Es ese sentido, es importante recalcar que las actitudes del profesor están mediadas no solo por su herencia cultural e historia personal y de formación profesional, sino por los medios que la institución pone a su alcance, de ahí la necesidad de que éste posea habilidades técnicas, administrativas y humanas, de tal manera que esté en capacidad de poner en práctica los enfoques y métodos educativos actualizados, buscando con ello incentivar y entusiasmar al educando, es decir:

A este respecto, se infiere la necesidad de poseer vocación docente y actitud humana especial para el logro del proceso instrucción-aprendizaje. Aunado a esto, el docente no puede resignarse al saber parcelarizado, aislando un objeto de estudio de su contexto, de sus antecedentes, de su devenir, pues debe inspirarse a ir en la búsqueda de un pensamiento multidimensional (Rueda, 2006, p. 496)

Las actitudes entonces están en relación con el reconocimiento de esa multidimensionalidad, ya no es el ser humano puesto en el plano de la repetición de los saberes aprendidos o descubiertos por otros, aquí el individuo aporta también desde sus vivencias, constructos y experiencias, la actitud implica entonces reconocer sus gustos, necesidades, intereses, sus temores, sus aprensiones y sus miedos, entre otros aspectos. Es por ello que el profesor y la institución educativa, incluso la familia, pueden motivar al docente en su capacidad de explorar su mundo desde sus propias acepciones personales, sin desconocer que ello está demarcado por las experiencias particulares respecto al propio aprendizaje. Esto significa reconocer al estudiante como un sujeto con sus singularidades, experiencias, necesidades, expectativas y conocimientos propios.

Continuando con la importancia que toman las actitudes desde el profesor en los procesos de enseñanza y aprendizaje, (Hernando, Rubio, Álvarez, & Tabera, 2016), reconocen que en los contextos universitarios intervienen factores dependientes de los estudiantes y otros de la interacción de éstos con el profesor, relacionando el tema de la actitud con el clima adecuado para mejorar dicho proceso. Centrados en las actitudes, reconocen que éstas se infieren a través de comportamientos, que también pueden ser expresados a través de ideas, sentimientos o conductas. Además, resaltan que el profesor no solo es un transmisor de información, también lo es de una serie de competencias a través de la interacción que se da entre éstos y los alumnos; por ejemplo, si la actitud del profesor es positiva,

afable, respetuosa y motivante, entre otras cosas, lo más seguro es que los estudiantes asimilen esas actitudes que le vienen como ejemplo desde la práctica más que desde el discurso mismo, “de esta forma el aprendizaje es definido como un cambio relativamente permanente de los mecanismos de la conducta, debido a la experiencia con los acontecimientos del medio” (Hernando et al., 2016, p. 1).

La influencia del comportamiento actitudinal de los docentes sobre los estudiantes, tales como la expresión, la postura, el lenguaje verbal y no verbal empleados, entre muchos otros elementos, está siendo observada por los estudiantes, si hay una buena actitud, pero además hay dominio sobre el área, como la matemática, implica que los alumnos podrían tener una buena actitud hacia los procesos de enseñanza y aprendizaje. Esto es muy importante, porque se reconoce que esa actitud de doble vía conlleva, no únicamente factores racionales, sino también la pulsión y el sentimiento están implícitos en el reconocimiento de la importancia de las actitudes dentro del aula de clase.

(Vera & Mazadiego, 2010), reconocen que las actitudes son esenciales para lograr que el proceso de aprendizaje logre realmente calar en el estudiante, ya que no basta con tener un amplio y profundo conocimiento, como puede ser el caso de los docentes universitarios, en donde ellos demuestran y validan, entre otras cosas, con sus libros, conferencias o publicaciones que dominan el área de su saber, pero que en muchas ocasiones estos realmente no tienen las actitudes para ser “buenos” profesores, generalmente porque no toman en cuenta la importancia del reconocimiento de la individualidad de cada persona, de sus necesidades o de sus percepciones sobre la materia y de los contenidos objeto de estudio, reflexión y análisis entre otros. “Por ello cuando el docente desconoce que hay individualidades físicas, afectivas, cognitivas, emocionales y con canales de percepción diferentes, se corre el riesgo de discriminar intelectualmente a los estudiantes” (Vera & Mazadiego, 2010, p. 55).

Como se puede apreciar, el reconocimiento de la importancia de las actitudes en el proceso de enseñanza y aprendizaje, como el caso que nos ocupa de la matemática, es fundamental, ya que permitiría lograr no solamente un clima favorable dentro del aula, sino que implicaría una aceptación de las diferencias que se encuentran dentro de la misma, en un claro reconocimiento del valor ontológico tanto de los estudiantes como de los propios docentes. En ese orden de ideas, y de manera particular del aspecto que se viene abordando, a continuación, se describen algunas variables que inciden en la actitud negativa que tienen los estudiantes hacia la matemática.

§3. Variables que inciden en la actitud negativa de los estudiantes hacia la matemática

Desconocer las alteridades, homogenizar el proceso de enseñanza y de aprendizaje de la matemática, centrarse únicamente en los fundamentos teóricos, desconociendo las realidades contextuales que se mueven dentro del universo llamado aula, son únicamente algunas de las variables que inciden negativamente en la actitud hacia dicho campo de conocimiento y los procesos que esta cubre, por ello, en este apartado nos centraremos principalmente en la actitud negativa de los estudiantes hacia la matemática. Enfrentar un problema con actitud positiva o negativa, determinará de una u otra manera el resultado esperado, inclusive establecerá si realmente se logra llegar a un resultado definido. Las emociones, como se puede apreciar desde ya, juegan un papel fundamental respecto a las actitudes que se tienen frente a la matemática, tales como la falta de autoestima y la negatividad, entre otras variables, se convierten en barreras difíciles de superar en el proceso de aprendizaje. De ahí la importancia de conocer y reconocer aquellas variables que pueden incidir negativamente en el aprendizaje de la matemática.

(Estrada & Díez, 2011) hacen un estudio en el aprendizaje con personas adultas, partiendo de dos elementos: la ansiedad que genera la matemática y las actitudes hacia esta asignatura. Se valora y se considera importante la experiencia que los estudiantes traen desde el hogar o desde la escuela misma, la cual determina, en muchos casos, la generación y/o surgimiento de actitudes negativas hacia la matemática. En este estudio, se toman algunos elementos que se estiman fundamentales dentro del análisis de las actitudes, resaltando que el medio en que se realizó dista de la realidad contextual de los autores de este texto, y con ello todo el engranaje que implica el proceso de aprendizaje, pero son datos que permiten acercarse a la temática propuesta, esperando elaborar estudios pragmáticos partiendo de la concepción que se tiene sobre la matemática en nuestro medio.

Dentro de las variables que se analizan en el estudio, está la **edad**, encontrando que no hay un patrón que demuestre que a mayor edad mayor la actitud negativa, lo que si se encuentra es que las personas mayores se sienten más inseguras frente al aprendizaje de la matemática, en tanto que los jóvenes se muestran más neutrales respecto a ella, encuentran además que no hay interdependencia entre la edad y la inseguridad, tanto jóvenes como adultos manifiestan que hay inseguridad o no la hay. Lo que puede darse es que hay personas que se han sentido frustradas frente a la resolución de problemas en el orden práctico, de ahí se desprenden actitudes negativas, pero también es importante reconocer que son actitudes que se transmiten desde las interacciones, si las familias tienen actitudes positivas o negativas, inciden en el aprendizaje.

En cuanto a las actitudes y el **nivel de estudios**, (Estrada & Díez, 2011), encuentran que, a mayor formación académica, menor es el rechazo hacia el aprendizaje de la matemática; sin embargo, algunas personas con menor nivel académico afirman sentirse atraídos hacia la matemática, esto confirma que la relación entre actitud y nivel de estudios parece obedecer más al azar que a una relación significativa. Frente a la relación entre la **dimensión afectiva y cognitiva**, los autores encuentran que cuando las personas adultas tempranamente han tenido experiencias negativas con el aprendizaje de la matemática, ellos mismos ponen barreras, y pueden aflorar situaciones de ansiedad, buscando superar sus miedos, estereotipos y actitudes negativas para poderlas aprender. Si una persona se siente frustrada, afirma que no le gusta la matemática, cuando se les pregunta si les gusta la matemática, nadie afirma categóricamente que no, se sitúan en respuestas intermedias.

Por su parte, (Granados & Pinillos, 2007) elaboran un estudio con estudiantes de enfermería en Bogotá y su actitud hacia la matemática, bajo tres componentes: social, educativo y afectivo. En lo social, encuentran que los estudiantes consideran que la matemática ayuda a tomar decisiones importantes en el área de estudios, encontrando que las calificaciones más altas demuestran actitudes relacionadas con motivos y valores, en donde se reconoce la importancia de la matemática en la enseñanza; las puntuaciones más bajas, demuestran que las actitudes son bajas, respecto a la utilidad de éstas en su área profesional. Este estudio muestra unos resultados interesantes, ya que hace énfasis en estudiantes que son del área de la salud, resaltando que las actitudes se relacionan en este caso con la aplicación del uso de la matemática en sus carreras, mostrando que no hay realmente un interés por aprender más allá de lo meramente necesario, aunque el estudio no permite vislumbrar las causas de las actitudes, si se observa una posible intermediación de la practicidad de su estudio en la vivencia y aplicación de su profesión.

(Pérez, Castro, Rico, & Castro, 2011) centran su investigación en la ansiedad que despierta el estudio de la matemática desde el **género** en estudiantes universitarios de primer año en Granada-España, los bloques de titulaciones y la ansiedad, encontrando que se manifiesta mediante síntomas como tensión, nervios, preocupación, irritabilidad, impaciencia, inquietud, confusión, bloqueo mental o miedo. En cuanto al género, el estudio arrojó que los hombres presentan menor ansiedad que las mujeres, con una diferencia de 4 puntos; en cuanto a los bloques de titulación, se encuentra que los valores más bajos se registran en enseñanzas técnicas, ciencias experimentales, ciencias sociales y ciencias de la salud. El estudio de ansiedad, según el género en bloques, muestra que las mujeres presentan mayor ansiedad, especialmente en el área de la salud, y el mayor en hombres en ciencias sociales.

Cuando (Pérez et al., 2011), analizan los resultados por ítems, encuentran que hay una cierta reticencia a tomar cursos de matemáticas en años posteriores, así como a una preocupación por resolver problemas matemáticos, aunque al realizar estos problemas no se encuentra que genere angustia o bloqueo mental, ansiedad que aumenta cuando se les pregunta por las evaluaciones. Coincide este estudio con el de (Granados & Pinillos, 2007) en cuanto a que en el área de la salud hay un temor hacia la matemática. En cuanto al género, la incomodidad es mayor en las mujeres cuando deben presentar exámenes, así como la predisposición a tomar más cursos de matemáticas, generando bloqueo mental, miedo y preocupación ante ella para abordarla.

El estudio muestra que hay variables que de una u otra manera inciden en la actitud hacia la matemática y su aprendizaje, tales como la edad, el género o el nivel de estudios alcanzado; se hace necesario reconocerlo, no con el fin de generar mayores diferencias o ampliar la brecha en la conquista de derechos, sobre todo educativos, para poblaciones tradicionalmente excluidas, sino que sirve para que las universidades planteen sus currículos con fundamento y/o considerando estas variables, buscando cambiar los diseños educativos, ya que quizá ese rechazo obedece a los problemas de la enseñanza en el área de matemáticas, tema que se abordará a continuación.

§4. Problemas de la enseñanza de la matemática

Sin duda alguna los profesores, en todos los niveles de escolaridad, tienen cierta responsabilidad acerca de las actitudes que se generan hacia la matemática, tanto positivas como negativas. Cuando los profesores transmiten actitudes negativas, como disgusto, inseguridad, falta de conocimiento, emplean métodos de enseñanza que van a transmitir sentimientos semejantes; por el contrario, profesores que muestren actitudes positivas, animan la independencia y la iniciativa, generan gusto y confianza (Mato & De La Torre, 2010).

Una de las mayores dificultades radica en que la educación tradicional se ha centrado en transmitir conocimientos, de diferente tipo, más que emociones y sentimientos (Guerrero & Blanco, 2004), quizás por ello se ha encontrado que uno de los principales factores psicopatológicos presentes en el aula es la ansiedad. En ese sentido, "Las situaciones en las que se desencadena la reacción de ansiedad tienen en común la previsión de posibles consecuencias negativas o amenazantes para el sujeto. Esta reacción supone una puesta en marcha de diferentes recursos cognitivos, fisiológicos y conductuales" (p. 2). Además es un problema que se deriva desde los planes de estudio oficiales de muchos países, ya que obedecen a los marcos de desarrollos propuestos por organizaciones como la Organización para la Cooperación y Desarrollo Económico (OCDE), en donde impera el valor

racional de mercado sobre la pulsión o el reconocimiento del ser humano ontológicamente considerado.

El modelo tradicional, centrado en la resolución de problemas, especialmente utilizando lápiz y papel, enfatiza en procesos operativos y repetitivos, siguiendo problemas tipo, generalmente bajo procedimientos algorítmicos, que genera actitudes de rechazo, así como baja autoestima ante la imposibilidad de resolución de problemas contextualizados, cercanos a las experiencias de los educandos. Además, anotan (Guerrero & Blanco, 2004), existe la creencia que la matemática desarrolla exclusivamente el razonamiento lógico, generando una concepción de éstas como ciencia pura, relacionándola en su desempeño con la percepción de que los mejores alumnos, los más inteligentes, deben ser buenos en matemáticas. Bajo esta perspectiva, existe la creencia de que la matemática es para genios, por el nivel de raciocinio que exigen y por la abstracción que pueden denotar, lo cual conlleva a generar, la mayoría de las ocasiones, sentimientos de rechazo de quienes se involucran con ambientes de enseñanza de la matemática, creados bajo aquellos supuestos.

Sumado a lo anterior, en la enseñanza se suele establecer una excesiva importancia hacia la obtención de resultados exitosos que pueden generar, entre quienes resuelven las actividades, sentimientos de baja autoestima, así como a considerar muy complicado la resolución de problemas, capaz de generar angustia, lo que termina con niveles altos de ansiedad, para lo cual lo más cómodo, pedagógicamente hablando, es abandonar esa área y optar por otras que le sean más fáciles o que les genera menores índices de ansiedad. Esto, podría en parte, explicar por qué las personas que no se consideraron buenas en matemáticas optaron por otras carreras (Sánchez, Segovia, & Miñán, 2011; Pérez et al., 2011), preferentemente las ciencias sociales o el área de la salud, coincidentemente donde más rechazo o ansiedad se genera hacia esta área conocimiento.

(Ruiz, 2008), anota que dentro de los principales problemas en la enseñanza de la matemática están la falta de profesores formados y especializados en la enseñanza y el aprendizaje en todos los niveles educativos y la existencia de profesores que carecen de una formación didáctica sólida; además de la generalización de que basta con saber la disciplina para enseñar, cerrando de paso la posibilidad de que realmente el profesor se forme en docencia, valorando y revalorando metodologías que le permitan entender que no basta con la mera transmisión de conocimientos.

Además, reconoce (Ruiz, 2008) que si bien dentro del aula hay características comunes, como el rango de edad o los niveles socio económicos de los estudiantes, también es cierto que hay diferentes intereses, motivaciones o aspiraciones, así como habilidades para enfrentar los problemas y encontrar soluciones, lo cual influye en los resultados, sin esperar de ninguna manera que éstos sean iguales

para todos. Para ello se propone el trabajo diferenciado, que no es otro que el trabajo didáctico de vinculación de lo individual con lo colectivo, con fundamento en los objetivos del proceso de enseñanza y aprendizaje, en donde el profesor debe favorecer y estimular el trabajo colectivo, cooperativo, y colaborativo, así mismo brindando atención a las diferencias individuales, tanto de los aventajados como de los rezagados.

Retomando los postulados propuesto por la Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la (UNESCO, 1999, 2005), el aprendizaje de las ciencias, entre éstas la matemática, son un factor determinante del crecimiento económico y desarrollo social de una nación, y plantea algunas orientaciones consideradas fundamentales para su aprendizaje:

- Adoptar métodos activos que partan de la realidad como fuente de aprendizaje.
- Vincular los programas con el contexto humano y social.
- Favorecer un enfoque interdisciplinario y de contextualización.

Lo anterior en atención a que en ocasiones la educación, incluida la matemática, no tiene en cuenta la realidad social, cultural y cognitiva de los estudiantes, aspectos fundamentales en la puesta en práctica de modelos didácticos que favorezcan la búsqueda de soluciones a los problemas matemáticos planteados desde la enseñanza y el aprendizaje. También se presenta escasa o nula vinculación con el contexto en que se mueve el estudiante, de ahí que muchas veces la educación no sea ni pertinente ni eficaz, y finalmente, reconocer que la matemática tiene una utilidad en cuanto solución a los problemas que se suscitan dentro de ese contexto, además reconociendo que no es la ciencia poderosa y única que puede resolver toda duda, sino que forma parte de un entramado más grande como es el saber. En consonancia con lo anterior, (Ruiz, 2008) reconoce que, si bien en la enseñanza de la matemática pocas veces se tiene en cuenta un contexto estar-matemático, y por ello poca vinculación de los contenidos a la realidad; existe también poca relación de la matemática con otras disciplinas del plan de estudios; y se toman en cuenta realidades ajenas a las del estudiante. En ese sentido afirma que:

Nos referimos a los casos en que el docente utiliza ejemplos en sus clases de aplicación a sociedades que nada tienen que ver con la realidad del país donde se inserta el estudiante y sobre cuya sociedad está llamado a actuar para transformar. En ocasiones, incluso se utilizan libros de textos y materiales pedagógicos portadores de esos ejemplos ajenos a la realidad que vive o para la que se debe preparar el estudiante (Ruiz, 2008, p. 4)

Las variables descritas repercuten en los problemas de aprendizaje, ya que, si hay dificultades metodológicas por parte del docente y del modelo educativo de la institución, se genera una cadena de dificultades que se hace necesario tener en

cuenta al momento de postular otros posibles modelos de enseñanza y aprendizaje de la matemática.

§5. Problemas del aprendizaje de la matemática

La matemática, sin lugar a duda es la asignatura que mayor rechazo encuentra entre los escolares, nadie desconoce su importancia, pero también, muchos reconocen que realmente genera rechazo, así lo recalcan (Villegas & Cornejo, 2010), quienes señalan:

Las matemáticas se encuentran en una posición nada envidiable: es una de las materias escolares más importantes que los estudiantes de hoy deben estudiar, y al mismo tiempo, es una de las peor comprendidas. Su reputación intimida. Todo el mundo sabe que es importante y que su estudio es necesario. Pero pocas personas se sienten cómodas con ella, hasta tal punto que en muchos países es totalmente aceptable; en el ámbito social, confesar la ignorancia que se tiene de ella, fanfarronear sobre la propia incapacidad para enfrentarse a ella, ¡e incluso afirmar que se le tiene miedo a las matemáticas!(Villegas & Cornejo, 2010, p. 1)

Pero este miedo no surge de la nada, hay unos factores históricos y sociales que han favorecido para que realmente exista, por parte de algunos, un verdadero terror hacia la matemática, generalmente basada, la mayoría de las veces, en experiencias desagradables (Villegas & Cornejo, 2010), lo que ha generado un problema a largo plazo, y que es una aversión que subsiste en el tiempo y que, en muchas ocasiones, se transmite de generación en generación, de ahí que sea entendible que en muchas familias haya generaciones de expertos en ciencias sociales o de expertos en ingenierías o similares. Los resultados encontrados por estos autores se concretan en las conclusiones, como una especie de guía para mejorar el aprendizaje de la matemática, reconocen que requieren tiempo y concentración, sobre todo en una sociedad donde la inmediatez –desde la virtualidad, anotaríamos- cobra un valor muy importante; la necesidad de repasar constantemente y de practicar; actualización constante, porque, aunque la creencia sea otra, la matemática está evolucionando constantemente.

Por otra parte, también postulan una serie de consejos para los padres, pues se reconoce que juegan un papel fundamental en el proceso de enseñanza y aprendizaje de esta área de conocimiento, ya que son ellos los que pueden o no crear un ámbito positivo y favorable, combinando su estudio, uso y necesidad con actividades de la vida práctica; evitar comentarios negativos o despectivos contra la matemática, es decir generar una buena actitud ante éstas. Por ello, las creencias, las actitudes y las emociones son factores que deben considerarse en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática. En cuanto a las primeras (Bermejo, 1996) encuentra que hay creencias sobre la matemática misma, en donde los afectos casi no

intervienen, creyendo que la dificultad de la matemática deviene en reglas, cuya principal reacción es la percepción de la utilidad de las mismas en cuanto al rendimiento académico; y otras creencias que dependen más de los afectos, donde el auto concepto constituye un factor importante dentro del rendimiento académico, en la escuela y fuera de ella, considerando así como fuente de auto eficiencia.

(Gil, Blanco, & Guerrero, 2005) anotan que esa auto atribución, unida al éxito y al fracaso, pueden determinar los aspectos dimensionales afectivos y emocionales del aprendizaje escolar, sobre todo cuando el alumno atribuye sus éxitos a su esfuerzo personal, a un plan eficiente y a la organización en el trabajo, entre otros. Pero cuando se atribuye el éxito a factores externos, como la suerte, o a la supuesta escasa capacidad intelectual, el rendimiento disminuye y su motivación merma, generando actitudes negativas hacia el aprendizaje.

(Ruiz, 2008), plantea que uno de los problemas del aprendizaje de la matemática estriba en que no se considera el contenido de ésta como un todo, entendida dentro de un proceso de sistematización que coadyuve a la estructura y organización del contenido, partiendo de lo simple a lo complejo, de lo conocido a lo desconocido, ya que esto permite entender el aprendizaje como un proceso, en donde es necesario tener unos conocimientos básicos para aprender luego otros.

En la práctica no sucede así, los contenidos no se interconectan entre sí, lo que se ve son diferentes partes del contenido, la matemática se comprende, incluso se aprende, de forma fragmentaria, sin conexión con las realidades de su uso e importancia, generando una imagen falsa de lo que realmente es, lo cual genera dificultades en su comprensión y aprendizaje o en comprensiones y aprendizajes muy básicos. Cada año escolar, por ejemplo, se asume con un objetivo específico, pero no se tiene una noción general de ese contenido como un todo, además, no se interrelaciona con otras disciplinas. Quizás por eso el estudiante opta por aquello en donde mejor se desenvuelve, generando muchas veces rechazo sobre lo que se le dificulta, de ahí que esta sea a su vez una causa de la deserción y la forma huidiza de tomar cursos en donde la matemática no aparezcan por ningún lado, como lo que ocurre en la universidad.

(Hickey, 2007), encuentra que uno de los principales problemas está en los libros de texto que se usan como recurso, y está en directa relación con el aprendizaje, ya que, si el modelo que se describe no atrae al estudiante, con seguridad habrá desatención y frustración respecto a la matemática. Los resultados encontrados en su experiencia en Chile, refiriéndose a los libros, son los siguientes: son aburridos, presentan gran cantidad de errores, introducen conceptos innecesarios en abundancia, no suscitan la experimentación ni la creación matemática en el estudiante y no muestran la utilidad de la matemática en la vida cotidiana, entre otros aspectos.

Como se puede apreciar en este apartado, las posibles causas de un mal aprendizaje en matemáticas son tanto externas como internas, entre las primeras está la falta de corresponsabilidad con la realidad del estudiante, es decir que éste puede encontrarlas no prácticas y útiles, así como que no se cuenta con elementos atractivos para los jóvenes, en el caso particular de los libros, generalmente son textos que desmotivan su atención, ya que al no existir correlación con su realidad, se ven ajenos o demasiado abstractos. Y en cuanto a las causas internas, uno de los principales errores es perpetuar, desde el hogar, la aversión que la familia puede tener hacia la matemática, creyendo que, si a los padres les fue mal, a los hijos les irá igual, es un disgusto que se transmite, generando desde tempranas edades actitudes negativas, que repercutirán en la vida universitaria, como se verá en el siguiente apartado.

§6. Actitudes hacia la matemática en estudiantes universitarios

Se ha abordado ya las actitudes hacia la matemática de manera general, en estudiantes escolares de educación primaria y secundaria, principalmente, pero también es importante analizar la actitud de estudiantes universitarios con respecto a este campo de conocimiento, por ejemplo, en áreas de la salud e incluso de las mismas ingenierías, en la medida que muchas de esas actitudes negativas vienen desde el hogar y desde los primeros grados de escolaridad, como se mencionó antes. En tal sentido (Gómez Chacón, 2009), a partir de una serie de investigaciones realizadas, ilustra las diferentes dificultades presentadas por los estudiantes universitarios de primer año, hallando un bajo nivel adquirido en procesos de pensamiento matemático con pocas destrezas y actitudes, lo cual no posibilita que se adentren en procesos de pensamiento avanzado.

Al diferenciar entre aspectos cognitivos y afectivos, (Gómez Chacón, 2009), enfatiza en las actitudes, emociones y sentimientos, que configuran la percepción de dificultad entendida como predisposición evaluativa que condicionan al sujeto para percibir y reaccionar de cierta manera, sin obviar las características propias de la matemática: abstracción, inducción, jerarquización, globalización y rigor. Las actitudes hacia la matemática hacen alusión a la valoración, gusto y aprecio tanto por la disciplina como por su aprendizaje, donde la componente afectiva se evidencia en términos de interés, satisfacción, curiosidad y valoración entre otros, contrario a las actitudes matemáticas de carácter cognitivo entendidas como capacidades generales como la flexibilidad de pensamiento, la apertura mental, el espíritu crítico y la objetividad entre otros.

Por su parte (Álvarez & Ruiz, 2010), hacen un estudio sobre la actitud hacia la matemática en estudiantes de ingeniería en Venezuela, encontrando que hay una dificultad en el proceso de enseñanza y aprendizaje, ya que adquiere un carácter eminentemente formativo e informativo, que le permite al estudiante comprender

el centro de su labor profesional, ser parte de un razonamiento riguroso y preciso, la traducción de los problemas reales a matemáticos, expresar gráficamente datos, controlar errores, interpretar físicamente problemas, analizar y predecir comportamientos, entre otros aspectos.

En cuanto a las actitudes como tal, encuentran que un gran número de educadores relacionan el aumento del interés o la atención a sus propias actitudes, principios o valores, evitando a toda costa informaciones que se aparten de estos postulados. Estas son consideradas con un buen predictor de la asimilación de los contenidos, la motivación, la memoria y el uso futuro que se haga de la matemática, facilitando o impidiendo el aprendizaje. Hay diferentes estímulos que producen en el estudiante tensiones o reacciones positivas o negativas, cuyas respuestas están mediadas por sus creencias sobre la asignatura y sobre sí mismos; si son positivas, las reacciones serán de satisfacción y logros; si son negativas, las reacciones serán de frustración y desencanto. La consecuencia es que las experiencias en el aprendizaje ejercerán influencia definitiva en la formación de sus actitudes, si son éstas satisfactorias, los sentimientos generados serán de bienestar, seguridad, competencia, interés, disfrute; si las experiencias son negativas, provocan insatisfacción, inseguridad, incompetencia, frustración y desencanto (Álvarez & Ruiz, 2010).

Bajo este postulado, los autores encuentran que en los estudiantes no hay signos negativos hacia la matemática, hay una actitud globalmente positiva, sobre todo en el reconocimiento que tiene como valor fundamental en la carrera y en su futuro ejercicio profesional. Así mismo hay un alto porcentaje que muestra interés por la matemática, el reconocimiento que toda persona debe hacer sobre éstas y el interés y curiosidad por resolver problemas matemáticos. Pese a este optimismo, el resultado muestra un nivel medio sobre el entusiasmo, pasión o emoción que se siente por la asignatura, en el mismo nivel se encuentra que hay problemas en su aprendizaje, principalmente por falta de comprensión, incomodidad o nerviosismo e incapacidad para pensar con claridad. Se reconoce que las actitudes están mediadas por aspectos subjetivos, tanto a nivel personal, como social y académico, incidiendo en conductas como el interés, la perseverancia o la disposición para su aprendizaje; si los estudiantes perciben que es poco beneficioso estudiarlas, la disposición será mínima.

§7. Conclusiones

La principal conclusión que se desprende de este ensayo, es que las actitudes demarcan el estudio sobre la matemática, de ahí la importancia de comprender al estudiante como un complejo ser donde confluyen tanto factores racionales como pulsionales respecto al gusto o no que se tiene por su estudio; se encuentra que

existe, una relación entre la actitud que muestra el profesor en su ejercicio docente, ya que si éste presenta apatía, no se muestra recursivo o muestra desinterés, realmente se genera en el estudiante actitudes negativas; por otra parte, la familia incide en la apreciación que el estudiante tiene sobre la matemática, gustos y disgustos que pueden ser transmitidos de generación en generación, de ahí la importancia que la institución debe prestar a conocer esos antecedentes.

En los estudios analizados se pone en evidencia que las actitudes negativas se desprenden de aspectos como la edad, a mayor edad menor atracción hacia su estudio; en cuanto al género, las mujeres presentan actitudes más negativas que los hombres; y que a mayor conocimiento menor es el disgusto por su estudio. Esto, se recalca, no muestra que haya diferencia en su aprendizaje, muestra que los currículos o los modelos pedagógicos deben partir del reconocimiento de estas diferencias para emprender acciones y generar propuestas que disminuyan las actitudes negativas y favorezca su estudio, pero sobre todo la interrelación que debe existir entre diferentes disciplinas para mostrar su importancia, usos y funcionalidad, así como la necesidad de la correlación que debe existir entre el currículo de matemáticas y la realidad contextual en la que se mueven los estudiantes.

Finalmente, es fundamental que los docentes de todos los niveles escolares, incluso los universitarios, consideren las actitudes como un factor importante a la hora de pensar en los procesos de enseñanza y aprendizaje de este tipo de conocimiento, lo tomen en consideración a la hora de diseñar estrategias innovadoras que implementarán en el aula, pues de no ser así, tal y como lo anotan (Hidalgo, Maroto, & Palacios, 2004) el ciclo vicioso continua, es decir se parte de considerar la *dificultad, aburrimiento, suspenso, fatalismo, bajo autoconcepto, desmotivación-rechazo y dificultad* y así sucesivamente. El romper este ciclo, y empezar a generar actitudes más positivas hacia la matemática en los estudiantes es tarea de todos.

Referencias

- Álvarez, Y., & Ruiz, M. (2010). Actitudes hacia las matemáticas en estudiantes de ingeniería en universidades autónomas venezolanas. *Revista de Pedagogía*, 31(89), 225–249.
- Bermejo, V. (1996). Enseñar a comprender las matemáticas. En J. Beltrán y C. Genovard (Eds.). *Psicología de la Instrucción I. Madrid: Síntesis*, 256–279.
- Estrada, A., & Díez, J. (2011). Las actitudes hacia las matemáticas. Análisis descriptivo de un estudio de caso exploratorio centrado en la Educación Matemática de familiares. *Revista de Investigación en Educación*, 9(2), 116–132.
- Gil, N., Blanco, L., & Guerrero, E. (2005). El dominio afectivo en el aprendizaje de las matemáticas. Una revisión de sus descriptores básicos. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 2, 15–32.

- Granados, R., & Pinillos, O. (2007). *Actitudes hacia las matemáticas. Un estudio con estudiantes de enfermería*. Bogotá: Encuentro Colombiano de matemática educativa.
- Guerrero, E., & Blanco, L. (2004). Diseño de un programa psicopedagógico para la intervención en los trastornos emocionales en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Revista Iberoamericana de Educación*, 33(5), 1–15.
- Gómez Chacón, I. (2009). Actitudes matemáticas: propuestas para la transición del bachillerato a la universidad. *Revista Educación Matemática*, 21(3).
- Hernando, A., Rubio, M., Álvarez, J., & Tabera, M. (2016). ¿Cómo perciben los estudiantes universitarios las actitudes del profesor? Recuperado el 2016, de <https://ined21.com/como-perciben-los-estudiantes-universitarios-las-actitudes-del-profesor/>
- Hickey, S. (2007). *Una visión general de los problemas con la enseñanza de las matemáticas en Chile y posibles maneras de mejorarla*. Recuperado el 2007, de http://digitalcollections.sit.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1174&context=isp_collection
- Hidalgo, S., Maroto, A., & Palacios, A. (2004). ¿Por qué se rechazan las matemáticas? Análisis evolutivo y multivariante de actitudes relevantes hacia las matemáticas. *Revista de Educación*, 334, 75–95.
- Mato, M., & De La Torre, E. (2010). Evaluación de las actitudes hacia las matemáticas y el rendimiento académico. *PNA*, 5(1), 25–36.
- Pérez, P., Castro, E., Rico, R., & Castro, E. (2011). Ansiedad matemática, género y ramas de conocimiento en alumnos universitarios. *Enseñanza de las ciencias*, 29(2), 237–250.
- Rueda, M. (2006). La filosofía como actitud humana: ontología, episteme y su operacionalización en el ámbito educativo. *Revista Venezolana de Ciencias Sociales*, 10(2), 490–502.
- Ruiz, J. (2008). Problemas actuales de la enseñanza aprendizaje de la matemática. *Revista Iberoamericana de Educación*, 47(3), 1–8.
- Sánchez, J., Segovia, I., & Miñán, A. (2011). Exploración de la ansiedad hacia las matemáticas en los futuros maestros de educación primaria. *Profesorado*, 15(3), 297–312.
- UNESCO. (1999). *Declaración sobre la ciencia y el uso del saber científico. Conferencia Mundial sobre la Ciencia. Budapest*. UNESCO. Recuperado el 2019-07-01, de http://www.unesco.org/science/wcs/esp/declaracion_s.htm#sociedad
- UNESCO. (2005). *Hacia las sociedades del conocimiento: informe mundial de la Unesco*. UNESCO. Recuperado el 2014-08-04, de <http://unesdoc.unesco.org/images/0014/001419/141908s.pdf>
- Vera, A., & Mazadiego, T. (2010). Una perspectiva sobre las actitudes y el deber ser de los docentes en el aula escolar. *Revista de Educación y Desarrollo*, 14,

53–58.

Villegas, J., & Cornejo, C. (2010). *¿Miedo a las matemáticas?* Celaya: Instituto Tecnológico de Celaya.

CLAUDIA PATRICIA ORJUELA

Docente Investigador. Universidad Autónoma de Colombia.

(✉) claudita028@gmail.com

RUBINSTEN HERNÁNDEZ BARBOSA

Docente Investigador. Universidad Autónoma de Colombia.

(✉) rhbjd@hotmail.com

LUIS MIGUEL CABRERA GONZÁLEZ

Docente Investigador. Universidad Autónoma de Colombia.

(✉) cabreralm@gmail.com

Recibido: 4 de julio de 2018.

Aceptado: 25 de mayo de 2019.

Publicado en línea: 28 de agosto de 2019.

¿Sabías que...

por Leandro Cagliero y Ricardo Podestá

con los desarrollos decimales de las fracciones $\frac{1}{19}, \frac{2}{19}, \dots, \frac{18}{19}$ se obtiene un cuadrado mágico?

En efecto, las fracciones decimonovenas $\{\frac{k}{19} : 1 \leq k \leq 18\}$ son periódicas, con período de longitud 18. Por ejemplo

$$\frac{1}{19} = 0.052631578947368421052631578947368421\dots$$

Si sólo escribimos el período de estas fracciones tenemos

1/19	0	5	2	6	3	1	5	7	8	9	4	7	3	6	8	4	2	1
2/19	1	0	5	2	6	3	1	5	7	8	9	4	7	3	6	8	4	2
3/19	1	5	7	8	9	4	7	3	6	8	4	2	1	0	5	2	6	3
4/19	2	1	0	5	2	6	3	1	5	7	8	9	4	7	3	6	8	4
5/19	2	6	3	1	5	7	8	9	4	7	3	6	8	4	2	1	0	5
6/19	3	1	5	7	8	9	4	7	3	6	8	4	2	1	0	5	2	6
7/19	3	6	8	4	2	1	0	5	2	6	3	1	5	7	8	9	4	7
8/19	4	2	1	0	5	2	6	3	1	5	7	8	9	4	7	3	6	8
9/19	4	7	3	6	8	4	2	1	0	5	2	6	3	1	5	7	8	9
10/19	5	2	6	3	1	5	7	8	9	4	7	3	6	8	4	2	1	0
11/19	5	7	8	9	4	7	3	6	8	4	2	1	0	5	2	6	3	1
12/19	6	3	1	5	7	8	9	4	7	3	6	8	4	2	1	0	5	2
13/19	6	8	4	2	1	0	5	2	6	3	1	5	7	8	9	4	7	3
14/19	7	3	6	8	4	2	1	0	5	2	6	3	1	5	7	8	9	4
15/19	7	8	9	4	7	3	6	8	4	2	1	0	5	2	6	3	1	5
16/19	8	4	2	1	0	5	2	6	3	1	5	7	8	9	4	7	3	6
17/19	8	9	4	7	3	6	8	4	2	1	0	5	2	6	3	1	5	7
18/19	9	4	7	3	6	8	4	2	1	0	5	2	6	3	1	5	7	8

y es fácil chequear que todas las filas, columnas y diagonales suman 81.

Notemos que 19 es el número primo más chico con esta propiedad. Las fracciones con denominador primo p son periódicas. Algunas, como sucede con $p = 11$ ó 13 no tienen períodos de longitud $p - 1$, si no que son más pequeños. Los primos $p = 7$ y 17 sí tienen períodos de longitud $p - 1$, pero las sumas de las diagonales en el cuadrado $(p - 1) \times (p - 1)$ correspondiente no da igual que las sumas de las filas y columnas (¡chequear!)

PROBABILIDADES EN EL JUEGO DEL TRUCO

Emiliano Gómez

RESUMEN. Utilizando ideas básicas de probabilidad, combinatoria y conjuntos, calculamos varias probabilidades relacionadas al popular juego del truco.

ABSTRACT. Using basic ideas from probability, combinatorics and sets, we compute several probabilities related to the popular card game called “truco” .

§1. Introducción

El truco es un juego de naipes muy popular en Sudamérica, con distintas variantes en distintos países o regiones. Se usa la baraja española. El mazo contiene 40 cartas, repartidas en cuatro palos que son oros, copas, espadas y bastos. Las diez cartas de cada palo son el as (1), 2, 3, 4, 5, 6, 7, sota (10), caballo (11) y rey (12). Las tres últimas se llaman figuras.

La mano de cada jugador consiste en tres de las 40 cartas. En este ensayo explicamos cómo calcular varias probabilidades asociadas a la mano de un jugador. Algunos ejemplos son:

- la probabilidad de tener el as de espadas;
- la probabilidad de tener al menos una carta mejor que un 2 para el truco;
- la probabilidad de tener flor;
- la probabilidad de tener al menos dos cartas del mismo palo;
- la probabilidad de tener 33 para el envido;
- la probabilidad de tener 27 o más para el envido.

También vamos a calcular algunas probabilidades asociadas a una “ronda”, es decir las dos, cuatro o seis manos juntas si se juega entre dos, cuatro o seis jugadores. Por ejemplo, vamos a obtener la probabilidad de que algún jugador tenga el as de espadas, o de que en la ronda haya al menos una carta que valga más que un 3 para el truco.

Palabras clave: Probabilidad. Combinatoria. Conjuntos. Juego del truco.

Keywords: Probability. Combinatorics. Sets. Truco (card game).

Si al lector no le interesa cómo se obtienen estas probabilidades, o si en algún momento la lectura se le hace pesada, siempre puede dirigirse directamente al final, donde incluimos algunas tablas con probabilidades de interés para el juego.

Como es sabido, en el truco se miente, se trata de engañar al otro jugador o al otro equipo. El conocimiento de estas probabilidades puede llegar a ser útil para tomar algunas decisiones durante el juego, pero no puede, por sí solo, convertir a nadie en un buen jugador. Se necesita práctica y, a través de ella, el desarrollo de una intuición para el juego y de distintas tácticas o estrategias según cada situación o adversario(s).

Damos por supuesto que el lector sabe jugar al truco, o al menos tiene una idea general del juego. De todos modos, como hay distintas variantes, un apéndice al final contiene un breve repaso de la jerarquía de las cartas para el truco y del puntaje para el envido en la versión que, creemos, es la más común en la Argentina, y que usamos en este ensayo para calcular probabilidades.

Suponemos también que el lector tiene un conocimiento básico de probabilidad y combinatoria, incluyendo los números combinatorios

$$C(n, k) = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

(recordemos que $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$). Por ejemplo, si tenemos 7 jugadores y queremos formar un equipo de baloncesto con 5 de ellos, el número de equipos diferentes que podemos formar es $C(7, 5) = \frac{7!}{2!5!} = \frac{7 \times 6}{2} = 21$. Los libros (Anderson, 2001) y (Isaac, 1995) citados al final son muy accesibles y se pueden usar como una buena introducción a varios temas de combinatoria y probabilidad.

§2. Probabilidades para la mano de un jugador

Empecemos por calcular el número de manos posibles. Como el mazo tiene 40 cartas y la mano de un jugador consiste en tres de ellas, hay un total de

$$C(40, 3) = \frac{40 \times 39 \times 38}{2 \times 3} = 20 \times 13 \times 38 = 9.880$$

manos distintas. Este número juega un papel central, ya que la probabilidad de tener una mano con cierta propiedad es el número de manos que poseen esa propiedad dividido por el número total de manos distintas. Por supuesto, este cálculo se basa en la suposición de que cada una de las 9.880 manos posibles tiene la misma probabilidad (algo que no sería cierto, por ejemplo, si el repartidor hace trampa, o si alguien esconde una carta sacándola del mazo).

Probabilidad de tener una carta específica. Si a es una carta específica, ¿cuál es la probabilidad de tenerla en la mano? Por ejemplo, ¿cuál es la probabilidad de tener el as de espadas? Hay dos maneras diferentes de calcular esta probabilidad. Por un lado, la probabilidad de que la carta a se encuentre en un conjunto de k cartas

del mazo ($0 \leq k \leq 40$) es claramente $\frac{k}{40}$. Por ejemplo, si agarramos 20 cartas al azar, la probabilidad de que el as de espadas sea una de esas 20 cartas es $\frac{20}{40} = \frac{1}{2}$. Como la mano de un jugador es un conjunto de tres cartas, la probabilidad de tener la carta a es $\frac{3}{40} = 0,075$.

Pero también podemos razonar que el número de manos que contienen la carta a es $C(39, 2) = \frac{39 \times 38}{2} = 39 \times 19 = 741$, porque para formar una mano que contenga la carta a , tenemos que elegir dos cartas más, de entre las 39 cartas que quedan. Por lo tanto, la probabilidad de tener la carta a es

$$\frac{C(39, 2)}{C(40, 3)} = \frac{741}{9.880} = 0,075.$$

Probabilidad de tener dos cartas específicas. ¿Cuál es la probabilidad de tener, en una mano, dos cartas específicas a y b ? Por ejemplo, ¿cuál es la probabilidad de tener el as de espadas y el as de bastos? Una vez más, se puede razonar de dos maneras. Por un lado, podemos pensar que la probabilidad de tener a y también b es la probabilidad de tener a , multiplicada por la probabilidad de que una de las otras dos cartas sea b . Esto nos da

$$\frac{3}{40} \times \frac{2}{39} = \frac{1}{20 \times 13} = \frac{1}{260} \approx 0,003846.$$

Por otro lado, también podemos pensar que hay $C(38, 1) = 38$ manos que contienen las dos cartas a y b , ya que para formar una mano con ellas, tenemos que elegir una carta más, de las 38 que quedan. Por lo tanto, la probabilidad de tener las dos cartas a y b es

$$\frac{C(38, 1)}{C(40, 3)} = \frac{38}{9.880} = \frac{1}{260} \approx 0,003846.$$

Probabilidad de tener tres cartas específicas. La probabilidad de tener tres cartas específicas a , b y c (por ejemplo, la probabilidad de tener el as, el siete y el seis de espadas) es claramente $\frac{1}{9.880} \approx 0,0001$. Siguiendo con los razonamientos anteriores, podemos obtener esta probabilidad ya sea como $\frac{3}{40} \times \frac{2}{39} \times \frac{1}{38}$ o como $\frac{1}{C(40, 3)}$, ya que obviamente hay una sola mano que contiene las tres cartas.

Probabilidad de tener (al menos) una de dos cartas específicas. Hemos visto que la probabilidad de tener el as de espadas y el as de bastos es $\frac{1}{260}$. Pero también nos interesa la probabilidad de tener el as de espadas o el as de bastos. Siempre usamos el “o” de modo inclusivo. En este ejemplo, nos referimos a la probabilidad de tener el as de espadas, o el as de bastos, o ambas cartas. Es decir, la probabilidad de tener al menos una de ellas. Si a y b son dos cartas específicas, ¿cuál es la probabilidad de tener al menos una de ellas en la mano?

Aquí las cosas se empiezan a complicar un poco, porque debemos tener cuidado al contar el número de manos que contienen al menos una de las dos cartas. El número de manos que contienen la carta a es $C(39, 2) = 741$. Del mismo modo, el

número de manos que contienen la carta b es 741. Si sumamos los dos números, $741 + 741$, ¿obtenemos el número de manos que contienen la carta a o la carta b ? No, porque hemos contado dos veces cada una de las manos que contienen ambas cartas. Por lo tanto, debemos restar el número de manos que contienen ambas cartas. Este número es $C(38, 1) = 38$. El resultado es que el número de manos que contienen al menos una de las dos cartas es $741 + 741 - 38 = 1.444$. Ahora podemos calcular la probabilidad de tener la carta a o la carta b , es decir la probabilidad de tener al menos una de ellas en la mano es

$$\frac{1.444}{9.880} \approx 0,14615.$$

Desde luego, esta probabilidad es mucho mayor que la probabilidad de tener ambas cartas ($\frac{1}{260} \approx 0,003846$).

Conjuntos. Nos interesa generalizar el razonamiento anterior para calcular la probabilidad de que dadas k cartas del mazo, nos toque una mano que contenga al menos una de ellas (acabamos de hacerlo para $k = 2$). Esto nos permitirá encontrar, por ejemplo, la probabilidad de tener (al menos) un tres en la mano ($k = 4$), o la probabilidad de tener (al menos) una carta que valga más que un dos para el truco ($k = 8$).

En realidad, estamos trabajando con conjuntos, y es muy conveniente usar la terminología correspondiente para calcular probabilidades. Repasemos algunas de las cosas que ya vimos, en términos de conjuntos.

Llamemos S al conjunto de todas las cartas del mazo:

$$S = \{\text{as de oros, 2 de oros, } \dots, \text{rey de oros, as de copas, } \dots, \text{rey de bastos}\}.$$

Si un conjunto A tiene (exactamente) n elementos, escribimos $|A| = n$. Por ejemplo, $|S| = 40$. Escribimos $a \in A$ cuando a es un elemento de A y $a \notin A$ cuando no lo es. Se dice que A es un subconjunto de B , y escribimos $A \subseteq B$, si cada elemento de A es también un elemento de B . Por ejemplo, si $O = \{\text{as de oros, 2 de oros, } \dots, \text{rey de oros}\}$ es el conjunto de todos los oros del mazo, tenemos que $O \subseteq S$. Otro modo de definir el conjunto O es así: $O = \{s \in S : s \text{ es de oros}\}$.

Llamemos M al conjunto de todas las manos posibles:

$$M = \{T : T \subseteq S \text{ y } |T| = 3\}.$$

Es decir, un elemento de M (una mano) es un subconjunto T del mazo que contiene (exactamente) tres cartas. Como vimos al principio,

$$|M| = C(40, 3) = 9.880.$$

La unión de dos conjuntos A y B es $A \cup B = \{s : s \in A \text{ o } s \in B\}$. Recordemos que el “o” es inclusivo: consiste en todos los elementos que pertenecen a A , o a B , o a

ambos conjuntos. La intersección de A y B es $A \cap B = \{s : s \in A \text{ y } s \in B\}$. Es decir, consiste en todos los elementos que pertenecen a ambos conjuntos, A y B .

El conjunto A de todas las manos que contienen una carta específica a es

$$A = \{T \in M : a \in T\}.$$

Como vimos, $|A| = C(39, 2) = 741$. Si $B = \{T \in M : b \in T\}$ es el conjunto de todas las manos que contienen la carta b , entonces $A \cap B$ es el conjunto de todas las manos que contienen ambas cartas a y b , mientras que $A \cup B$ es el conjunto de todas las manos que contienen una carta o la otra, es decir, que contienen al menos una de las dos cartas. Como vimos,

$$|A \cap B| = C(38, 1) = 38 \quad \text{y} \quad |A \cup B| = 741 + 741 - 38 = 1.444.$$

La unión e intersección de los conjuntos A_1, A_2, \dots, A_n se definen así:

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^n A_i = \{s : s \in A_1 \text{ o } s \in A_2 \text{ o } \dots \text{ o } s \in A_n\}$$

$$A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^n A_i = \{s : s \in A_1 \text{ y } s \in A_2 \text{ y } \dots \text{ y } s \in A_n\}$$

Es decir, la unión es el conjunto de elementos que pertenecen a por lo menos uno de A_1, A_2, \dots, A_n , y la intersección es el conjunto de elementos que pertenecen a todos estos conjuntos.

Si A y B son los conjuntos que definimos arriba y $C = \{T \in M : c \in T\}$ es el conjunto de todas las manos que contienen la carta c , entonces $A \cap B \cap C$ es el conjunto de todas las manos que contienen las tres cartas a, b y c . Por supuesto, hay una sola mano, $T_{abc} = \{a, b, c\}$, que contiene las tres cartas. Así que $A \cap B \cap C = \{T_{abc}\}$ y $|A \cap B \cap C| = 1$. En cambio, $A \cup B \cup C$ es el conjunto de todas las manos que contienen al menos una de las tres cartas. ¿Cuántos elementos tiene este conjunto? Para responder esta pregunta, debemos generalizar el método que empleamos para calcular $|A \cup B|$.

Principio de inclusión-exclusión. Veamos, en términos de conjuntos, cómo contamos el número de todas las manos que contienen la carta a o la carta b . Si A es el conjunto de todas las manos que contienen la carta a y B es el conjunto de todas las manos que contienen la carta b , la cuenta que hicimos es

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

(nos dió $741 + 741 - 38 = 1.444$), para no contar dos veces las manos que contienen ambas cartas, que son el conjunto $A \cap B$. Este modo de contar el número de elementos en una unión se generaliza a más de dos conjuntos. El resultado es el principio de inclusión-exclusión, llamado así por el modo en que vamos sumando y restando elementos de distintos subconjuntos de la unión.

Veamos por ejemplo cómo calcular $|A \cup B \cup C|$. Si sumamos $|A| + |B| + |C|$, hemos contado dos veces a los elementos que están en A y B pero no en C , a los elementos que están en A y C pero no en B , y a los elementos que están en B y C pero no en A . También contamos tres veces a los elementos que están en A , B y C (es decir, a los elementos de $A \cap B \cap C$). Tratemos de corregir el doble conteo restando los elementos de las intersecciones de dos conjuntos: $|A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C|$. Al hacer esto, restamos tres veces a los elementos de $A \cap B \cap C$. Estos elementos habían sido contados tres veces, por lo que el resultado neto hasta el momento es que no los hemos contado. Por lo tanto, sólo falta volverlos a sumar, para finalmente obtener

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

Podemos obtener la misma fórmula si pensamos en $A \cup B \cup C$ como $(A \cup B) \cup C$ y usamos el resultado anterior con los dos conjuntos $A \cup B$ y C . Este razonamiento se puede extender por inducción para obtener el principio de inclusión-exclusión. La fórmula general es algo complicada, por lo que no la vamos a escribir aquí (referimos al lector interesado al capítulo 6 de (Anderson, 2001)). Pero lo que nos dice es bastante sencillo: para calcular el número de elementos de la unión de n conjuntos, hay que

- sumar el número de elementos de cada conjunto,
- restar el número de elementos de cada intersección de dos conjuntos a la vez,
- sumar el número de elementos de cada intersección de tres conjuntos a la vez,
- restar el número de elementos de cada intersección de cuatro conjuntos a la vez,
- y continuar así hasta sumar (si n es impar) o restar (si n es par) el número de elementos de la intersección de los n conjuntos.

Por ejemplo, si $n = 4$, obtenemos

$$(2.1) \quad \begin{aligned} |A \cup B \cup C \cup D| = & |A| + |B| + |C| + |D| \\ & - |A \cap B| - |A \cap C| - |A \cap D| - |B \cap C| - |B \cap D| - |C \cap D| \\ & + |A \cap B \cap C| + |A \cap B \cap D| + |A \cap C \cap D| + |B \cap C \cap D| \\ & - |A \cap B \cap C \cap D| \end{aligned}$$

Probabilidad de tener (al menos) una de tres cartas específicas. Ahora podemos volver al truco y a las probabilidades. ¿Cuál es la probabilidad de tener en la mano (al menos) una de tres cartas específicas a , b y c ? Por ejemplo, ¿cuál es la probabilidad de tener la sota, el caballo o el rey de oros?

Si A es el conjunto de todas las manos que contienen la carta a , B es el conjunto de todas las manos que contienen la carta b , y C es el conjunto de todas las manos que contienen la carta c , entonces el número de manos que contienen al menos una de las tres cartas es

$$\begin{aligned} |A \cup B \cup C| &= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| \\ &= 3 \times 741 - 3 \times 38 + 1 = 2.110. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la probabilidad de tener (al menos) una de las tres cartas es

$$\frac{|A \cup B \cup C|}{|M|} = \frac{2.110}{9.880} \approx 0,21356.$$

Probabilidad de tener (al menos) una de cuatro cartas específicas. ¿Cuál es la probabilidad de tener (al menos) un tres en la mano? Si A es el conjunto de todas las manos que contienen la carta a , B es el conjunto de todas las manos que contienen la carta b , C es el conjunto de todas las manos que contienen la carta c , y D es el conjunto de todas las manos que contienen la carta d , entonces el número de manos que contienen al menos una de las cuatro cartas es $|A \cup B \cup C \cup D|$, y lo podemos calcular usando la ecuación (2.1) de arriba.

Aquí surge una nueva “complicación”, ya que debemos tener en cuenta que una mano tiene sólo tres cartas y por lo tanto, no es posible tener en la mano las cuatro cartas a , b , c y d . Esto significa que $|A \cap B \cap C \cap D| = 0$. Pusimos “complicación” entre comillas porque en realidad, esto nos facilita las cuentas. Nos queda

$$|A \cup B \cup C \cup D| = 4 \times 741 - 6 \times 38 + 4 \times 1 = 2.740.$$

Por lo tanto, la probabilidad de tener una (o dos o tres) de las cuatro cartas en nuestra mano es

$$\frac{|A \cup B \cup C \cup D|}{|M|} = \frac{2.740}{9.880} \approx 0,27733.$$

Probabilidad de tener (al menos) una de k cartas específicas. Si nos fijamos en la cuenta que hicimos, $|A \cup B \cup C \cup D| = 4 \times 741 - 6 \times 38 + 4 \times 1 = 2740$, es evidente que los “coeficientes” 4, 6 y 4 se deben a que hay 4 maneras de elegir uno de los cuatro conjuntos A , B , C y D , hay 6 maneras de elegir dos de ellos, y hay 4 maneras de elegir tres de ellos. Es decir, la cuenta es

$$|A \cup B \cup C \cup D| = C(4,1) \times 741 - C(4,2) \times 38 + C(4,3) \times 1.$$

El mismo razonamiento sirve para calcular la probabilidad de tener en la mano (al menos) una de las k cartas a_1, a_2, \dots, a_k . Si para cada $1 \leq i \leq k$ definimos $A_i = \{T \in M : a_i \in T\}$ (el conjunto de todas las manos que contienen la carta a_i), entonces el conjunto de todas las manos que contienen (al menos) una de las k cartas es $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k = \bigcup_{i=1}^k A_i$.

Recordemos nuevamente que no podemos tener más de tres cartas en la mano, por lo que todas las intersecciones de cuatro o más de los conjuntos A_i son nulas. Combinando esto con el principio de inclusión-exclusión, resulta que $|\bigcup_{i=1}^k A_i| = C(k, 1) \times 741 - C(k, 2) \times 38 + C(k, 3) \times 1$. Hay $C(k, 1) = k$ maneras de elegir uno de los k conjuntos A_1, A_2, \dots, A_k , y cada uno de ellos tiene 741 elementos. Hay $C(k, 2)$ maneras de elegir dos de los k conjuntos, y cada una de las intersecciones de dos conjuntos tiene 38 elementos. Hay $C(k, 3)$ maneras de elegir tres de los k conjuntos, y cada una de las intersecciones de tres conjuntos tiene un único elemento. La probabilidad de tener (al menos) una de las k cartas a_1, a_2, \dots, a_k es, por lo tanto,

$$(2.2) \quad \frac{|\bigcup_{i=1}^k A_i|}{|M|} = \frac{C(k, 1) \times 741 - C(k, 2) \times 38 + C(k, 3) \times 1}{9.880}.$$

Repasemos los valores de k para los que ya hicimos la cuenta: $k = 2, 3$ y 4 . Cuando $k = 2$, la ecuación (2.2) nos da

$$\frac{2 \times 741 - 1 \times 38 + 0 \times 1}{9.880} = \frac{1.444}{9.880} \approx 0,14615,$$

ya que $C(2, 1) = 2$, $C(2, 2) = 1$ y $C(2, 3) = 0$. Cuando $k = 3$, obtenemos

$$\frac{3 \times 741 - 3 \times 38 + 1 \times 1}{9.880} = \frac{2.110}{9.880} \approx 0,21356,$$

ya que $C(3, 1) = 3$, $C(3, 2) = 3$ y $C(3, 3) = 1$. Y cuando $k = 4$, obtenemos

$$\frac{4 \times 741 - 6 \times 38 + 4 \times 1}{9.880} = \frac{2.740}{9.880} \approx 0,27733,$$

ya que $C(4, 1) = 4$, $C(4, 2) = 6$ y $C(4, 3) = 4$.

Calculemos ahora la probabilidad de tener (al menos) una de k cartas específicas cuando $k = 8$ y $k = 12$, casos de interés en el juego del truco. Cuando $k = 8$, obtenemos la probabilidad de tener (al menos) una carta que valga más que un dos para el truco. Cuando $k = 12$, obtenemos la probabilidad de tener alguna carta que valga más que el as de oros (o de copas), o también la probabilidad de tener alguna figura (sota, caballo o rey). Invitamos al lector a comprobar que si $k = 8$, la ecuación (2.2) nos da

$$\frac{4.920}{9.880} \approx 0,49798,$$

y si $k = 12$, nos da

$$\frac{6.604}{9.880} \approx 0,66842.$$

Es decir que a la larga, más o menos la mitad de las manos que nos tocan deberían tener al menos una carta mejor que un dos para el truco, y más o menos dos tercios de las manos deberían incluir alguna figura.

Si nos fijamos en la probabilidad de tener (al menos) una de k cartas específicas para los valores de k que hemos compilado ($k = 2, 3, 4, 8$ y 12), podemos confirmar algo que es obvio sin hacer ninguna cuenta: la probabilidad aumenta con k

y tiende a 1. Cuando $k = 37$, la probabilidad es $\frac{9.879}{9.880} \approx 0,9999$, ya que todas las manos menos una contienen (al menos) una de las 37 cartas. La única excepción es la mano que contiene las tres cartas que quedan. Cuando $k = 38, 39$ o 40 , la probabilidad es 1, ya que todas las manos contienen al menos una de las k cartas. El lector puede comprobar por su cuenta que la ecuación (2.2) nos da la probabilidad correcta para $k = 37, 38, 39$ y 40 .

Complementos. La ecuación (2.2) no es la única manera de calcular la probabilidad de tener (al menos) una de k cartas específicas. Si usamos la idea del complemento de un conjunto, podemos obtener una fórmula más sencilla. Llamemos A al conjunto de todas las manos que poseen una cierta propiedad y B al conjunto de todas las manos que no poseen esta propiedad. Entonces $A \cap B = \emptyset$ (el conjunto vacío) y $A \cup B = M$ (el conjunto de todas las manos posibles). En un caso así, decimos que A es el complemento de B en M (y que B es el complemento de A en M). Por lo tanto, $|A| + |B| = |M| = 9.880$. Como la probabilidad de que una mano tenga la propiedad en cuestión es $\frac{|A|}{|M|}$, está claro que la probabilidad de que una mano no tenga esta propiedad es

$$\frac{|B|}{|M|} = 1 - \frac{|A|}{|M|}.$$

Si A es el conjunto de todas las manos que tienen (al menos) una de k cartas específicas, entonces su complemento es el conjunto B de todas las manos que no contienen ninguna de estas k cartas. Tenemos que $|B| = C(40 - k, 3)$, ya que para formar una mano de B , debemos elegir tres cartas de las $40 - k$ que hay disponibles. Por lo tanto, la probabilidad de no tener ninguna de las k cartas es $\frac{C(40-k,3)}{9.880}$, y la probabilidad de tener (al menos) una de ellas es

$$(2.3) \quad 1 - \frac{C(40 - k, 3)}{9.880}.$$

El lector puede verificar que esta fórmula coincide con la ecuación (2.2) para todos los valores de k que hemos calculado.

Las probabilidades que hemos calculado hasta ahora son más que nada útiles para el truco. Calculemos algunas probabilidades útiles para el envido. Antes de calcular la probabilidad de tener cantidades específicas, hagamos algunas cuentas relacionadas a la probabilidad de tener en la mano cartas del mismo palo o de distintos palos.

Probabilidad de tener tres cartas de distintos palos. ¿Cuál es la probabilidad de tener una mano cuyas tres cartas son de tres palos diferentes? Dicho de otro modo, ¿cuál es la probabilidad de tener 7 o menos para el envido? Hay dos maneras de pensarlo. Por un lado, sin importarnos la primera carta, queremos que la segunda no sea del mismo palo, y que la tercera no sea del mismo palo que ninguna de las

dos primeras. Esto nos da

$$\frac{40}{40} \times \frac{30}{39} \times \frac{20}{38} = \frac{10}{13} \times \frac{10}{19} = \frac{100}{247} \approx 0,40486.$$

Por otro lado, podemos también contar el número total de manos que contienen cartas de tres palos distintos. Hay $C(4, 3) = 4$ posibilidades para los tres palos, ya que hay cuatro palos y hay que elegir tres de ellos. Cada una de estas posibilidades cuenta con $10 \times 10 \times 10 = 1000$ manos diferentes, ya que hay diez cartas de cada palo. Por último, cada conjunto de 1000 manos obtenidas de esta manera es disjunto de los demás (es decir que tienen intersección vacía o nula. No tienen ningún elemento en común). Por ejemplo, ninguna mano que tenga una carta de oros, una de copas y una de espadas puede ser igual a una mano que tenga una carta de oros, una de copas y una de bastos. Por lo tanto, el número total de manos que contienen cartas de tres palos distintos es 4000, y la probabilidad de tener una mano así es

$$\frac{4.000}{9.880} = \frac{100}{247} \approx 0,40486.$$

Probabilidad de tener (al menos) dos cartas del mismo palo. Si A es el conjunto de todas las manos con cartas de tres palos distintos, entonces su complemento es el conjunto B de todas las manos que tienen al menos dos cartas del mismo palo. Recién calculamos que $|A| = 4.000$, así que $|B| = |M| - |A| = 9.880 - 4.000 = 5880$. La probabilidad de tener (al menos) dos cartas del mismo palo, es decir de tener 20 o más para el envideo, es

$$1 - \frac{100}{247} = \frac{147}{247} \approx 0,59514$$

o, si se prefiere, $\frac{5.880}{9.880} = \frac{147}{247} \approx 0,59514$.

Probabilidad de tener tres cartas del mismo palo (flor). La flor no nos interesa mucho (ver el apéndice al final). Pero al menos calculemos la probabilidad de que nos toque una. Nuevamente, podemos pensarlo de dos maneras. Por un lado, sin importarnos la primera carta, queremos que la segunda sea del mismo palo, y que la tercera lo sea también. Esto nos da

$$\frac{40}{40} \times \frac{9}{39} \times \frac{8}{38} = \frac{12}{247} \approx 0,04858.$$

Por otra parte, podemos también contar el número de manos que contienen tres cartas del mismo palo. Hay cuatro palos, y para cada uno de ellos, debemos elegir tres de las diez cartas. Esto nos da $4 \times C(10, 3) = 4 \times 120 = 480$ manos (cada conjunto de 120 manos es disjunto de los demás), y la probabilidad de tener flor es

$$\frac{480}{9.880} = \frac{12}{247} \approx 0,04858.$$

A la larga, nos debería tocar flor menos de $\frac{1}{20}$ de las manos.

Probabilidad de tener (al menos) una carta de un palo específico. ¿Cuál es la probabilidad de tener (al menos) un oro en la mano? Hay diez cartas de cada palo, así que la probabilidad de tener al menos una de las diez cartas de un cierto palo es, según (2.2) con $k = 10$,

$$\frac{5.820}{9.880} \approx 0,58907.$$

Probabilidad de tener ciertas cantidades para el envido. Las cuentas que hicimos de la probabilidad de tener una mano con tres palos distintos, y la de tener al menos dos cartas del mismo palo, nos dan la probabilidad de tener 7 o menos, y la de tener 20 o más para el envido (respectivamente). Ahora calculemos la probabilidad de tener (exactamente) ciertas cantidades específicas. Al final las compilamos en una tabla que nos dice no sólo la probabilidad para cada cantidad, sino también la probabilidad de tener una cierta cantidad o más. Esto último se puede hacer con una simple suma, ya que obviamente ninguna mano que valga m para el envido puede ser igual a una mano que valga $n \neq m$.

Aclaremos (ver el apéndice al final) que si un jugador tiene tres cartas del mismo palo (flor), entonces *para el envido se usan las dos mejores*. Por ejemplo, la mano {rey de oros, 2 de oros, 7 de oros} vale 29 de envido, y la mano {2 de copas, 3 de copas, 5 de copas} vale 28 de envido.

Probabilidad de tener 33 de envido. Ya vimos que la probabilidad de tener dos cartas específicas es $\frac{1}{260}$. La única manera de tener 33 de envido es tener el 7 y el 6 de un mismo palo. Como hay cuatro palos, y ninguna mano que tenga el 7 y el 6 de un palo puede ser igual a otra que tenga el 7 y el 6 de otro palo, está claro que la probabilidad es

$$4 \times \frac{1}{260} = \frac{1}{65} \approx 0,01538.$$

Otro modo de pensarlo es que para cada palo, hay $C(38, 1) = 38$ manos que contienen el 7 y el 6 de ese palo. Como hay cuatro palos y los cuatro conjuntos de 38 manos son disjuntos, hay $4 \times 38 = 152$ manos que tienen 33 de envido. La probabilidad es, por lo tanto,

$$\frac{152}{9.880} = \frac{1}{65} \approx 0,01538.$$

Probabilidad de tener 32 de envido. Nuevamente, lo vamos a pensar de dos maneras. Por un lado, la probabilidad de tener 32 de envido es cuatro veces la probabilidad de tener 32 de oros (o de cualquier otro palo). Para tener 32 de oros, necesitamos que una de nuestras cartas sea el 7 de oros, otra sea el 5 de oros, y la tercera no sea el 6 de oros (de lo contrario, tendríamos 33, ya que usamos las dos mejores cartas). Esto nos da

$$4 \times \frac{3}{40} \times \frac{2}{39} \times \frac{37}{38} = \frac{37}{2.470} \approx 0,01498.$$

Curiosamente, debido a la restricción de que la tercera carta no puede ser el 6 del palo en cuestión, es más probable tener 33 que 32 de envideo (aunque la diferencia es pequeñísima). Como veremos, hay varios casos así, en que una cantidad más grande de envideo es más probable que una cantidad menor. De todos modos, lo que realmente importa en el juego es la probabilidad de tener cierta cantidad o más.

Otra manera de calcular la probabilidad de tener 32 de envideo es contando el número de manos que tienen esta propiedad. Para cada palo, hay que tener el 7 y el 5, y no tener el 6. Por lo tanto, para cada palo, hay 37 manos con 32 de envideo (para completar la mano que ya tiene el 7 y el 5, debemos elegir una carta más de las 37 que nos quedan a disposición, ya que no podemos elegir ni el 7, ni el 5, ni el 6 del palo en cuestión). Así que hay $4 \times 37 = 148$ manos que tienen 32 de envideo, y la probabilidad es

$$\frac{148}{9.880} = \frac{37}{2.470} \approx 0,01498.$$

Probabilidad de tener 31, 30, 29 y 28 de envideo. Aquí las cuentas se complican un poquito, porque hay más de una manera de tener 31 de envideo: teniendo el 7 y el 4 (pero no el 6 ni el 5), o teniendo el 6 y el 5 (pero no el 7) de algún palo. Por lo tanto, la probabilidad de tener (exactamente) 31 de envideo es

$$4 \times \frac{3}{40} \times \frac{2}{39} \times \frac{36}{38} + 4 \times \frac{3}{40} \times \frac{2}{39} \times \frac{37}{38} \approx 0,02955.$$

También podemos contar las manos que valen 31 de envideo. Tenemos 4×36 manos que valen 31 de envideo porque tienen el 7 y el 4 pero no el 6 ni el 5 de algún palo (para completar la mano, tenemos que elegir una de entre 36 cartas), y también tenemos 4×37 manos que valen 31 de envideo porque tienen el 6 y el 5 pero no el 7 de algún palo (para completar la mano, tenemos que elegir una de entre 37 cartas). Todas estas manos son diferentes, así que la probabilidad de tener 31 de envideo es

$$\frac{4 \times (36 + 37)}{9.880} = \frac{292}{9.880} \approx 0,02955.$$

Invitamos al lector a comprobar por su cuenta las siguientes probabilidades, usando cualquiera de los dos métodos que venimos usando.

Se puede tener 30 de envideo ya sea con 7 y 3 (pero no el 6, 5 o 4) o con 6 y 4 (pero no el 7 o 5). La probabilidad de tener 30 de envideo es

$$4 \times \frac{3}{40} \times \frac{2}{39} \times \frac{35}{38} + 4 \times \frac{3}{40} \times \frac{2}{39} \times \frac{36}{38} = \frac{4 \times (35 + 36)}{9.880} \approx 0,02874.$$

La probabilidad de tener 29 de envideo es

$$\frac{4 \times (34 + 35 + 36)}{9.880} \approx 0,04251,$$

y la de tener 28 es

$$\frac{4 \times (33 + 34 + 35)}{9.880} \approx 0,04130.$$

Probabilidad de tener 27 de envideo. Para calcular la probabilidad de tener 27 de envideo, tenemos que sortear una nueva complicación: ahora entran en juego las figuras (sota, caballo y rey). Se puede tener 27 de envideo ya sea con el 7 y una figura (pero no el 6, 5, 4, 3, 2 o 1), o con el 6 y el 1 (pero no el 7, 5, 4, 3 o 2), o con el 5 y el 2 (pero no el 7, 6, 4 o 3), o con el 4 y el 3 (pero no el 7, 6 o 5) de algún palo.

Las manos con 27 de envideo que no involucran al 7 y una figura las podemos contar como hicimos hasta ahora:

$$4 \times (33 + 34 + 35) = 408.$$

Contemos ahora las manos con 27 de envideo que involucran al 7 y una figura. Antes que nada, está claro que los conjuntos de manos con 27 de envideo de cada palo son disjuntos (por ejemplo, ninguna mano puede tener 27 de envideo usando oros y a la vez 27 de envideo usando copas). Así que contemos las manos con 27 de envideo usando un palo específico, y al final multiplicamos por 4, el número de palos. También está claro que estas manos con 7 y figura son disjuntas de las 408 que contamos antes.

Llamemos A al conjunto de todas las manos que contienen el 7 de oros, la sota de oros, y otra carta que no sea ni el 6, ni el 5, ni el 4, ni el 3, ni el 2, ni el 1 de oros. Llamemos B al conjunto de todas las manos que contienen el 7 de oros, el caballo de oros, y otra carta que no sea ni el 6, ni el 5, ni el 4, ni el 3, ni el 2, ni el 1 de oros. Y llamemos C al conjunto de todas las manos que contienen el 7 de oros, el rey de oros, y otra carta que no sea ni el 6, ni el 5, ni el 4, ni el 3, ni el 2, ni el 1 de oros. Entonces $A \cup B \cup C$ es el conjunto de todas las manos que valen 27 de envideo por tener el 7 y una figura de oros, y queremos saber cuántos elementos tiene. Es decir, buscamos $|A \cup B \cup C|$.

El principio de inclusión-exclusión nos dice que $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$. Es evidente que $|A| = |B| = |C| = 32$. Por ejemplo, para formar una mano que pertenezca a A , tenemos que elegir una carta entre las 32 que hay disponibles: ya están tomadas el 7 y la sota de oros, y no podemos usar tampoco del 1 al 6 de oros (de lo contrario, la mano valdría más que 27 para el envideo). También tenemos que $|A \cap B| = |A \cap C| = |B \cap C| = 1$. Por ejemplo, una mano de $A \cap B$ debe contener el 7 y la sota de oros, y también debe contener el 7 y el caballo de oros. Pero hay una sola mano, {7 de oros, sota de oros, caballo de oros}, que cumple con ambos requisitos. Por último, $|A \cap B \cap C| = 0$ ya que $A \cap B \cap C = \emptyset$, el conjunto vacío: ninguna mano (que, recordemos, contiene exactamente tres cartas) puede contener el 7 y la sota, y contener el 7 y el caballo, y contener el 7 y el rey de oros.

El número de manos que valen 27 de envideo por tener el 7 y una figura de oros es, según lo que acabamos de razonar, $3 \times 32 - 3 \times 1 = 93$. Como ya dijimos, $4 \times 93 = 372$ es entonces el número de manos que valen 27 de envideo por tener el 7 y una figura de cualquier palo, y $408 + 372 = 780$ es el número total de manos que valen 27 para el envideo. Por lo tanto, la probabilidad de tener (exactamente) 27 de envideo es

$$\frac{780}{9.880} \approx 0,07895.$$

Probabilidad de tener 26, 25, 24, 23, 22 y 21 de envideo. Razonando de la misma manera, podemos calcular la probabilidad de tener cualquier cantidad entre 21 y 26 de envideo.

Se puede tener 26 de envideo ya sea con 6 y figura (pero no el 7, 5, 4, 3, 2 o 1), o con 5 y 1 (pero no el 7, 6, 4, 3 o 2), o con 4 y 2 (pero no el 7, 6, 5 o 3). La probabilidad es

$$\frac{372 + 4 \times (33 + 34)}{9.880} = \frac{640}{9.880} \approx 0,06478.$$

La cuenta para 25 es idéntica, como el lector puede comprobar.

Se puede tener 24 de envideo ya sea con 4 y figura (pero no el 7, 6, 5, 3, 2 o 1), o con 3 y 1 (pero no el 7, 6, 5, 4 o 2). La probabilidad es

$$\frac{372 + 4 \times 33}{9.880} = \frac{504}{9.880} \approx 0,05101.$$

La cuenta para 23 es idéntica.

Se puede tener 22 de envideo solamente con 2 y figura (pero no el 7, 6, 5, 4, 3 o 1), y se puede tener 21 de envideo solamente con 1 y figura (pero no el 7, 6, 5, 4, 3 o 2). La probabilidad en ambos casos es

$$\frac{372}{9.880} \approx 0,03765.$$

Probabilidad de tener 20 de envideo. Solamente se puede tener 20 de envideo con dos figuras de un palo y sin el 7, 6, 5, 4, 3, 2 o 1 de ese palo. Contemos el número de manos que valen 20 de envideo usando un palo específico. Llamemos A al conjunto de todas las manos que tienen el rey y el caballo de oros pero no el 7, 6, 5, 4, 3, 2 o 1 de oros. Llamemos B al conjunto de todas las manos que tienen el rey y la sota de oros pero no el 7, 6, 5, 4, 3, 2 o 1 de oros. Y llamemos C al conjunto de todas las manos que tienen el caballo y la sota de oros pero no el 7, 6, 5, 4, 3, 2 o 1 de oros. Entonces $A \cup B \cup C$ es el conjunto de todas las manos que valen 20 de envideo usando dos figuras de oros.

Como ya hemos visto, $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$. Es evidente que $|A| = |B| = |C| = 31$: para completar una mano de A , por ejemplo, debemos elegir una de las 31 cartas disponibles, ya que el rey y el caballo de oros ya están en la mano, y la carta que falta no puede ser el 7, 6, 5, 4, 3, 2 o 1 de oros.

También tenemos que $|A \cap B| = |A \cap C| = |B \cap C| = 1$ y $|A \cap B \cap C| = 1$, porque la única mano que pertenece a cualquiera de estas intersecciones es {rey de oros, caballo de oros, sota de oros}.

Por lo tanto, el número de manos que valen 20 de envideo usando dos figuras de oro es $3 \times 31 - 3 \times 1 + 1 = 91$. Estas manos son todas distintas de cualquier mano que valga 20 de envideo usando dos figuras de otro palo, así que el número total de manos que valen 20 de envideo es $4 \times 91 = 364$. La probabilidad de tener 20 de envideo es

$$\frac{364}{9.880} \approx 0,03684.$$

Nota: Si sumamos las probabilidades que calculamos para cada cantidad de envideo entre 20 y 33 (ver la tabla de probabilidades al final), el resultado es 0,59514... Esta es la probabilidad de tener 20 o más para el envideo, que es lo mismo que tener (al menos) dos cartas del mismo palo. Esa cuenta ya la habíamos hecho con otro razonamiento, y por supuesto, con el mismo resultado.

Probabilidad de tener 7 de envideo. Para tener (exactamente) 7 de envideo, hace falta tener al menos un 7 y tener tres cartas de palos distintos. Llamemos A al conjunto de todas las manos que valen 7 de envideo y contienen el 7 de oros, B al conjunto de todas las manos que valen 7 de envideo y contienen el 7 de copas, C al conjunto de todas las manos que valen 7 de envideo y contienen el 7 de espadas, y D al conjunto de todas las manos que valen 7 de envideo y contienen el 7 de bastos. Entonces buscamos $|A \cup B \cup C \cup D|$, que podemos calcular usando el principio de inclusión-exclusión para 4 conjuntos (ecuación (2.1)).

El conjunto A consiste en todas las manos de tres palos distintos que contienen el 7 de oros. Nos quedan $C(3, 2) = 3$ maneras de elegir los otros dos palos de la mano, y para cada una de estas elecciones tenemos $10 \times 10 = 100$ maneras de completar la mano, ya que hay diez cartas de cada palo. Por lo tanto, $|A| = 300$. Desde luego, lo mismo vale para B , C y D .

$A \cap B$ es el conjunto de todas las manos de tres palos distintos que contienen el 7 de oros y el 7 de copas. Evidentemente, $|A \cap B| = 20$, y lo mismo vale para las otras intersecciones de dos de los conjuntos A , B , C y D . Por último, es obvio que cada intersección de tres de los conjuntos contiene una única mano (que consiste en tres 7 de distintos palos), y que la intersección de los cuatro conjuntos es vacía (ya que una mano contiene sólo tres cartas).

Por lo tanto tenemos que $|A \cup B \cup C \cup D| = 4 \times 300 - 6 \times 20 + 4 \times 1 - 1 \times 0 = 1.084$, y la probabilidad de tener 7 de envideo es

$$\frac{1.084}{9.880} \approx 0,10972.$$

Probabilidad de tener 6, 5, 4, 3, 2 y 1 de envideo. Para tener 6 de envideo, hace falta tener al menos un 6, tener tres cartas de palos distintos, y no tener ningún

7. Invitamos al lector a comprobar por su cuenta que el mismo razonamiento que acabamos de usar nos da que la probabilidad de tener 6 de envideo es

$$\frac{4 \times 3 \times 9 \times 9 - 6 \times 18 + 4 \times 1}{9.880} = \frac{868}{9.880} \approx 0,08785.$$

Para tener 5 de envideo hay que tener al menos un 5, tener tres cartas de palos distintos, y no tener ningún 6 ni 7. Luego, la probabilidad de tener 5 de envideo es

$$\frac{4 \times 3 \times 8 \times 8 - 6 \times 16 + 4 \times 1}{9.880} = \frac{676}{9.880} \approx 0,06842.$$

Siguiendo de la misma manera con 4, 3, 2 y 1 de envideo, tenemos que: la probabilidad de tener 4 de envideo es $\frac{4 \times 3 \times 7 \times 7 - 6 \times 14 + 4 \times 1}{9.880} = \frac{508}{9.880} \approx 0,05142$, la probabilidad de tener 3 de envideo es $\frac{364}{9.880} \approx 0,03684$, la de tener 2 de envideo es $\frac{244}{9.880} \approx 0,02470$, y la de tener 1 de envideo es $\frac{148}{9.880} \approx 0,01498$.

Probabilidad de tener 0 de envideo. Desde luego, como la suma de las probabilidades de todas las cantidades posibles de envideo es 1, y ya calculamos todas las demás, podemos obtener la probabilidad de tener 0 de envideo haciendo una simple resta. Pero de todos modos hagamos la cuenta de otra manera. Para tener (exactamente) 0 de envideo, hay que tener tres figuras de palos distintos. Hay $C(4, 3) = 4$ combinaciones para los tres palos de la mano. Los conjuntos obtenidos para cada combinación de palos son disjuntos entre sí (como ya explicamos cuando calculamos la probabilidad de tener una mano con tres palos distintos). Para cada combinación, tenemos $3 \times 3 \times 3 = 27$ manos, ya que hay tres figuras de cada palo. Por lo tanto, hay $4 \times 27 = 108$ manos que valen 0 de envideo, y la probabilidad de tener 0 de envideo es $\frac{108}{9.880} \approx 0,01093$.

§3. Probabilidades para una ronda

Hasta ahora, cada probabilidad que hemos calculado es la probabilidad de que la mano de un jugador tenga cierta propiedad que nos interesa. Pero también es útil considerar probabilidades de que una ronda tenga ciertas propiedades. El truco se juega de dos (uno contra uno), cuatro (dos contra dos) o seis (tres contra tres) jugadores (en realidad, existe también una versión para tres jugadores, pero la vamos a ignorar). Como cada jugador recibe una mano de tres cartas, cada ronda tiene 6 cartas si se juega de dos, 12 cartas si se juega de cuatro, o 18 cartas si se juega de seis. En cada caso, la ronda es el conjunto de todas las cartas que se reparten, sin importar cómo están distribuidas entre los jugadores. Así que ahora, en vez de usar el conjunto M de todas las manos posibles, tenemos que considerar los siguientes conjuntos:

$$R_2 = \{T : T \subseteq S \text{ y } |T| = 6\}$$

es el conjunto de todas las rondas posibles si se juega de dos, sin importar cómo están distribuidas las 6 cartas entre los dos jugadores;

$$R_4 = \{T : T \subseteq S \text{ y } |T| = 12\}$$

es el conjunto de todas las rondas posibles si se juega de cuatro, sin importar cómo están distribuidas las 12 cartas entre los cuatro jugadores;

$$R_6 = \{T : T \subseteq S \text{ y } |T| = 18\}$$

es el conjunto de todas las rondas posibles si se juega de seis, sin importar cómo están distribuidas las 18 cartas entre los seis jugadores.

Antes que nada, contemos el número de rondas posibles en cada caso:

$$|R_2| = C(40, 6) = \frac{40!}{34!6!} = 3.838.380,$$

$$|R_4| = C(40, 12) = \frac{40!}{28!12!} = 5.586.853.480$$

$$|R_6| = C(40, 18) = \frac{40!}{22!18!} = 113.380.261.800.$$

Suponemos que, en cada caso, todas las rondas tienen la misma probabilidad. Los razonamientos que vamos a hacer para una ronda son los mismos que hicimos para una mano, aunque ahora los números son más grandes y algunas fórmulas (provenientes del principio de inclusión-exclusión) son más complejas.

Probabilidad de que haya una carta específica en la ronda. ¿Cuál es la probabilidad de que algún jugador tenga el as de espadas en su mano? Al igual que antes, podemos pensarlo de dos maneras. Por un lado, la probabilidad de que una carta específica a se encuentre en un conjunto de k cartas del mazo es $\frac{k}{40}$. Por el otro, podemos contar el número de rondas que contienen la carta a , y dividir por el número de rondas posibles. Los resultados son los siguientes:

$$\text{Dos jugadores: } \frac{6}{40} = \frac{C(39,5)}{C(40,6)} = 0,15.$$

$$\text{Cuatro jugadores: } \frac{12}{40} = \frac{C(39,11)}{C(40,12)} = 0,3.$$

$$\text{Seis jugadores: } \frac{18}{40} = \frac{C(39,17)}{C(40,18)} = 0,45.$$

Como vemos, se duplica (resp. triplica) la probabilidad al duplicarse (resp. triplicarse) el número de jugadores.

Probabilidad de que haya dos cartas específicas en la ronda. Si a y b son dos cartas específicas, ¿cuál es la probabilidad de que ambas estén en la ronda? Por ejemplo, ¿cuál es la probabilidad de que en la ronda se encuentren el as de espadas y también el as de bastos? Podemos pensarlo como la probabilidad de que a sea una carta de la ronda, multiplicada por la probabilidad de que b esté entre las demás cartas de la ronda. O podemos contar el número de rondas que contienen tanto a a como a b , y dividir por el número de rondas posibles. Los resultados son:

Dos jugadores: $\frac{6}{40} \times \frac{5}{39} = \frac{C(38,4)}{C(40,6)} \approx 0,01923$.

Cuatro jugadores: $\frac{12}{40} \times \frac{11}{39} = \frac{C(38,10)}{C(40,12)} \approx 0,08462$.

Seis jugadores: $\frac{18}{40} \times \frac{17}{39} = \frac{C(38,16)}{C(40,18)} \approx 0,19615$.

Probabilidad de que haya tres cartas específicas en la ronda. Si a , b y c son tres cartas específicas (por ejemplo el as de espadas, el as de bastos y el 7 de espadas), la probabilidad de que las tres se encuentren en la ronda es la siguiente:

Dos jugadores: $\frac{6}{40} \times \frac{5}{39} \times \frac{4}{38} = \frac{C(37,3)}{C(40,6)} \approx 0,00202$.

Cuatro jugadores: $\frac{12}{40} \times \frac{11}{39} \times \frac{10}{38} = \frac{C(37,9)}{C(40,12)} \approx 0,02227$.

Seis jugadores: $\frac{18}{40} \times \frac{17}{39} \times \frac{16}{38} = \frac{C(37,15)}{C(40,18)} \approx 0,08259$.

Probabilidad de que haya cuatro cartas específicas en la ronda. Ésta es la probabilidad de que en la ronda se encuentren todos los 3, o de que se encuentren todos los 2, o de que se encuentren el as de espadas, el as de bastos, el 7 de espadas y el 7 de oros. La probabilidad es la siguiente:

Dos jugadores: $\frac{6}{40} \times \frac{5}{39} \times \frac{4}{38} \times \frac{3}{37} = \frac{C(36,2)}{C(40,6)} \approx 0,00016$.

Cuatro jugadores: $\frac{12}{40} \times \frac{11}{39} \times \frac{10}{38} \times \frac{9}{37} = \frac{C(36,8)}{C(40,12)} \approx 0,00542$.

Seis jugadores: $\frac{18}{40} \times \frac{17}{39} \times \frac{16}{38} \times \frac{15}{37} = \frac{C(36,14)}{C(40,18)} \approx 0,03348$.

Probabilidad de que haya (al menos) una de k cartas específicas en la ronda.

Dadas las k cartas a_1, a_2, \dots, a_k , nos interesa la probabilidad de que en la ronda haya al menos una de ellas. Estas cuentas son de interés porque nos dicen, por ejemplo:

- $k = 2$: la probabilidad de que en la ronda esté el as de espadas o el as de bastos.
- $k = 4$: la probabilidad de que en la ronda haya (al menos) una carta que valga más que un 3 para el truco.
- $k = 8$: la probabilidad de que en la ronda haya (al menos) una carta que valga más que un 2 para el truco.
- $k = 12$: la probabilidad de que en la ronda haya (al menos) una carta que valga más que el as de oros (o de copas) para el truco, o la probabilidad de que en la ronda haya (al menos) una figura.

Llamemos R al conjunto de todas las rondas posibles. Es decir, $R = R_2$ si se juega de dos, $R = R_4$ si se juega de cuatro, y $R = R_6$ si se juega de seis jugadores. Si para cada $1 \leq i \leq k$ definimos

$$A_i = \{T \in R : a_i \in T\}$$

(el conjunto de todas las rondas que contienen la carta a_i), entonces el conjunto de todas las rondas que contienen (al menos) una de las k cartas es

$$\bigcup_{i=1}^k A_i = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k,$$

y la probabilidad que buscamos es $|\bigcup_{i=1}^k A_i|/|R|$.

Para calcular el número $|\bigcup_{i=1}^k A_i|$ tendremos que hacer uso del principio de inclusión-exclusión. Hagamos las cuentas por separado para cada caso (dos, cuatro o seis jugadores). Un detalle que debemos mencionar es que si $l > k$, entonces $C(k, l) = 0$ por definición, ya que no hay manera de elegir l elementos diferentes de un conjunto de k elementos.

Dos jugadores: $R = R_2$ y las rondas contienen 6 cartas:

- Hay $C(k, 1) = k$ conjuntos A_1, A_2, \dots, A_k , y cada uno tiene $C(39, 5)$ elementos (rondas).
- Hay $C(k, 2)$ maneras de elegir dos de los conjuntos A_1, A_2, \dots, A_k , y cada intersección de dos conjuntos tiene $C(38, 4)$ elementos.
- Hay $C(k, 3)$ maneras de elegir tres de los conjuntos A_1, A_2, \dots, A_k , y cada intersección de tres conjuntos tiene $C(37, 3)$ elementos.
- Hay $C(k, 4)$ maneras de elegir cuatro de los conjuntos A_1, A_2, \dots, A_k , y cada intersección de cuatro conjuntos tiene $C(36, 2)$ elementos.
- Hay $C(k, 5)$ maneras de elegir cinco de los conjuntos A_1, A_2, \dots, A_k , y cada intersección de cinco conjuntos tiene $C(35, 1) = 35$ elementos.
- Hay $C(k, 6)$ maneras de elegir seis de los conjuntos A_1, A_2, \dots, A_k , y cada intersección de seis conjuntos tiene $C(34, 0) = 1$ único elemento.
- Cada intersección de 7 o más de los conjuntos A_1, A_2, \dots, A_k es vacía, ya que una ronda contiene solamente 6 cartas.

El principio de inclusión-exclusión nos dice que

$$(3.1) \quad \begin{aligned} |\bigcup_{i=1}^k A_i| &= k \times C(39, 5) - C(k, 2) \times C(38, 4) + C(k, 3) \times C(37, 3) \\ &\quad - C(k, 4) \times C(36, 2) + C(k, 5) \times 35 - C(k, 6) \times 1. \end{aligned}$$

Al sustituir los valores deseados de k (recordemos que $C(k, l) = 0$ si $l > k$) y dividir el resultado por $|R| = |R_2| = C(40, 6) = 3\,838\,380$, obtenemos las probabilidades que buscamos.

Como hicimos en el caso de una sola mano, podemos usar la idea del complemento de un conjunto para obtener fórmulas más simples (recordemos (2.3)). Para dos jugadores, la probabilidad de que haya (al menos) una de k cartas específicas

en la ronda es

$$(3.2) \quad 1 - \frac{C(40 - k, 6)}{C(40, 6)},$$

ya que hay $C(40 - k, 6)$ rondas que no contienen ninguna de las k cartas.

Cuatro jugadores: $R = R_4$ y las rondas contienen 12 cartas.

El lector puede calcular $|\bigcup_{i=1}^k A_i|$ usando el principio de inclusión-exclusión, teniendo en cuenta que ahora cada intersección de 13 o más de los conjuntos A_1, A_2, \dots, A_k es vacía, ya que una ronda contiene solamente 12 cartas. El resultado será parecido a la ecuación (3.1), pero con más términos. Para obtener las probabilidades que buscamos, ahora dividimos por $|R| = |R_4| = C(40, 12)$. Alternativamente, podemos usar el complemento para obtener un resultado parecido a la expresión (3.2): la probabilidad de que haya (al menos) una de las k cartas es $1 - \frac{C(40-k, 12)}{C(40, 12)}$.

Seis jugadores: $R = R_6$ y las rondas contienen 18 cartas.

Nuevamente, se puede calcular $|\bigcup_{i=1}^k A_i|$ usando el principio de inclusión-exclusión y luego dividir por $|R| = |R_6| = C(40, 18)$, o se puede usar el complemento para obtener que la probabilidad es $1 - \frac{C(40-k, 18)}{C(40, 18)}$.

Las tablas del final incluyen los resultados (para una mano y para una ronda de dos, cuatro o seis jugadores) para $k = 2, 3, 4, 8$ y 12 , que son seguramente los de mayor interés.

Estas probabilidades son útiles para el truco. Como el envido se juega usando manos individuales y no combinando las cartas de la ronda, no tiene mucho sentido calcular probabilidades para el envido asociadas a una ronda.

§4. Observaciones finales y cuestiones pendientes

La última sección consiste en cinco tablas con probabilidades de interés para el truco (para una mano y para una ronda de dos, cuatro o seis jugadores) y para el envido. Algunas observaciones que podemos hacer a partir de estas tablas son las siguientes:

- La probabilidad de tener flor es un poquito menor que $\frac{1}{20} = 5\%$.
- La probabilidad de tener 27 o más para el envido es alrededor de $\frac{1}{4} = 25\%$.
- La probabilidad de tener 23 o más para el envido es alrededor de 48%, y la de tener 22 o más es alrededor de 52%. Por lo tanto, a la larga un jugador debería tener 22 o más de envido un poquito más de la mitad de las veces, y 23 o más un poquito menos de la mitad de las veces.

- A la larga, un jugador debería tener (al menos) una carta que valga más que un 2 para el truco alrededor de la mitad de las veces, y una carta que valga más que el as de oros (o de copas) alrededor de dos tercios de las veces. También debería recibir (al menos) una figura alrededor de dos tercios de las veces.
- En una ronda de cuatro jugadores, la probabilidad de que esté el as de espadas o el as de bastos (o ambas cartas) es 51.5%, es decir un poquito mayor que $\frac{1}{2}$. Si se juega de seis, la probabilidad es alrededor de 70 %.
- En una ronda de cuatro jugadores, la probabilidad de que haya (al menos) una de las cuatro mejores cartas (as de espadas, as de bastos, 7 de espadas, 7 de oros) es alrededor de 78 %. Si se juega de seis, la probabilidad es alrededor de 92 %. Estas probabilidades son también las de que haya por lo menos un 3, o de que haya por lo menos un 2, en la ronda.

Como última observación, una advertencia. Un jugador no debería esperar ninguna regularidad en el reparto de las cartas basándose en estas probabilidades, salvo a muy largo plazo. En una partida, o en una noche entera de timba, puede pasar cualquier cosa. En particular, se suele caer en la trampa de pensar que las manos o rondas anteriores influyen en las probabilidades de las que vienen. Si no nos ha tocado el as de espadas en diez manos seguidas, la probabilidad de que nos toque en la que sigue es la misma ($\frac{3}{40}$), ni más ni menos, que si nos ha tocado el as de espadas en las últimas tres manos.

Este ensayo es tan sólo una investigación superficial de las probabilidades en el truco. Quedaron muchas cosas interesantes y útiles en el tintero, como por ejemplo:

- Probabilidades condicionales. Cuando jugamos al truco, sabemos nuestras cartas y a veces también algunas cartas de los compañeros de equipo. Conocemos también las cartas que se van jugando en la ronda, y tal vez el puntaje de algunos jugadores para el envido. Desde luego, esta información altera las probabilidades. Por ejemplo, si tenemos el as de espadas, es obvio que la probabilidad de que en la ronda esté el as de espadas o el de bastos es 1, y no la que se indica en las tablas que siguen. Otro ejemplo es, si un adversario cantó 27 de envido (aquí suponemos que es obligatorio declarar el puntaje correcto), ¿cuál es la probabilidad de que tenga ciertas cartas? ¿Y si ya jugó la sota de espadas y le quedan dos cartas en la mano? Este tipo de probabilidad de un evento, sabiendo que se ha dado otro evento, se llama “probabilidad condicional”. Se podría hacer varias tablas más con este tipo de probabilidades.
- El valor esperado de ciertas variables de interés, tal vez bajo ciertas condiciones. Por ejemplo, ¿cuál es el puntaje esperado para el envido en una

mano? Este valor es fácil de encontrar usando la tercera tabla en las páginas que siguen, pero, ¿cuál es el puntaje esperado si conocemos algunas cartas de los demás jugadores?

- Probabilidades de ganar el envideo en una ronda de dos, cuatro o seis jugadores teniendo ciertas cantidades, siendo mano o no. Por ejemplo, si se tiene 27 de envideo en una ronda de cuatro jugadores y se es mano, ¿cuál es la probabilidad de que ese envideo sea mejor que el de los rivales? Se puede hacer tablas con probabilidades de ganar para cada cantidad y en cada situación, al igual que tablas con las cantidades necesarias para tener ciertas probabilidades de ganar el envideo.

Invitamos al lector interesado a investigar estas cuestiones y aportar más tablas de probabilidades para la comunidad timbera.

Por último, quisiera agradecer a Ariel Arbiser, Carlos D'Andrea, Pablo Mislej, Adrián Paenza, Ricardo Podestá y el referí, que se tomaron el tiempo de leer este artículo y hacer muy buenos comentarios y sugerencias.

§5. Apéndice: Breve repaso del juego

Como es sabido, el juego tiene tres envites o suertes: flor, envideo y truco. Describimos aquí brevemente los detalles del juego que nos sirven. Este repaso no es un manual para aprender a jugar, ni para aprenderse el reglamento, las señas, o la mecánica de las apuestas.

Truco. Para ganar el truco en una ronda, se debe ganar dos de las tres bazas. El equipo que gana la primera baza tiene el desempate en la segunda y la tercera (es decir, el otro equipo debe ganar, no puede empatar, en la segunda y la tercera). Si la primera baza queda empatada (“empardada”, o “parda”), gana el truco el equipo que gana la segunda baza. Si la segunda también queda empardada, la tercera decide. Si la tercera también queda empardada, gana “de mano” el equipo del primer jugador en la ronda.

La jerarquía de las cartas para el truco es la siguiente, de mayor a menor: as de espadas, as de bastos, 7 de espadas, 7 de oros, 3, 2, as de oros y as de copas (son de igual valor), rey, caballo, sota, 7 de copas y 7 de bastos (son de igual valor), 6, 5, 4.

Envideo. A diferencia del truco, el envideo no necesariamente se juega en cada ronda. Si se juega, el ganador es el equipo cuyo jugador tiene la mayor cantidad de envideo en su mano. Si dos jugadores de distintos equipos tienen el mismo puntaje para el envideo, gana el que es “mano” del otro: el que va primero en la ronda.

Puntaje para el envido: Al tener (al menos) dos cartas del mismo palo, se tiene 20 puntos más los puntos indicados por el valor numérico de esas cartas – salvo que el valor de las figuras (rey, caballo y sota) es cero. Si no se tiene dos cartas del mismo palo, no se suman los 20 puntos. Si se tiene tres cartas del mismo palo (flor), se eligen las dos mejores para el envido. Es decir, o se juega sin flor, o se permite no cantar una flor y usar las dos mejores cartas para el envido.

Ejemplos:

- Se tiene 33, el puntaje más alto posible, si se tiene un 7 y un 6 del mismo palo.
- Se tiene 27 (“las viejas”) si se tiene (de un mismo palo) el 7 y una figura (pero no el 6, 5, 4, 3, 2 o 1, lo que resultaría en un puntaje más alto), o el 6 y el 1 (pero no el 7, 5, 4, 3 o 2), o el 5 y el 2 (pero no el 7, 6, 4 o 3), o el 4 y el 3 (pero no el 7, 6 o 5).
- Se tiene 20 si se tiene dos figuras del mismo palo y la tercera carta no es el 7, 6, 5, 4, 3, 2 o 1 de ese mismo palo.
- Si no se tiene dos cartas del mismo palo, el puntaje puede ser de 0 a 7.
- Si se tiene el 3, 4 y 7 del mismo palo, se tiene 31. Si se tiene la sota, el 1 y el 3 del mismo palo, se tiene 24.

Flor. Más allá de los divertidos versos que la acompañan, la flor no nos interesa mucho, porque es la única suerte que sólo se puede cantar si un jugador tiene tres cartas del mismo palo (es decir, tiene flor. Como vimos, la probabilidad es menor que $\frac{1}{20}$) y, en tal caso, sólo tiene desquite si el rival (o uno de los rivales) también tiene flor. En cambio, el envido y el truco los puede cantar cualquier jugador sin importar qué mano le ha tocado, y siempre tienen desquite (el rival o los rivales tienen la opción de querer o de levantar).

Como es poco probable tener que tomar decisiones al respecto, en este ensayo no nos ocupamos de la flor, más allá de calcular la probabilidad de que nos toque una en la mano. Si al lector le gusta jugar con flor, lo invitamos a calcular probabilidades para distintos puntajes.

§6. Tablas de probabilidades

A continuación compilamos varias probabilidades de interés para el juego, agrupadas en cinco tablas. Las tres primeras contienen probabilidades acerca de la mano de un jugador. La cuarta incluye probabilidades para una ronda de dos, cuatro o seis jugadores. Y la última es una reorganización de las probabilidades (que ya se encuentran en la primera y en la cuarta tabla) de que haya al menos una de k cartas específicas en la mano de un jugador, o en una ronda de dos, cuatro o seis jugadores. Los resultados son para $k = 1, 2, 3, 4, 8$ y 12 .

Probabilidades para una mano – Truco

Evento	Ejemplo(s) o significado	Probabilidad
Tener una carta específica	Tener el as de espadas	0.07500
Tener dos cartas específicas	Tener el as de espadas y el as de bastos	0.00385
Tener tres cartas específicas	Tener el as, el 7 y el 6 de espadas	0.00010
Tener (al menos) una de dos cartas específicas	Tener el as de espadas o el as de bastos	0.14615
Tener (al menos) una de tres cartas específicas	Tener el as de espadas o el as de bastos o el 7 de espadas	0.21356
Tener (al menos) una de cuatro cartas específicas	Tener (al menos) un 3 Tener (al menos) un 2 Tener (al menos) una carta que valga más que un 3 para el truco	0.27733
Tener (al menos) una de ocho cartas específicas	Tener (al menos) una carta que valga más que un 2 para el truco	0.49798
Tener (al menos) una de doce cartas específicas	Tener (al menos) una carta que valga más que el as de oros (o de copas) para el truco Tener (al menos) una figura	0.66842

Probabilidades para una mano – Envío

Cantidad k	Probabilidad de tener (exactamente) k de envío	Probabilidad de tener $\geq k$ de envío
33	0.01538	0.01538
32	0.01498	0.03036
31	0.02955	0.05992
30	0.02874	0.08866
29	0.04251	0.13117
28	0.04130	0.17247
27	0.07895	0.25142
26	0.06478	0.31619
25	0.06478	0.38097
24	0.05101	0.43198
23	0.05101	0.48300
22	0.03765	0.52065
21	0.03765	0.55830
20	0.03684	0.59514
7	0.10972	0.70486
6	0.08785	0.79271
5	0.06842	0.86113
4	0.05142	0.91255
3	0.03684	0.94939
2	0.02470	0.97409
1	0.01498	0.98907
0	0.01093	1

Probabilidades para una mano – Palos

Evento	Ejemplo(s) o significado	Probabilidad
Tener tres cartas de palos distintos	Tener ≤ 7 de envido	0.40486
Tener (al menos) dos cartas del mismo palo	Tener ≥ 20 de envido	0.59514
Tener tres cartas del mismo palo	Tener flor	0.04858
Tener (al menos) una de diez cartas específicas	Tener (al menos) un oro ----- Tener (al menos) una copa ----- Tener (al menos) una espada ----- Tener (al menos) un basto	0.58907

Probabilidades para una ronda – Truco

Evento	Ejemplo(s) o significado	No. de jugadores	Probabilidad
Que la ronda tenga una carta específica	Que algún jugador tenga el as de espadas	2	0.15000
		4	0.30000
		6	0.45000
Que la ronda tenga dos cartas específicas	Que en la ronda estén el as de espadas y el as de bastos	2	0.01923
		4	0.08462
		6	0.19615
Que la ronda tenga tres cartas específicas	Que en la ronda estén el as de espadas, el as de bastos y el 7 de espadas	2	0.00202
		4	0.02227
		6	0.08259
Que la ronda tenga cuatro cartas específicas	Que en la ronda estén todos los 3 ----- Que en la ronda estén todos los 2 ----- Que en la ronda estén el as de espadas, el as de bastos, el 7 de espadas y el 7 de oros	2	0.00016
	4	0.00542	
	6	0.03348	
Que la ronda tenga (al menos) una de dos cartas específicas	Que en la ronda esté el as de espadas o el as de bastos	2	0.28077
		4	0.51538
		6	0.70385
Que la ronda tenga (al menos) una de tres cartas específicas	Que en la ronda esté el as de espadas, o el as de bastos, o el 7 de espadas	2	0.39433
		4	0.66842
		6	0.84413
Que la ronda tenga (al menos) una de cuatro cartas específicas	Que en la ronda haya (al menos) un 3 ----- Que en la ronda haya (al menos) un 2 ----- Que en la ronda haya (al menos) una carta que valga más que un 3 para el truco	2	0.49255
	4	0.77596	
	6	0.91996	
Que la ronda tenga (al menos) una de ocho cartas específicas	Que en la ronda haya (al menos) una carta que valga más que un 2 para el truco	2	0.76391
		4	0.95958
		6	0.99584
Que la ronda tenga (al menos) una de doce cartas específicas	Que en la ronda haya (al menos) una carta que valga más que el as de oros (o de copas) para el truco ----- Que en la ronda haya (al menos) una figura	2	0.90185
	4	0.99455	
	6	0.99988	

Probabilidad de que haya (al menos) una de k cartas específicas

k	Mano de un jugador (3 cartas)	Ronda de 2 jugadores (6 cartas)	Ronda de 4 jugadores (12 cartas)	Ronda de 6 jugadores (18 cartas)
1	0.07500	0.15000	0.30000	0.45000
2	0.14615	0.28077	0.51538	0.70385
3	0.21356	0.39433	0.66842	0.84413
4	0.27733	0.49255	0.77596	0.91996
8	0.49798	0.76391	0.95958	0.99584
12	0.66842	0.90185	0.99455	0.99988

Referencias

- Anderson, I. (2001). *A first course in discrete mathematics*. Springer-Verlag, London.
Isaac, R. (1995). *The pleasures of probability*. Springer-Verlag, New York.

EMILIANO GÓMEZ

Department of Mathematics, University of California, Berkeley, CA 94720.

(✉) emgomez@berkeley.edu

Recibido: 20 de junio de 2019.

Aceptado: 26 de julio de 2019.

Publicado en línea: 28 de agosto de 2019.

el último dígito de n^5 es n para cualquier natural n ?

En efecto, observemos primero que

$$\begin{aligned} 0^5 = 0, & & 1^5 = 1, & & 2^5 = 32, & & 3^5 = 243, & & 4^5 = 1.024, \\ 5^5 = 3.125, & & 6^5 = 7.776, & & 7^5 = 16.887, & & 8^5 = 32.678, & & 9^5 = 59.049, \end{aligned}$$

de donde el resultado se cumple para los dígitos.

Si nos fijamos, estas cuentas dicen que

$$(1) \quad n^5 \equiv n \pmod{10}$$

para todo $n = 0, 1, \dots, 9$, donde \equiv denota congruencia módulo 10. Recordemos que dos enteros a y b son congruentes módulo un natural n , denotado $a \equiv b \pmod{n}$, si n divide a $a - b$.

¿Cómo deducimos de aquí que el resultado es cierto para un número natural n cualquiera? Consideremos su desarrollo decimal, es decir supongamos que

$$n = a_k 10^k + \dots + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0$$

donde $0 \leq a_i \leq 9$ para $0 \leq i \leq k$. Tomando congruencia módulo 10 tenemos que

$$(2) \quad n \equiv a_0 \pmod{10}.$$

Por otra parte, usando propiedades de congruencias, tenemos que

$$(3) \quad n^5 \equiv a_k 10^{5k} + \dots + a_1 10^5 + a_0^5 \equiv a_0^5 \pmod{10}.$$

O sea, de (2) y (3) resulta que

$$n \equiv a_0 \pmod{10} \quad \text{y} \quad n^5 \equiv a_0^5 \pmod{10}$$

Pero en (1) vimos que la congruencia $a_0^5 \equiv a_0 \pmod{10}$ vale para los dígitos. De aquí sale entonces que

$$n^5 \equiv n \pmod{10}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Por ejemplo

$$2019^5 = 33.549.155.665.686.099.$$

Como una curiosidad adicional, observemos que la ecuación (1) implica

$$n^5 - n \equiv n(n^4 - 1) \equiv n(n^2 - 1)(n^2 + 1) \equiv 0 \pmod{10},$$

de donde multiplicando por n tenemos que

$$(4) \quad (n^2 - 1)n^2(n^2 + 1) \equiv 0 \pmod{10}.$$

Es decir, el producto de 3 enteros consecutivos (que siempre es divisible por 2 y por 3) es divisible por 10, siempre que el del medio sea un cuadrado. Como 2, 3 y 5 son coprimos, en realidad, este producto resulta divisible por 30. Por ejemplo

$$\begin{aligned}3 \cdot 4 \cdot 5 &= 30, \\8 \cdot 9 \cdot 10 &= 720 = 24 \cdot 30, \\15 \cdot 16 \cdot 17 &= 4.080 = 136 \cdot 30, \\24 \cdot 25 \cdot 26 &= 15.600 = 520 \cdot 30.\end{aligned}$$

Podemos probar esto directamente, pues (4) es equivalente a

$$(n-1)n(n+1)n(n^2+1) \equiv 0 \pmod{10}.$$

Los primeros tres factores dicen que el producto es divisible por 6. Además, si $n = 5k$ o $5k \pm 1$ entonces el producto es divisible por 5. Si $n = 5k \pm 2$ entonces el último factor toma la forma

$$n^2 + 1 = (5k \pm 2)^2 + 1 = 25k^2 \pm 20k + 5$$

y por lo tanto es divisible por 5. Luego el producto es divisible por 5 y por lo tanto por 30.

Finalmente, mencionamos que el resultado es mucho más general y en realidad vale no sólo para potencias quintas, si no que también para potencias de la forma $4k + 1$ (5, 9, 13, etc.). Mas precisamente, vale

$$n^{4k+1} \equiv n \pmod{10}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. La idea es usar lo que ya hicimos. Por ejemplo,

$$n^9 = n^5 \cdot n^4 \equiv n \cdot n^4 = n^5 \equiv n \pmod{10}$$

para todo natural n . Del mismo modo, en general, como

$$4k + 1 = 4((k-1) + 1) + 1 = (4(k-1) + 1) + 4,$$

haciendo inducción en k , tenemos

$$n^{4k+1} = n^{4(k-1)+1} \cdot n^4 \equiv n \cdot n^4 = n^5 \equiv n \pmod{10}.$$

Por ejemplo,

$$2019^{13} = 9.263.436.872.325.375.124.423.761.282.625.811.510.443.059.$$

Las congruencias fueron introducidas por el genial matemático y físico alemán Johann Carl Friedrich Gauss (Brunswick, 30 de abril de 1777 – 23 de febrero de 1855), en su monumental tratado *Disquisitiones Arithmeticae* (Investigaciones Aritméticas), en el cual aparece un capítulo su tesis. Las congruencias son desde entonces una herramienta fundamental en el estudio de la Aritmética.

Sección de Problemas

✉ por Juan Pablo Rossetti

Los siguientes problemas están pensados para un público amplio....

Las soluciones se encuentran en la página siguiente.



Problema 1. TAMAÑO DE LAS MAMUSHKAS. Un fabricante de mamushkas (o matrioshkas) quiere cambiar de pintura a una muy linda, pero costosa, porque la gente cada vez se fija más en este aspecto que en los notables encastres, casi perfectos, de las tradicionales muñecas rusas. Así, quiere saber con precisión cuánta pintura necesitará para pintar un juego de 5 muñecas, cuyas alturas son de menor a mayor: 3; 4; 5,5; 7,5 y 10cm. Si para pintar a la más chiquita necesita una cierta cantidad C de pintura, ¿cuánta necesitará para pintar a todas?

Problema 2. CARA O NÚMERO A CIEGAS. En una cajita cuadrada, sin tapa, se colocan 4 monedas en sus 4 esquinas. El desafío se trata de dar vuelta algunas de las monedas y lograr que queden las cuatro mostrando lo mismo, es decir, las 4 caras o las 4 números; pero hay un detalle importante: ¡tenemos que hacer esto *a ciegas*! La dinámica es así: uno elige algunas de las monedas (entre 0 a 4), y una amiga las da vuelta. Luego, le pedimos a ella que nos diga si las 4 están iguales, es decir, las cuatro caras o las cuatro números. Si lo están, ganamos. Si no, ella hace girar la caja como quiera, sin decirnos cuánto. Ahora tenemos un segundo turno para dar vuelta las monedas que queramos, siempre a ciegas, y volver a preguntar si ahora están bien. Y así sucesivamente. ¿Hay alguna estrategia que nos asegure que podemos ganar en a lo sumo una cantidad fija de intentos? En caso que haya una estrategia ¿cuántos intentos son necesarios (como mínimo) para asegurar que va a funcionar seguro?

Vale la pena pensar bien este problema, para describir una estrategia ganadora. También proponemos algunas variantes del problema:

¿Si se coloca una quinta moneda en la cajita, ahora en el centro, qué sucede? En este caso, la moneda del centro, siempre quedará en el centro al rotar la cajita.

¿Si en lugar de 4 monedas en la cajita cuadrada, se colocan 5 monedas en una cajita circular (o pentagonal) y se procede del mismo modo, será posible resolverlo?

¿Y si se colocan 3 monedas en una cajita triangular, que gira como la cuadrada, se podrá lograr?

¿Qué pasa si nuestra amiga puede girar la cajita no solo después que hacemos un intento, sino también después que le indicamos qué monedas dar vuelta? ¿Seguimos teniendo una estrategia ganadora?

Problema 3. ORDENAR n ELEMENTOS POR COMPARACIONES. Tenemos n números positivos distintos (no sabemos cuáles son) y queremos ordenarlos de menor a mayor. Solo podemos comparar dos números por vez y así saber cuál es menor y cuál mayor entre esos dos. Dados cuatro números a, b, c, d , ¿cuántas comparaciones hacen falta como mínimo para ordenarlos? Ejemplo: si hay que ordenar solo tres números, digamos x, y, z , entonces necesitaremos 3 comparaciones para estar seguros, en todos los casos, de que los podremos ordenar de menor a mayor.

¿Se anima a resolver este problema con cinco números?

El problema es muy interesante en general, cuando se tienen n números distintos. No se puede resolver en forma completa, pero lo que sí se puede hacer es dar algunas cotas, inferiores y superiores, de la cantidad de comparaciones que harán falta y que alcanzan, respectivamente, para resolver el problema.

¡Sucesiones al toque!

¿Cuál creés que es el próximo número en las siguientes sucesiones y por qué? ¿Te animás a encontrar más términos de estas sucesiones? ¿Y una fórmula general?

$$\{a_n\} : 2, 3, \frac{10}{3}, \frac{7}{2}, \frac{18}{5}, \frac{11}{3}, \frac{26}{7}, \dots$$

$$\{b_n\} : 2, 2, 6, 14, 34, 82, 198, 478, 1154, 2786, 6726, 16238, \\ 39202, 94642, 228486, 551614, 1331714, \dots$$

$$\{c_n\} : 0, 1, 0, 2, 0, 1, 0, 3, 0, 1, 0, 2, 0, 1, 0, 4, 0, 1, 0, 2, 0, 1, 0, 3, 0, 1, 0, 2, \\ 0, 1, 0, 5, 0, 1, 0, 2, 0, 1, 0, 3, 0, 1, 0, 2, 0, 1, 0, 4, 0, 1, 0, 2, 0, \dots$$

Podés encontrar las soluciones en la página 72.



SOLUCIONES

Solución 1. Cada mamushka de altura h necesita $(\frac{h}{3})^2$ pintura con respecto a lo que hace falta para pintar la mamushka de 3 cm de altura. Esto es así porque las mamushkas son todas iguales, salvo por su tamaño, entonces el área a pintar se agranda como la proporción entre sus alturas pero elevada al cuadrado. Por lo tanto la respuesta es $(\frac{4}{3})^2 + (\frac{4}{3})^2 + (\frac{5,5}{3})^2 + (\frac{7,5}{3})^2 + (\frac{10}{3})^2 = \frac{211,5}{9} = 23,5$, multiplicado por C .

Solución 2. Sí, hay una estrategia ganadora, en a lo sumo 8 intentos logramos que todas las monedas esten iguales. Procedemos así: en el primer turno, preguntamos si así estan bien (de este modo, estamos considerando el caso de 4 caras o 4 números). En caso que no, atacamos los casos en que haya 2 caras y 2 números: damos vuelta 2 monedas opuestas en diagonal (movimiento [X]). Si después de esto no todas las monedas tienen la misma cara visible, pensamos que hay 2 pares de adyacentes de cada tipo, entonces damos vuelta dos monedas adyacentes (movimiento [I]). Si después de esto no ganamos, entonces pensamos que quedan 2 pares de diagonales de cada tipo. Repetimos el movimiento [X]. Si quedan todas igual, ganamos; si no, es porque al principio había un número impar de caras y uno impar de números (3 de un tipo y 1 del otro). En tal caso, utilizamos nuestro 5to turno para dar vuelta una sola moneda, cualquiera. Entonces nos quedan seguro dos monedas cara y dos número y podemos repetir los movimientos [X] [I] [X] y ganar.

El caso en el que se coloca una quinta moneda en el centro, es esencialmente igual, solo que nos llevará el doble de intentos, 16, puesto que cada vez que preguntamos si están bien las monedas hay que hacerlo una segunda vez dando vuelta la moneda del medio.

El caso de 5 monedas en un arreglo pentagonal o 3 monedas en un arreglo triangular, no tiene solución. Qué notable que con 3 monedas no se pueda y con 4 sí, ¿verdad?.

Solución 3. Para ordenar 4 elementos alcanza con hacer 5 comparaciones, y ese es el número mínimo para asegurar el buen orden. Podemos comparar primero a , b y c , todos con todos (son 3 comparaciones) y así ordenarlos a ellos. Luego, comparamos d con el que quedó al medio de los 3 anteriores. Por ejemplo, si habían

quedado $a < b < c$, comparamos d con b . Si $d > b$, entonces comparamos d con c , y si $d < b$ entonces comparamos d con a .

Esta no es la única forma de lograr ordenarlos en 5 comparaciones, pero tiene de bueno que nos muestra un camino para ordenar $n+1$ números habiendo ordenado n . Se toma el nuevo número, se lo compara con uno del medio (dependiendo de la paridad hay uno solo al medio o dos), y luego se continúa comparando ese último número con el del medio de la zona a donde cayó. De este modo, al pasar de n números a $n+1$, se ve que alcanza con hacer $\lceil \frac{n+1}{2} \rceil$ nuevas comparaciones.

La cota inferior para la cantidad de comparaciones viene dada por $\log_2(n!)$. Esto es así porque inicialmente hay $n!$ órdenes distintos posibles. En cada comparación, vamos partiendo ese conjunto de $n!$ posibilidades en 2, luego en 4, y así sucesivamente, vemos que se va armando un árbol y para asegurar que hemos llegado a ordenar los n números en todos los casos, hace falta que en cada rama del árbol quede una sola posibilidad. Por consiguiente, al hacer k comparaciones, debemos tener $2^k \geq n!$, es decir, $k \geq \log_2(n!)$

Para una cota superior, podemos razonar como al principio, notando que las comparaciones que necesitamos sumar al agregar números a partir de un solo número son 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, ... Esto es fácil de sumar, da $\frac{2n(n+1)}{2} - 1$.

Este tema es investigado en matemática y en computación, desarrollando algoritmos que ordenan los números de manera eficiente. Se conoce el número exacto para ordenar hasta 16 números. De la Enciclopedia on-line de sucesiones enteras: A036604

(Sorting numbers: minimal number of comparisons needed to sort n elements.)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
0	1	3	5	7	10	13	16	19	22	26	30	34	38	42	?

Soluciones de ¡sucesiones al toque!

- $a_8 = \frac{15}{4} = \frac{30}{8}$. Son los números de la forma $a_n = \frac{4n-2}{n}$.
- $b_{18} = 3215042$. Son los *Números de Pelle*, $b_n = 2b_{n-1} + b_{n-2}$.
- $c_{54} = 1$. c_n es el exponente del 2 en la descomposición en primos de n .

Viene de la página 70.

INFORMACIÓN PARA AUTORES

La *Revista de Educación Matemática* recibe artículos en cualquiera de sus secciones que no hayan sido ya publicados. Se espera que tengan excelente nivel de redacción, claridad en la exposición de las ideas, coherencia y cohesión.

Los autores que deseen publicar sus artículos en la *Revista de Educación Matemática* deberán enviar un archivo LibreOffice, Word o Latex a la dirección **revm@famaf.unc.edu.ar** de correo electrónico.

El archivo deberá estar escrito en hoja tamaño A4, con sus cuatro márgenes de 2,5 cm, interlineado sencillo y letra Times New Roman de 11 pt. En la medida de lo posible evitar el uso de notas al pie. En la primera página se informará:

- Título del trabajo.
- Nombre, filiación académica y correo electrónico de todos los autores.
- Categoría propuesta (Matemática, Aportes para la Enseñanza de la Matemática, Investigación en Educación Matemática, Reseña).
- Resumen en español y en inglés con una extensión máxima de 200 palabras. No incluir referencias bibliográficas.
- Palabras-clave en español e inglés. No más de cuatro.

Los artículos de *Matemática* y *Aportes para la enseñanza* pueden ser de hasta 12 páginas (excepcionalmente se aceptarán artículos más extensos), incluida bibliografía, tablas y figuras.

Los artículos de *Investigación* pueden ser de hasta 20 páginas, incluida bibliografía, tablas y figuras. Deben incluir: resumen (en español e inglés), problemática investigada, preguntas u objetivos de investigación, referentes teóricos y antecedentes, metodología de investigación, resultados, análisis, conclusiones y bibliografía. El resumen, tanto en español como en inglés, puede tener una extensión máxima de 200 palabras y no incluir referencias bibliográficas.

Las *Reseñas* pueden ser de hasta 4 páginas.

Para la publicación de Anuncios enviar la información completa al correo electrónico de la revista.

Más información en la página <https://revistas.unc.edu.ar/index.php/REM/information/authors>.