Revista de Educación Matemática

Registro Nacional de la Propiedad Intelectual N° 168024

ISSN 0326-8780 (versión impresa)

ISSN 1852-2890 (en línea)

Página web: https://revistas.unc.edu.ar/index.php/REM/index
Correo electrónico: revm@famaf.unc.edu.ar

Revista de Educación Matemática

Volumen 38, N° 3 – 2023

ÍNDICE

Artículos

Secciones fijas

Revista de Educación Matemática
Volumen 38, N° 3 (2023), páginas 4 – 24
Unión Matemática Argentina - Famaf (UNC)

Aportes para la Enseñanza de la Matemática.

EN BÚSQUEDA DE LA *COMPLETITUD* PARA MEJORAR LA COMPRENSIÓN DEL CONCEPTO DE COORDENADAS DE UN VECTOR EN UNA BASE DADA, EN ESTUDIANTES DE LAS CARRERAS DE INGENIERÍA Y LICENCIATURA EN CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN

Gisela P. Fitt y Silvia R. Raichman

Resumen. En el espacio curricular Geometría Analítica, correspondiente al primer año de las carreras de Ingenierías y de la Licenciatura en Ciencias de la Computación, en Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Cuyo, se detectan en algunos estudiantes dificultades en la apropiación, comprensión y transferencia del concepto de *coordenadas de un vector respecto de una base del espacio bidimensional*.

El estudio y análisis de dicho problema didáctico, desde la Teoría Antropológica de lo Didáctico, permite la generación de una propuesta que fue desarrollada como trabajo final de Especialización en Didáctica de la Matemática de la Universidad Nacional de San Luis. La misma surge a partir de un análisis reflexivo y crítico de los materiales existentes, los recursos disponibles y de las tecnologías para la enseñanza de la Geometría Analítica. Dentro del modelo pedagógico implementado en la asignatura, se incorporan dispositivos didácticos en diferentes momentos del proceso de estudio.

Presentamos los objetivos e intencionalidades específicas de cada actividad propuesta y describimos cómo buscamos atenuar el problema didáctico, al promover la comprensión profunda de la organización matemática coordenadas de un vector respecto de una base en una mayor cantidad de estudiantes

Palabras clave: Geometría Analítica, Coordenadas de un vector, Teoría Antropológica de lo Didáctico.

Keywords: Analytical Geometry, Coordinates of a vector, Anthropological Theory of the Didactic.

ABSTRACT. In the Analytical Geometry curricular space, corresponding to the first year of the Engineering careers and the Degree in Computer Science, in the Facultad de Ingeniería of the Universidad Nacional de Cuyo, are detected difficulties in some students, in the appropriation, comprehension and transfer of the concept of vector coordinates with respect to a two-dimensional space basis.

The study and analysis of this didactic problem, from the Anthropological Theory of the Didactic, allows the generation of a proposal that was developed as a final work of Specialization in Mathematics Didactics of the Universidad Nacional de San Luis. It arises from a reflective and critical analysis of the existing materials, available resources and technologies for Analytical Geometry teaching. Within the pedagogical model implemented in the subject, didactics devices are incorporated at different moments of the study process.

We present the objectives and specific intentions of each proposed activity and describe how we seek to mitigate the didactic problem by promoting a deep understanding of the mathematical organization of coordinates of a vector with respect to a base in a larger number of students.

§1. Introducción

En el espacio curricular Geometría Analítica, correspondiente al primer año de las carreras de Ingenierías y de la Licenciatura en Ciencias de la Computación, en Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Cuyo, se implementa un modelo pedagógico constituido por cinco escenarios de interacción (Raichman & Mirasso, 2018). El mismo contiene actividades diseñadas e implementadas para favorecer la apropiación de conceptos y procedimientos propios de la Geometría Analítica plana y espacial. Cada escenario de interacción (*desarrollo de contenidos, exploración y experimentación, tutorías, integración de contenidos y articulación*) tiene intencionalidades educativas específicas con las correspondientes actividades y recursos asociados.

Para cada unidad temática del programa de la asignatura (*Espacios Vectoriales - Planos y Rectas - Secciones Cónicas - Superficies - Ecuaciones de Lugares Geométricos en Coordenadas Polares, Esféricas y Cilíndricas - Rotaciones y Traslaciones en el Plano y en el Espacio*) se elaboran actividades y recursos didácticos que se encuentran disponibles en el aula virtual dentro del Aula Abierta de la Facultad de Ingeniería (Plataforma Moodle) y en el texto *Geometría analítica para ciencias e ingenierías: Actividades para el aprendizaje* (Raichman y col., 2023). Las guías de estudio y actividades semanales que se incluyen en dicho espacio virtual están orientadas a la organización y planificación del estudio de la asignatura.

En la primera unidad del curso, se detectan dificultades en la apropiación y la comprensión de los contenidos asociados a *coordenadas de un vector respecto de una base del espacio bidimensional*. A partir de diferentes instancias de evaluación, se observa que algunos estudiantes obtienen las coordenadas de un vector respecto de una base dada con un único algoritmo correcto, sin que el resultado esté necesariamente vinculado a una adecuada comprensión de los contenidos. Esto se visibiliza al solicitarles que representen gráficamente los resultados analíticos y, o bien no lo pueden hacer, o grafican las coordenadas en la nueva base como si fuese un nuevo vector.

Con el fin de atenuar el problema didáctico detectado sobre la apropiación, comprensión y transferencia del concepto de coordenadas de un vector respecto de una base del espacio bidimensional buscamos en la Teoría Antropológica de lo Didáctico, (en adelante TAD), herramientas y estrategias para abordar la problemática. La TAD define a la actividad matemática y al saber que surge de la misma, como una *organización o praxeología matemática* en una determinada institución. Fonseca y col. (2010) describen a este concepto como:

> Una organización matemática (en adelante OM) surge siempre como respuesta a una cuestión o a un conjunto de cuestiones. No se dice lo que es una OM, pero se da un esbozo de su estructura postulando que está constituida por cuatro componentes principales: **tipos de tareas**, **técnicas**, **tecnologías** y **teorías**. Si ponemos el énfasis en las relaciones dinámicas que se establecen entre dichos componentes a fin de llevar a cabo la actividad matemática necesaria para responder a las cuestiones problemáticas iniciales, entonces aparecen dos caras inseparables: la práctica matemática o "**praxis**"$[T/\tau]$, formada por las **tareas**, T, y las **técnicas** matemáticas, τ; y el "**logos**"$[\theta/\Theta]$, constituido por el **discurso matemático** que justifica e interpreta dicha práctica y que estructuramos en dos niveles: la **tecnología**, θ, que hace referencia directa a la práctica y la **teoría**, θ, que constituye un segundo nivel de justificación de la práctica (o tecnología de la tecnología). Al unir las dos caras inseparables de la actividad matemática, se obtiene la noción de **praxeología matemática**. (Fonseca y col., 2010, p. 6)

A la organización matemática asociada a coordenadas de un vector respecto de una base del espacio bidimensional la denominamos OM $(v)_B$.

La comprensión vista desde la TAD se refiere a la posibilidad de producir (o reproducir) un discurso tecnológico-teórico vinculado con actividades de resolución de problemas. Este discurso construido por los alumnos puede contener argumentos "informales" o "espontáneos" producidos por los sujetos en las instancias de resolución de problemas para comentar, explicar y justificar su actividad. (Bosch, 2000).

La fundamentación de las elecciones, para la propuesta que se detalla en este artículo, se basa en la búsqueda de un "incremento de la comprensión"[1] sobre la organización matemática OM $(v)_B$ por parte de los estudiantes.

[1]Frase de William P. Thurston que hace referencia al "avance de la comprensión humana de las matemáticas". Extraído del artículo de Bosch (2000).

El "grado de completitud" de una *organización matemática local*[2], (en adelante OM), se puede determinar a partir del análisis conjunto entre la dinámica del proceso de estudio (cuyo producto final es la OM en cuestión) y la *estructura* de dicha OM. Los autores Bosch y col. (2004) explican que el proceso de construcción de la OM está dado por diferentes *momentos didácticos* de la actividad matemática, formando parte de lo que denominan *dinámica* del proceso de estudio. En tanto que, designan como *estructura* de una organización matemática local a las cuatro componentes: tarea, técnica, tecnología y teoría, $[T/\tau/\theta/\Theta]$, junto con las relaciones que se establecen entre ellas. En la siguiente tabla se sintetizan los conceptos expresados, que determinan la dinámica del proceso de estudio de una OM y los indicadores de completitud vinculados a la estructura de la OM.

Dinámica del proceso de estudio de la OM "Momentos Didácticos"	La ***Estructura*** de la OM "Indicadores de Completitud"
1) *El momento del primer encuentro* 2) *El momento exploratorio* 3) *El momento de construcción de un entorno tecnológico-teórico* 4) *El momento de trabajo de la técnica* 5) *El momento de la institucionalización* 6) *El momento de la evaluación*	**OML1**[3]. *Integración de tipos de tareas* **OML2**. *Diferentes técnicas y criterios para elegir entre ellas* **OML3**. *Independencia de los ostensivos que integran las técnicas* **OML4**. *Existencia de tareas y de técnicas "inversas"* **OML5**. *Interpretación del resultado de aplicar las técnicas* **OML6**. *Existencia de tareas matemáticas "abiertas"* **OML7**. *Incidencia de los elementos tecnológicos sobre la práctica*

Tabla 1. Análisis del grado de completitud de una OM

Aumentar el *grado de completitud* de la OM $(v)_B$ favorece la construcción del discurso tecnológico- teórico y por consecuencia promueve un incremento en la compresión profunda de esta organización matemática.

A partir del análisis realizado desde la TAD y a los efectos de aumentar el grado de completitud de la OM $(v)_B$ surge el diseño de dispositivos con objetivos educativos específicos. Los mismos inciden en la estructura y desarrollo del proceso de estudio de la Geometría Analítica ayudando a la comprensión de coordenadas

[2]Las Organizaciones Matemáticas se clasifican según su complejidad en: organizaciones matemáticas *puntuales*, *locales*, *regionales* y *globales* (Chevallard, 1999). En este artículo se estudia la completitud de una *organización matemática local* asociada a coordenadas de un vector en el plano respecto a una base dada, designada como OM $(v)_B$, relativa a la institución correspondiente a la asignatura Geometría Analítica de la Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Cuyo.
[3]La denominación de los indicadores es tomada de los autores Bosch y col. (2004).

de un vector respecto de una base, por lo que se denominan *dispositivos didácticos* (Chevallard y col., 1997).

Un obstáculo cognitivo importante para la transición del pensamiento matemático elemental que han incorporado los estudiantes en la secundaria, al pensamiento matemático avanzado necesario para la trayectoria académica universitaria, es la falta de relación entre los registros semióticos de representación gráfica y analítica (Bosch y col., 2004). Se decide, por lo tanto, elaborar dispositivos didácticos para fortalecer y promover la construcción de un entorno tecnológico-teórico que les permita a los estudiantes poder debatir sobre sus técnicas, discernir cuál es más conveniente usar y crear nuevas técnicas que sean más económicas y/o más eficientes.

Los mismos se incorporan a las actividades existentes en la asignatura y se planifican de acuerdo con el cronograma indicado en la Tabla 2, cuya implementación describiremos en los siguientes apartados. En la sección 2 se presentan y describen los tres dispositivos didácticos y en la sección 3 se amplía cada uno de los *momentos* e *indicadores* de la Tabla 1, ya que son las herramientas que se utilizan para el diseño y análisis de nuestra propuesta de enseñanza.

	Semana 1	Semana 2	Semana 3	Semana 4	Semana 5
	UNIDAD 1: "Espacios Vectoriales"			UNIDAD 2: "Planos y Rectas"	Examen Parcial
Tema	Espacios Vectoriales	Vectores geométricos: Producto Escalar	Vectores geométricos: Producto Vectorial y Mixto.	Planos	Esp. Vectoriales. Vectores geométricos: Producto escalar, vectorial y mixto.
Implementación	*Trabajo asincrónico de los estudiantes, previo a clase, con las actividades de los dispositivos N°1 y N°2.* *Análisis sincrónico, en clase, de los resultados obtenidos en dispositivos N°1 y N°2 con la mediación del docente.* *Trabajo sincrónico, en clase, de la Incorporación 1 Dispositivo N°3 en actividades áulicas*	*Trabajo asincrónico de los estudiantes transfiriendo resultados obtenidos en Dispositivos N°1, 2 y 3 a nuevas situaciones.* *Análisis sincrónico, en clase, de los resultados de la transferencia realizada por los estudiantes, con mediación del docente.*	*Trabajo asincrónico de los estudiantes transfiriendo resultados obtenidos en Dispositivos N°1, 2 y 3 a nuevas situaciones.* *Análisis sincrónico, en clase, de los resultados de la transferencia realizada por los estudiantes, con mediación del docente.*	**Repaso Parcial** *Trabajo sincrónico de la Incorporación 2-Dispositivo N°3 incluidas en una guía de actividades destinada al repaso en clase de los contenidos del primer parcial.*	*Integración a la evaluación de actividades coherentes con las realizadas en los Dispositivos N°1, N°2 y N°3.*

Tabla 2. Cronograma parcial de la asignatura con las inserciones de los dispositivos didácticos

§2. Descripción de los dispositivos

2.1. Dispositivo Nº1: "Actividad Inicial". A los efectos de revisar los conocimientos previos de los estudiantes, necesarios para iniciar el estudio de la OM $(v)_B$, analizamos qué contenidos se estudian en los cursos de ingreso obligatorios.

Detectamos que los ingresantes a las carreras de Ingeniería estudian conceptos básicos asociados a vectores en el plano desde un enfoque analítico en el curso de Física. Por otra parte, los alumnos de la Licenciatura en Ciencias de la Computación estudian las operaciones entre vectores para resolver problemas en el curso de Resolución de Problemas.

Diseñamos el primer dispositivo didáctico para reforzar y nivelar los contenidos previos requeridos para una adecuada comprensión de OM $(v)_B$. Además de revisar dichos contenidos, se introduce a los estudiantes *en tareas de visualización, interpretación de las operaciones básicas entre vectores y del lenguaje simbólico*.

Este primer dispositivo comienza con el *momento de construcción* de un entorno tecnológico-teórico, donde los estudiantes fundamentan sus técnicas y las comunican a sus pares desarrollando su propio discurso tecnológico-teórico en cuestión, en paralelo al *momento de institucionalización*. De ahí, la potencia de este dispositivo teniendo en cuenta la comprensión que se busca incrementar.

Además, esta actividad inicia con los *escenarios de exploración y experimentación* que están disponibles en el espacio virtual de la asignatura, aula abierta de Facultad de Ingeniería, para explorarlos de forma asincrónica como actividad preparatoria previa a la primera clase de *desarrollo de contenidos*.

El dispositivo N°1 contiene actividades para desarrollar en dos partes implementadas desde GeoGebra (Figura 1). La primera parte, "*Vectores Geométricos*", tiene como objetivo la visualización de las operaciones producto por un escalar y suma de vectores geométricos, sin definir un espacio vectorial determinado. La segunda parte, "*Vectores en el plano*", trabaja los mismos conceptos teóricos a partir de un nuevo recurso interactivo, pero con vectores en el plano cartesiano.

Actividades iniciales con el Recurso Interactivo - Vectores Geométricos:

a) Selecciona diferentes valores para el parámetro k, y visualiza qué ocurre con el vector $k\mathbf{w}$.

b) Registra en tu cuaderno los cambios observados para $k > 0$ y $k < 0$.

c) Selecciona la casilla de "Mostrar segundo vector", modifica los valores de α y visualiza y registra qué ocurre con el vector $\mathbf{v}$.

d) Compara los cambios que produce el parámetro k en el vector $k\mathbf{w}$ con los cambios que efectúa el parámetro α en el vector $\mathbf{v}$. (Sugerencia: en tu análisis incluye las opciones $k = 0$ y $\alpha = 0$).

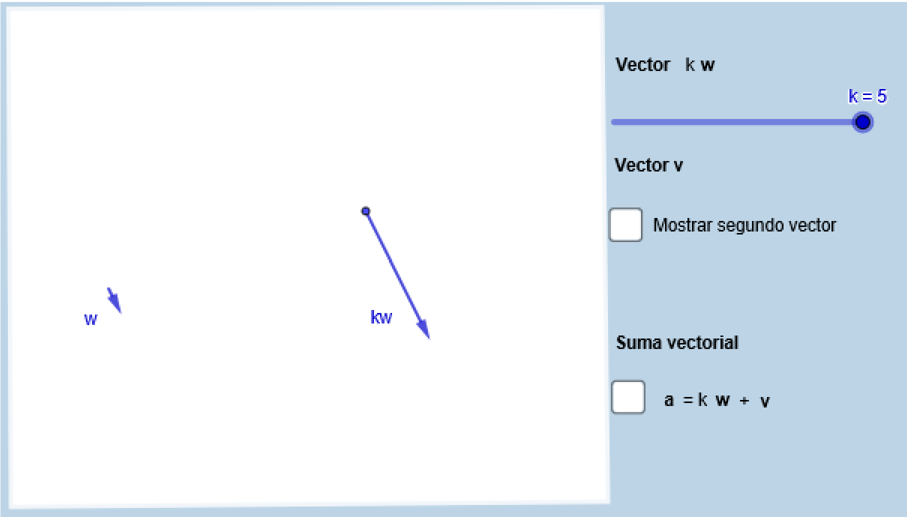
e) Selecciona la casilla asociada a la suma vectorial y vuelve a modificar alternativamente los valores de los parámetros α y k para visualizar los resultados de diferentes sumas.

f) Elige una configuración de modo tal que los vectores $k\mathbf{w}$ y $\mathbf{v}$ pertenezcan a la misma recta y tengan el mismo sentido. Observa qué ocurre con el vector suma.

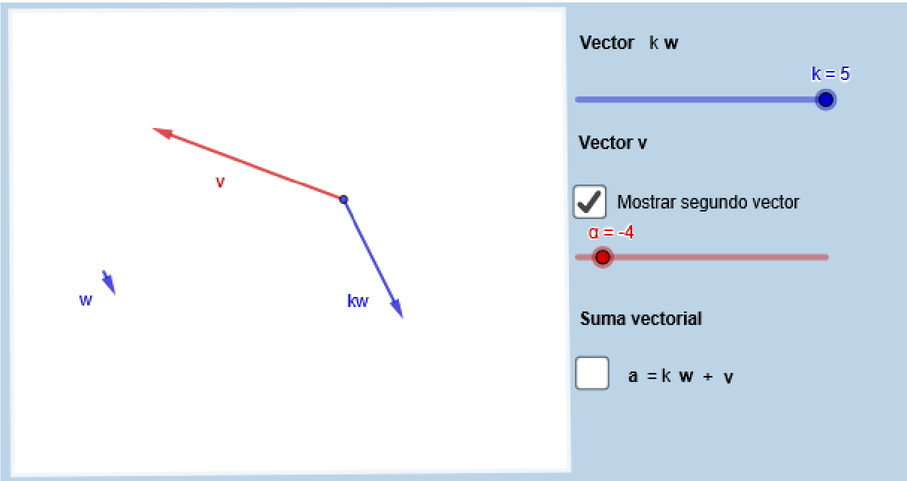
g) Elige una configuración de modo tal que los vectores $k\mathbf{w}$ y $\mathbf{v}$ pertenezcan a la misma recta y tengan sentido contrario. Observa qué ocurre con el vector suma.

FIGURA 1. Enunciados de las actividades del Dispositivo N°1

Parte I: "Vectores Geométricos". Para comenzar se dispone de dos vectores libres w y kw, con un deslizador asociado al parámetro k, que permite visualizar de forma dinámica cuál es el vector que se obtiene al multiplicar por un escalar al vector dado w. El parámetro puede tomar valores positivos, negativos y nulo para que el estudiante pueda elaborar conclusiones sobre cómo afecta tanto el signo como el valor del escalar, en el módulo y sentido del vector resultante (Figura 2.A).



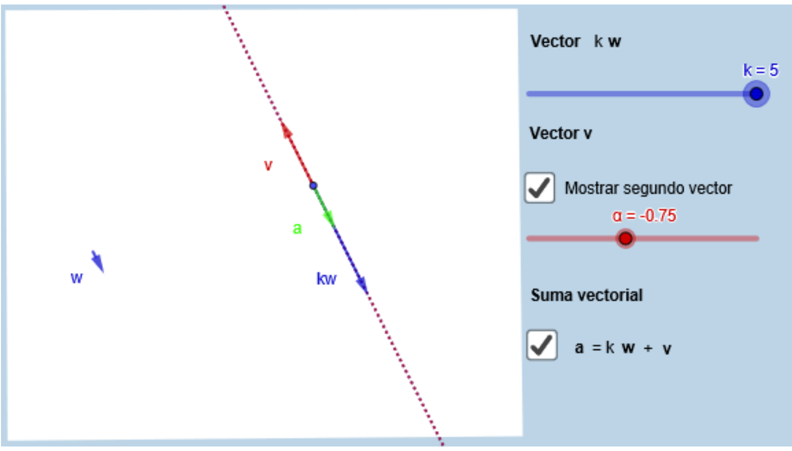
(A) Recurso Geométrico Interactivo - Configuración Inicial parte I



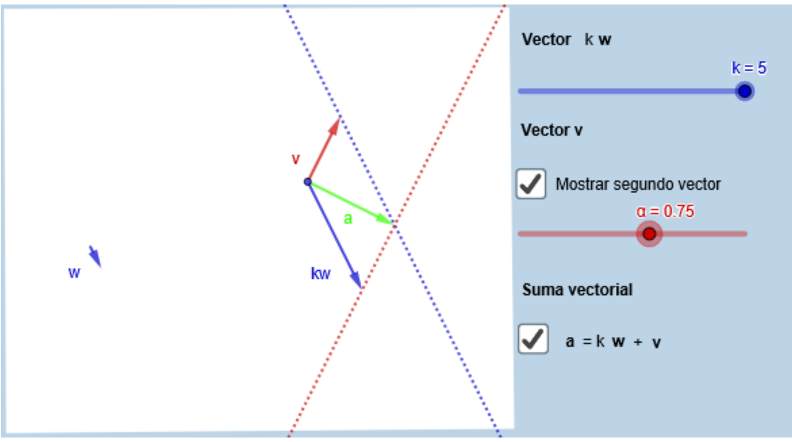
(B) Recurso Geométrico Interactivo - Vectores de la parte I

FIGURA 2

Dentro del mismo recurso, el estudiante puede seleccionar la opción para que aparezca un segundo vector v (Figura 2.B). El parámetro asociado al deslizador α permite obtener vectores v no paralelos de diferentes longitudes. Así mismo es posible seleccionar la opción que permite visualizar el vector a, que se obtiene al sumar vectorialmente los vectores elegidos kw y v. Se guía al alumno a través de las actividades propuestas (Figura 3.A) para que pueda sumar vectores que se encuentren en la misma recta de acción u otra combinación posible, donde kw y v sean linealmente independientes (Figura 3.B).



(A) Suma de vectores Linealmente Dependientes



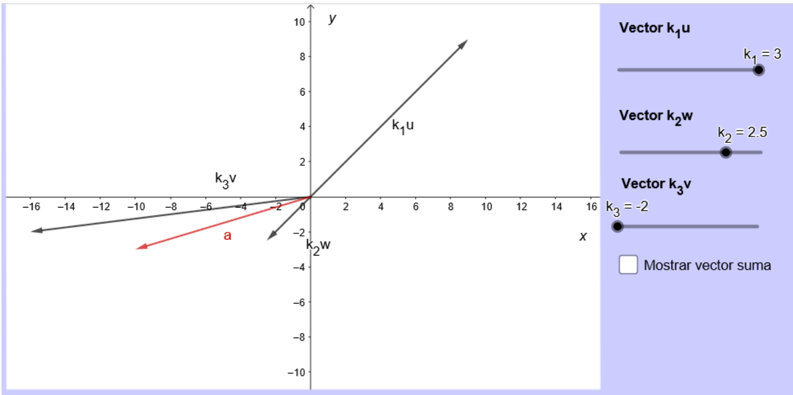
(B) Suma de vectores Linealmente Independientes

FIGURA 3

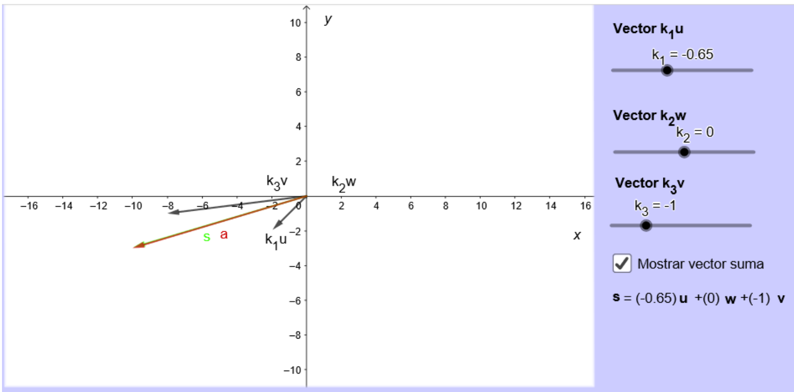
Sin introducir los conceptos de combinación e independencia lineal el estudiante ingresa a la primera clase de Geometría Analítica con un trabajo preliminar sobre operaciones entre vectores geométricos, enriqueciendo los conocimientos previos estudiados en los cursos de ingreso, desde la interpretación geométrica.

Durante el desarrollo de la parte I, el estudiante anota en su cuaderno las conclusiones que elabora. Las mismas se retoman la primera semana de cursado de Geometría Analítica en el momento de institucionalización (Tabla 2 - Columna 1), en el cual los docentes guiamos a los estudiantes a vincular entre sí los conceptos de base, independencia y combinación lineal, que son los saberes necesarios para mejorar la comprensión de la OM $(v)_B$.

Parte II: "Vectores en el plano". El recurso contiene un vector fijo a y tres vectores k_1u, k_2w y k_3v que el estudiante puede modificar a partir de los respectivos deslizadores k_1, k_2 y k_3. Además, dispone de una casilla que le permite mostrar el vector suma s, dado por $k_1u + k_2w + k_3v$. (Figura 4.A). Se motiva al estudiante con un desafío que implica obtener al vector fijo a, a partir de diferentes combinaciones lineales de los tres vectores k_1u, k_2w y k_3v. En la consigna se brindan sugerencias para iniciar la búsqueda de soluciones, tales como un valor nulo para k_1 (o para k_2). El uso de los deslizadores le permite explorar, visualizar posibles respuestas y validar las soluciones que proponga de forma gráfica seleccionando la casilla de "Mostrar vector suma", es decir, que al elegir una terna de valores para los deslizadores puede mostrar el vector s y verificar si es coincidente con el vector fijo a.



(A) Recurso Geométrico Interactivo – Configuración Inicial – Parte II



(B) Recurso Geométrico Interactivo- Validación de una solución particular

FIGURA 4

Las conclusiones que los estudiantes elaboran se recuperan en las clases sincrónicas junto con el docente y sus compañeros para relacionarlas con el concepto de base (Tabla 2 - Columna 1). Luego de la exploración y el análisis del desafío, se busca que los alumnos puedan inferir que la combinación lineal de un vector respecto a una base de un espacio vectorial es única y que existen infinitas combinaciones posibles, cuando el conjunto de vectores no cumple con la definición de base.

2.2. Dispositivo Nº2: "Autoevaluación y Verdadero o Falso". Diseñamos este dispositivo con los objetivos educativos de acompañar a los estudiantes en la revisión de sus aprendizajes asociados a la OM $(v)_B$ antes de la primera instancia de evaluación parcial, adquirir o reforzar una metodología de estudio para alcanzar los objetivos de la asignatura y promover una comunicación apropiada de sus razonamientos y justificación de sus producciones. Por otra parte, podemos obtener información acerca de la interpretación gráfica OM $(v)_B$ que realizan los estudiantes a los efectos de detectar problemas de comprensión antes de la primera evaluación parcial

El *momento de evaluación* de la OM $(v)_B$ se inicia a partir de este dispositivo, con dos tareas que son diferentes: una de ellas es una autoevaluación de múltiple opción y la segunda es un ejercicio de verdadero o falso que tienen objetivos en común, pero se implementan en distintos momentos (Tabla 2 - Columna 2). La resolución de ambas partes, no requieren desarrollos analíticos, sino que el potencial del dispositivo radica en la comprensión de los conceptos asociados a la OM $(v)_B$ partiendo desde el análisis de la información gráfica proporcionada. Esto último, forma parte del objetivo principal de la propuesta didáctica, es decir, relacionar los registros semióticos (gráfico y analítico) evitando que el "saber hacer" algorítmico no esté asociado a una apropiada comprensión de la organización matemática en cuestión.

La primera parte se implementa en el aula virtual de Geometría Analítica dentro del aula abierta de Facultad de Ingeniería, Plataforma Moodle, y está disponible luego de la primera semana de clases. A modo de autoevaluación, se le proporciona al estudiante una actividad que evalúa principalmente la interpretación gráfica del concepto de coordenadas de un vector respecto a una base dada en el plano, utilizando una pregunta de múltiple opción. Con el fin de guiar a los alumnos en la organización y planificación del estudio de la asignatura, dicha tarea se plantea con una fecha límite de entrega. Finalizado este período de tiempo se plantea en la siguiente clase, en forma de debate, la respuesta correcta y la justificación de las opciones incorrectas.

Como cierre de la clase sincrónica mencionada, se les propone la segunda parte del dispositivo que consiste en analizar la veracidad de ciertas afirmaciones. Para esta última actividad, se les proporcionan los gráficos y los enunciados durante la clase, dejándoles un tiempo para la interpretación y justificación de sus elecciones. Luego del análisis individual, se debate en forma grupal la argumentación para cada proposición con la apropiada guía del docente (Tabla 2 - Columna 1).

Parte I: "Autoevaluación". Consiste en una pregunta que tiene como datos las coordenadas de los vectores u, v y w, en la que se pide indicar cuál de los gráficos representa adecuadamente las coordenadas del vector w respecto de la base que determinan u y v (Figura 5).

Dado el conjunto formado por los vectores $u = (1, 2)$ y $v = (2, -2)$. La representación geométrica de las coordenadas del vector $w = (-3, -1)$ en la base $B = \{u, v\}$ es:

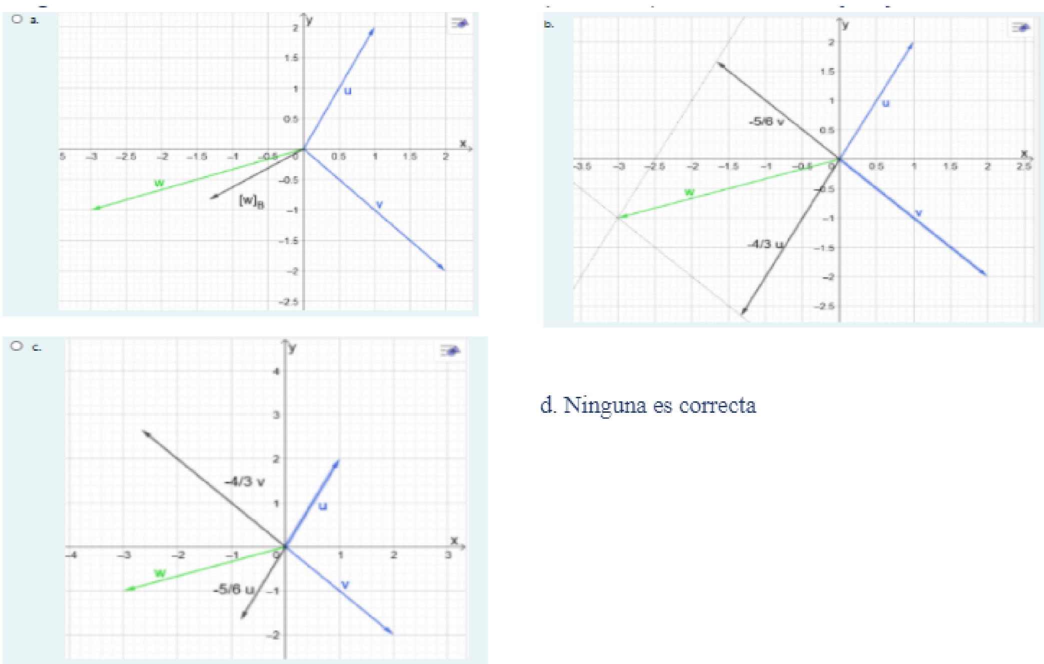


FIGURA 5. Enunciado y respuestas posibles de la autoevaluación implementada en la Plataforma Moodle

La representación gráfica dada como opción en a) es incorrecta, pero es la que se encuentra en muchas producciones escritas y orales de los estudiantes, como así también en las instancias de evaluación. Se percibe un "saber hacer" algorítmico correcto, que no está asociado a una apropiada comprensión del contenido mencionado, ya que grafican un vector de coordenadas $(-4/3, -5/6)$ como representación gráfica de $(w)_{\{u,v\}}$.

La opción b) corresponde a la respuesta correcta que se decide dar como una de las opciones para que el estudiante que logra la compresión, pueda visualizar cómo es una representación gráfica completa, con las referencias necesarias para relacionarlo con el desarrollo analítico. En la representación gráfica dada en el inciso c) se han asociado los escalares en el orden incorrecto, por lo que se busca mostrar la relación entre el orden en el que se expresan las coordenadas de un vector respecto a una base dada y el orden de los vectores que determinan la base.

Se muestra gráficamente que el vector w no es el resultado de la suma vectorial $-5/6u - 4/3v$.

Por último, se da como opción "*Ninguna de las anteriores*" pensando que es posible encontrar otros errores u obstáculos vinculados a la comprensión de la OM $(v)_B$ diferentes a los mencionados en las descripciones anteriores. En tal situación, corresponde al docente la tarea de revelar, durante la puesta en común, cuáles son los razonamientos de los alumnos que indican como correcta esta respuesta para poder corregirlos.

Parte II: "Verdadero o Falso". Como complemento de la parte I propuesta para el trabajo autónomo asincrónico del alumno, se elabora una parte II que consiste en una tarea de verdadero o falso, a los efectos de promover el análisis conceptual de los contenidos asociados a la OM $(v)_B$ de forma sincrónica con el acompañamiento del docente.

Tal como se puede ver en la Figura 6 se muestran dos representaciones del vector v, como combinación lineal de bases diferentes en R^2. En el primer gráfico, se adopta la base canónica del espacio bidimensional y en el segundo una base formada por los vectores a y b.

Las afirmaciones "*El conjunto $B = \{i, j\}$ es base para el espacio vectorial R^2*" y "*El conjunto $A = \{a, b\}$ es base para el espacio vectorial R^2*" tienen como objetivo identificar y analizar dos conjuntos de vectores que determinan bases para un mismo espacio vectorial que luego son tomados como referencia en las afirmaciones que siguen.

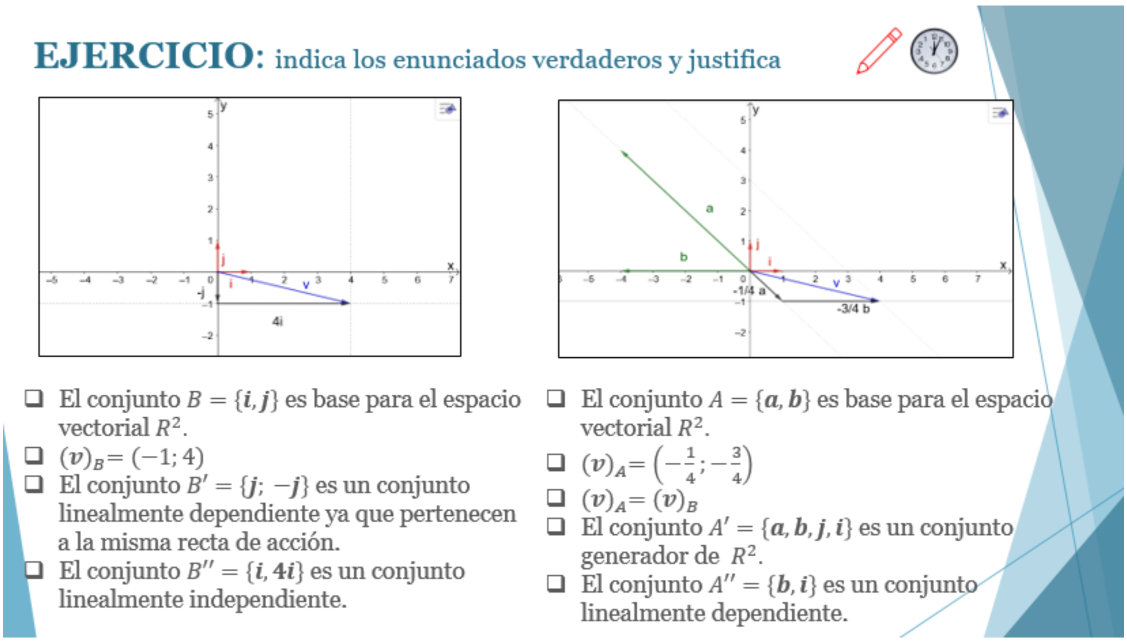


FIGURA 6. Gráficos y enunciados del ejercicio Verdadero o Falso-Parte II

La proposición "*El conjunto $B' = \{j; -j\}$ es un conjunto linealmente dependiente ya que pertenecen a la misma recta de acción*" es verdadera, al igual que "*El conjunto $A'' = \{b, i\}$ es un conjunto linealmente dependiente*". El alumno puede visualizar en la gráfica que ambos vectores están representados sobre la misma recta de acción, pero a continuación se les propone que "*El conjunto $B'' = \{i, 4i\}$ es un conjunto linealmente independiente*" y en este caso no se encuentran graficados los vectores i y $4i$ sobre la misma recta de acción por lo que se busca reflexionar sobre el concepto de "vectores libres", resultando falsa esta última proposición.

Luego se colocan afirmaciones sobre las coordenadas del vector v, respecto de las bases A y B, buscando analizar las relaciones entre el orden de los vectores de la base y el de las coordenadas. La afirmación sobre el vector de coordenadas $(v)_B$, resulta falsa porque el orden de los escalares está invertido. En tanto que, el vector de coordenadas $(v)_A$ es correcto y puede justificarse desde la suma vectorial que se encuentra representada en el gráfico de la derecha.

Por último, se busca reflexionar sobre el concepto de conjunto generador a partir de la afirmación "*El conjunto $A' = \{a, b, j, i\}$ es un conjunto generador de R^2*" que es verdadera. Esto permite discutir la diferencia conceptual entre conjunto generador y base de un espacio vectorial.

2.3. Dispositivo Didáctico Nº3: "Razonamiento inverso". Al realizar el análisis del material existente en la asignatura detectamos que en las guías de actividades propuestas para los escenarios de *desarrollo de contenidos* existían tareas asociadas a encontrar las coordenadas de un vector respecto de una base dada en R^2. Sin embargo, no había ejercitación que promueva el razonamiento inverso, es decir, recuperar las coordenadas de un vector en la base canónica teniendo como dato las coordenadas del vector en otra base. Por lo tanto, decidimos incorporar a la guía de aula-taller una actividad que llamamos a continuación "*Incorporación Nº1*" (*Geometría Analítica para ciencias e ingeniería. Actividades para el Aprendizaje.* Raichman y col. (2023)).

Por otra parte, en la guía elaborada para el repaso correspondiente a la evaluación parcial agregamos una tarea de verdadero o falso que plantea el análisis de afirmaciones que requieren del razonamiento inverso, a la cual denominamos como "*Incorporación Nº2*" (Tabla 2 - Columna 4).

Ambas actividades se proponen para llevarlas a cabo en clase de manera sincrónica con acompañamiento del docente como mediador.

Si bien en este dispositivo están presentes todos los momentos didácticos, excepto el de evaluación, se priorizan y potencian los momentos de *trabajo con la técnica* y el de *construcción* colaborativa del entorno *teórico-tecnológico*. A partir de este dispositivo se introducen tipos de *tareas inversas* que aumentan el grado de *completitud* de la OM $(v)_B$ y, en consecuencia, favorecen la *comprensión* de dicha organización matemática. Es decir, se incorporan nuevas tareas desde enfoques diferentes a los trabajados en los escenarios de desarrollo de contenidos, de exploración y experimentación (Raichman & Mirasso, 2018), mediante la interacción con el docente y la comunicación entre sus pares que, al aumentar la completitud, promueven y enriquecen la *comprensión profunda* de la OM $(v)_B$.

Incorporación Nº1. En la clase de aula taller asociada a las temáticas de la OM $(v)_B$ del libro *Geometría analítica para ciencias e ingenierías: Actividades para el aprendizaje* (Raichman y col., 2023) trabajamos con una guía de actividades que contiene cinco ejercicios de desarrollo. En el último ejercicio se presentan distintos tipos de tareas: graficar vectores con origen en diferentes puntos del plano; determinar los escalares que constituyen una combinación lineal de forma gráfica; justificar si un conjunto de vectores dados es un conjunto generador del espacio bidimensional; justificar si un conjunto de vectores dados constituye una base del espacio bidimensional; obtener coordenadas de un vector respecto de una base de R^2; validar soluciones analíticas y gráficas con un recurso de geometría dinámica.

Como complemento de las tareas anteriores agregamos un nuevo inciso solicitando las coordenadas del vector u respecto de la base canónica, teniendo como dato las coordenadas del vector u en la base B. El enunciado completo del mencionado ejercicio se muestra en la Figura 7.

Seleccionamos dicho ejercicio para realizar esta primera incorporación debido a que involucra diferentes tipos de tareas, buscando así completar los requerimientos iniciales, al mismo tiempo que se pretende evitar la mecanización de procedimientos algorítmicos de las tareas asociadas.

9. En un sistema coordenado *xy*, realice el siguiente procedimiento:

a) Ubique el punto inicial A(-2, 1), a partir del cual grafique el vector $\boldsymbol{w}$= (0, 2.5).

b) Ubique el punto C(2, 2), punto inicial de los vectores $\boldsymbol{v_1}$= (2, 1.5) y $\boldsymbol{v_2}$= (-0.5, 1).

c) Por el punto A trace una línea paralela a la dirección dada por el vector $\boldsymbol{v_1}$.

d) Por el punto extremo final del vector $\boldsymbol{w}$ trace una línea paralela a la dirección dada por el vector $\boldsymbol{v_2}$.

e) Determine gráficamente los escalares k_1 y k_2 que permiten escribir al vector $\boldsymbol{w}$ como combinación lineal de los vectores $\boldsymbol{v_1}$ y $\boldsymbol{v_2}$. Compare con la solución analítica.

f) Indique, justificando su respuesta, si modificando las coordenadas de A y/o C se modifica su respuesta.

g) Indique, justificando su respuesta, si el conjunto $\{\boldsymbol{v_1} ; \boldsymbol{v_2}\}$ genera a $\mathbb{R}^2$.

h) Justifique que el conjunto B=$\{\boldsymbol{v_1} ; \boldsymbol{v_2}\}$ es base de $\mathbb{R}^2$ y determine las coordenadas de $\boldsymbol{w}$ en dicha base.

i) Indique las coordenadas del vector $\boldsymbol{u}$ sabiendo que $(\boldsymbol{u})_B$=(-2,3).

j) Utilice el *Recurso Geométrico Interactivo RGI–Combinación Lineal* para verificar las respuestas (a) a (e) y el *RGI-Cambio de base* para verificar la respuesta. [*Libro Interactivo Geometría Dinámica*].

Figura 7. Enunciado del ejercicio 9 de la Guía de Actividades con la incorporación Nº1

Incorporación Nº2. En la clase previa a la instancia de evaluación parcial, trabajamos con una guía de actividades que contienen ejercicios asociados a los temas que serán evaluados. Para hacer la segunda incorporación seleccionamos el primero de dichos ejercicios en el cual se dan como datos una base de R^2 y un vector v que deben expresar en dicha base. Bajo el formato de verdadero o falso se incorpora un cuarto inciso que complementa la revisión de los contenidos asociados a la OM $(v)_B$. En éste se busca que el alumno fundamente la veracidad de las proposiciones, explicitando el nivel de comprensión alcanzado en los conceptos asociados a la OM $(v)_B$ y la integración de los resultados obtenidos en los primeros incisos (Figura 8).

Las proposiciones i) e iii), indicadas en la Figura 8 son verdaderas y se seleccionan con la finalidad de repasar coordenadas de un vector respecto a la base canónica. Por otra parte, se vinculan los conceptos de coordenadas de un vector respecto a una base ortonormal, con el de proyecciones ortogonales de un vector en las direcciones de los vectores de la base. Las afirmaciones falsas que requieren justificación son ii) e iv), y se seleccionaron para promover la reflexión sobre qué ocurre cuando se solicitan las coordenadas de un vector que pertenece a la base dada.

Ejercicio 1

a) Dado el conjunto $B_1 = \{\boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2}\}$ base de R^2, exprese al vector $\boldsymbol{v}$ en la base B_1 y en la base *canónica*, B_C. $\boldsymbol{u_1} = (2, -3)$; $\boldsymbol{u_2} = (3, 2)$; $\boldsymbol{v} = (-1, -2)$

b) Represente gráficamente el vector $\boldsymbol{v}$, los vectores de la base B_1 y verifique la respuesta dada en el inciso a).

c) Efectúe cambios apropiados en los vectores $\boldsymbol{u_1}$ y $\boldsymbol{u_2}$, de forma tal de obtener una nueva base B_2 que sea base ortonormal de R^2. Justifique su respuesta.

d) Coloque V (verdadero) o F (falso) en cada uno de los siguientes resultados. Justifique.

i.	$(\boldsymbol{v})_{B_c} = (-1, -2)$	
ii.	$(\boldsymbol{u_1})_{B_1} = (2, -3)$	
iii.	$(\boldsymbol{v})_{B_2} = (proy_{\vec{u_1}} \boldsymbol{v}, proy_{\vec{u_2}} \boldsymbol{v})$	
iv.	$(\boldsymbol{u_2})_{B_1} = (1,0)$	

Figura 8. Enunciado del guía de repaso para el primer examen parcial con la incorporación Nº2 (inciso d)

La implementación de la propuesta descripta que presentamos en este apartado se integra a los diferentes escenarios de interacción que conforman el modelo pedagógico de la asignatura, por lo que en cada uno de ellos es esencial la participación activa de los estudiantes, siendo el docente quien guía y acompaña el proceso de aprendizaje. En palabras de Chevallard: "*alrededor del juego del maestro: siempre sutilmente presente, aunque en ausencia, éste debe saberse ausentar incluso en presencia, a fin de dejar al alumno libre para conquistar una independencia que la figura tutelar del profesor hace a la vez posible e incierta*", Chevallard (1999, p. 21). En la siguiente sección se desarrolla el análisis de la propuesta didáctica desde el enfoque de la TAD.

§3. Análisis de la propuesta didáctica bajo el marco teórico de la TAD

Desde la TAD, el "grado de completitud" de una organización matemática local se puede determinar a partir del análisis conjunto entre la *dinámica* del proceso de estudio y la *estructura* de dicha OM. (Tabla 1)

En el proceso de construcción de una organización matemática local la *dinámica* está formada por los *momentos didácticos* que constituyen dimensiones del proceso que no necesariamente hacen referencia al orden cronológico ya que pueden darse en simultáneo o aparecer en varias ocasiones sin tener un orden prefijado.

Son seis los momentos didácticos: 1) el *momento del primer encuentro* con el tipo de tareas vinculado a una cuestión con sentido; 2) el *momento exploratorio* del tipo de tareas donde la comunidad puede crear técnicas para resolver las tareas; 3) el *momento de construcción* de un entorno tecnológico-teórico que fundamente y explique las técnicas utilizadas; 4) el *momento de trabajo de la técnica* que promueve la evolución de las técnicas existentes y la construcción de nuevas técnicas que resuelven las tareas iniciales o dan respuestas a tipos de tareas que serán integradas a la OM en construcción; 5) el *momento de la institucionalización* donde se diferencian y delimitan los elementos que son constituyentes de la OM de los que resultan auxiliares de la construcción; 6) el *momento de la evaluación* de la organización matemática construida.

El resultado del proceso de construcción que satisface y cumple con los seis momentos caracterizados, es una OM relativamente completa.

Cabe aclarar que una organización matemática local no es "completa" o "incompleta" sino que es "más" o "menos" completa dependiendo si están presentes los momentos y del grado en que sus componentes $[T/\tau/\theta/\Theta]$ cumplen las condiciones descriptas por los siguientes indicadores:

OML1. *Integración de tipos de tareas*. En una OM existen diferentes tipos de tareas. De acuerdo con este indicador, el grado de completitud depende de la integración entre los distintos tipos de tareas.

OML2. *Diferentes técnicas y criterios para elegir entre ellas*. Una OM será más completa si pueden existir técnicas alternativas o variaciones de una misma técnica para resolver algunos de sus tipos de tareas, sin que exista una vinculación entre cada tipo de tarea con su única técnica asociada. El discurso tecnológico permite cuestionar las distintas técnicas, analizar sus equivalencias o diferencias e identificar cuál es la más económica.

OML3. *Independencia de los ostensivos*[4] *que integran las técnicas*. La flexibilidad de las técnicas de una OML está asociada con que las mismas acepten diferentes representaciones ostensivas, dependiendo de la actividad matemática en las que están inmersas. Una OM es más completa si presenta independencia de los ostensivos que integran las técnicas, es decir, si éstas no se identifican rígidamente con objetos ostensivos para ser aplicadas.

OML4. *Existencia de tareas y de técnicas "inversas"*. El grado de completitud de una OM según este indicador está asociado con el hecho de que existan en ella técnicas "reversibles". Es decir, que existan técnicas que permitan resolver un tipo de tarea y también la tarea inversa (por "inversa" se entiende que es aquella tarea que se define intercambiando datos e incógnitas o cuestionando las condiciones de realización de la tarea o de la aplicación de una determinada técnica).

OML5. *Interpretación del resultado de aplicar las técnicas*. Este indicador de completitud se refiere a la existencia en una OM de elementos tecnológicos que permitan interpretar el funcionamiento y los resultados de las técnicas aplicadas. Es decir, una OM es más completa si su discurso tecnológico adquiere mayor funcionalidad, habilitando a la interpretación del funcionamiento de las técnicas y de su resultado.

OML6. *Existencia de tareas matemáticas "abiertas"*. Una OM será más completa en la medida en que permita abordar cuestiones "abiertas", es decir, tipos de tareas en los que se estudian situaciones donde los datos y las incógnitas no están prefijados en su totalidad.

OML7. *Incidencia de los elementos tecnológicos sobre la práctica*. El grado de completitud de una OM depende de las relaciones que se establezcan entre sus elementos tecnológicos y de su incidencia efectiva sobre la práctica matemática que se lleva a cabo en una OM.

Sintetizamos en la Tabla 3 los momentos e indicadores que se fortalecen con cada dispositivo elaborado, para que la organización matemática local OM $(v)_B$ sea "más" completa.

El *momento del primer encuentro* con el tipo de tareas vinculado a la OM $(v)_B$ se inicia con el dispositivo Nº1 al igual que el momento *exploratorio* del tipo de tareas.

[4]Según Bosch (2000) los *objetos ostensivos* son aquellos objetos que se perciben: se ven, se tocan, se oyen, etc. Son los objetos materiales o los objetos dotados de cierta materialidad como las escrituras, los grafismos, los sonidos, los gestos, etc. Se habla de "manipulación" de los objetos ostensivos, aunque los ostensivos en cuestión sean escrituras, gráficos, gestos o discursos. A diferencia, los *objetos no-ostensivos* son todos aquellos objetos que existen institucionalmente, en el sentido en que se les atribuye una determinada existencia, pero que no se pueden percibir ni mostrar por sí mismos: las ideas, los conceptos, las creencias, etc. Lo que sí se puede es "invocar" o "evocar" mediante la manipulación de ciertos objetos ostensivos apropiados.

	Momentos Didácticos						Indicadores de Completitud						
	1	2	3	4	5	6	OML1	OML2	OML3	OML4	OML5	OML6	OML7
Dispositivo Nº1													
Dispositivo Nº2													
Dispositivo Nº3													

TABLA 3. Aportes de cada dispositivo a la completitud de la OM$(v)_B$

Luego el estudiante saca conclusiones que se retoman fuertemente en el *momento de la institucionalización* que se da en paralelo al *momento de construcción*, donde los estudiantes fundamentan sus técnicas y las comunican a sus pares iniciando la construcción del discurso tecnológico-teórico en cuestión.

Como puede verse, los momentos de *primer encuentro*, *exploración*, *construcción* e *institucionalización* también están presentes en la implementación de los dispositivos Nº2 y Nº3. En el caso del dispositivo Nº2, además aparece el primer momento de *autoevaluación* en la OM $(v)_B$, ya que la parte I del mismo contiene una pregunta de múltiple opción para que el alumno aplique los aprendizajes que ha logrado en la primera semana. En paralelo, está presente el momento del *trabajo con la técnica*, ya que se pretende desde la representación gráfica y la interpretación de la misma que el estudiante pueda responder a la actividad fundamentando su elección en la clase posterior junto con el docente. Estos momentos de *institucionalización* y de *construcción* del entorno tecnológico-teórico, se potencian a su vez con la implementación de la Parte II del dispositivo.

Con las incorporaciones del dispositivo Nº3 buscamos que los alumnos cuestionen las técnicas y puedan discernir con argumentos que les brinda el discurso tecnológico construido, cuál es la técnica más económica que permite responder a las actividades de forma clara, rápida y sin demasiados cálculos.

Si bien los seis momentos didácticos ya estaban presentes en la asignatura, los nuevos dispositivos los complementan y enriquecen.

Por otra parte, con la incorporación de todos los dispositivos propuestos se integran nuevos tipos de tareas a los que estaban presentes en esta organización matemática, aportando de este modo al indicador **OML1**- *Integración de tipos de tareas*. Por ejemplo, con el Dispositivo Nº1 incorporamos la tarea de analizar desde un recurso geométrico interactivo los resultados gráficos de las operaciones vectoriales; con el dispositivo Nº2, la tarea de responder preguntas de múltiple opción y analizar la veracidad de afirmaciones que refieren a datos gráficos; con el dispositivo Nº3, se integran las tareas del tipo "inverso".

Cada tipo de tarea no está aislado, sino que permiten desarrollar nuevas técnicas o mejorar técnicas mediante la aplicación sucesiva de ellas dentro de un discurso tecnológico compartido. A modo de ejemplo, con la primera incorporación del dispositivo Nº3, agregamos en un ejercicio de la guía de práctica un inciso que se integra a los demás con un tipo de tarea, (calcular las coordenadas de un vector en la base canónica, conocidas sus coordenadas en otra base dada), diferente a los tipos de tareas de los incisos restantes. Estos nuevos tipos de tareas generan la creación de nuevas técnicas o variación de una misma técnica para las tareas propuestas. Es decir, que el indicador **OML2** - *Diferentes técnicas y criterios para elegir entre ellas* también se pone en juego con la incorporación de todos los dispositivos. El momento de institucionalización propuesto por el docente luego del trabajo de cada dispositivo, permite que los alumnos comuniquen y fundamenten sus técnicas a partir del entorno tecnológico en construcción. En este intercambio entre estudiantes y el docente, se busca generar criterios a la hora de elegir una u otra técnica para dar respuestas a las actividades.

En los ejercicios de verdadero o falso diseñados para los dispositivos Nº2 y Nº3, se proponen afirmaciones utilizando diferentes objetos ostensivos para referirse a las coordenadas de un vector en una base específica. Por ejemplo, se solicita indicar la afirmación incorrecta y se dan tres afirmaciones equivalentes y correctas, que se refieren a los mismos conceptos, pero con diferentes ostensivos: $u = (-14, 10)$; $u = -14i + 10j$; $u = -2w + v$. El indicador de completitud que se refuerza con estas actividades es el **OML3** - *Independencia de los ostensivos que integran las técnicas*, evitando que asocien las técnicas trabajadas con un único tipo de representación ostensiva.

Al indicador **OML4** - *Existencia de tareas inversas* lo consideramos para la elaboración del dispositivo Nº3, ya que a partir de las incorporaciones se introducen tareas donde se han intercambiado datos por incógnitas promoviendo de este modo el razonamiento inverso.

Los indicadores **OML5** - *Interpretación del resultado de aplicar las técnicas* y **OML7**- *Incidencia de los elementos tecnológicos sobre la práctica*, se fortalecen con todos los dispositivos diseñados porque los alumnos deben interpretar las respuestas de las actividades a partir de los elementos tecnológicos y éstos dan origen a nuevas técnicas que permiten ampliar los tipos de tareas.

Todos los dispositivos propuestos buscan fortalecer y potenciar la construcción de un entorno tecnológico-teórico que les permite a los estudiantes ser capaces de cuestionar técnicas, discernir cuál es más conveniente usar y generar nuevas técnicas que pueden ser más económicas o más eficientes.

A partir de las incorporaciones fundamentadas desde los momentos didácticos y los indicadores de completitud que se ponen en juego en cada dispositivo, es posible considerar que la organización matemática, OM $(v)_B$, resulta "más completa".

§4. Reflexiones Finales

La propuesta didáctica descripta en el presente trabajo, asociada a la organización matemática coordenadas de un vector respecto de una base dada, busca aumentar el grado de completitud de la misma a partir de la introducción de nuevos dispositivos didácticos. Dichos dispositivos contienen tareas que dan origen a nuevas técnicas que se utilizan de manera flexible y relacionadas entre sí, permitiendo la producción de otras técnicas y reforzando discursos tecnológicos. Tal como describe la autora Bosch (2000) y se presentó en los apartados anteriores, esto conduce a la mejora en la comprensión de la organización matemática local en cuestión.

Los dispositivos elaborados fueron diseñados para ser implementados tanto en la modalidad presencial como en la virtual, favoreciendo de este modo la disponibilidad de los recursos para todos los estudiantes en los diferentes contextos que atraviese la Educación Superior. Así mismo, en el caso del dispositivo Nº1, seleccionamos el software GeoGebra, que es un software libre de matemática dinámica de fácil acceso. Puede manipularse desde diferentes dispositivos, tales como computadoras, tablets y celulares, siendo estos últimos dispositivos los más frecuentes en el aula y en la vida de los estudiantes.

Si bien los dispositivos didácticos descriptos en este artículo aplican para el espacio vectorial R^2, también se han diseñado otros que transfieren los aprendizajes asociados a la OM $(v)_B$ al espacio tridimensional (*Geometría Analítica para ciencias e ingeniería. Actividades para el Aprendizaje*. Raichman y col. (2023)).

Al ser la evaluación un momento significativo dentro del proceso de estudio también se han elaborado, en coherencia con el contrato didáctico y los dispositivos aquí presentados, dispositivos específicos para las instancias de evaluación parcial y final de la asignatura en donde se presentan tareas del tipo "abiertas", diseñadas para que el estudiante pueda integrar el eje temático junto con los restantes del programa de la asignatura, fortaleciendo el indicador de completitud **OML6** - *Existencia de tareas matemáticas "abiertas"*.

Bibliografía

Bosch, M. (2000). Un punto de vista antropológico: la evolución de los "elementos de representación" en la actividad matemática. En N. C. Rodríguez, L. C. C. González, J. C. Yañez & M. S. Vázquez (Eds.), *Cuarto Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 15-28). Huelva, España: Collectanea, Universidad de Huelva.

Bosch, M., Fonseca, B. C., & Gascón, J. (2004). Incompletitud de las organizaciones matemáticas locales en las instituciones escolares. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *24*, 205-250. https://www.researchgate.net/publication/285438796_Incompletitud_de_las_organizaciones_matematicas_locales_en_las_instituciones_escolares

Chevallard, Y. (1999). El análisis de las prácticas educativas en la teoría antropológica de la didáctica. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *19*(2), 221-266. https://inscastelli-cha.infd.edu.ar/sitio/upload/Chevallard_Teoria_Antropologica_-_TAD.pdf

Chevallard, Y., Bosch, M., & Gascón, J. (1997). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. ICE-Horsori. http://hdl.handle.net/2445/174473

Fonseca, C., Bosch, M., & Gascón, J. (2010). El momento del trabajo de la técnica en la completación de Organizaciones Matemáticas: el caso de la división sintética y la factorización de polinomios. *Educación matemática*, *22*(2), 5-34. https://www.researchgate.net/publication/262703523_El_momento_del_trabajo_de_la_tecnica_en_la_completacion_de_Organizaciones_Matematicas_el_caso_de_la_division_sintetica_y_la_factorizacion_de_polinomios

Raichman, S., & Mirasso, A. (2018). Modelos pedagógicos para el aprendizaje complejo y la formación en competencias en carreras de ingeniería. *Revista Académica de la Facultad de Ingeniería, Universidad Autónoma de Yucatán*, *22*(3), 15-25. http://www.revista.ingenieria.uady.mx/ojs/index.php/ingenieria/article/view/127

Raichman, S., Totter, E., Videla, D., Collado, L., Codina, F., Molina, G., Cascone, A., Fitt, G., & Cuervo, F. (2023). *Geometría analítica para ciencias e ingenierías: Actividades para el aprendizaje*. Quellqasqa. https://bdigital.uncu.edu.ar/fichas.php?idobjeto=18378

Gisela P. Fitt
Facultad de Ingeniería, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad Nacional de Cuyo.
(✉) *gisela.fitt@ingenieria.uncuyo.edu.ar*

Silvia R. Raichman
Facultad de Ingeniería, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad Nacional de Cuyo.
(✉) *silvia.raichman@ingenieria.uncuyo.edu.ar*

Recibido: *6 de julio de 2022.*
Aceptado: *6 de noviembre de 2023.*
Publicado en línea: *27 de diciembre de 2023.*

se pueden cribar los números primos con una parábola?

Todos sabemos desde chicos que los números primos, es decir, aquellos que sólo son divisibles por 1 y por sí mismos, son infinitos. En efecto, ya lo sabían los antiguos griegos, pues en los *Elementos* de Euclides ya aparece una demostración de este hecho. Pero también sabemos que no hay una fórmula para hallar el n-ésimo número primo. De esta manera, se vuelve un problema básico dado un entero positivo N saber cuántos primos menores a N hay y cuáles son.

Para resolver ambos problemas tenemos el método de la criba (cribar quiere decir zarandear). La primer criba conocida es la del polímata griego Eratóstenes (276 a.C.–194 a.C.) quien fue matemático, astrónomo y geógrafo. De hecho, le debemos a Eratóstenes la ¡primer medición del radio de la tierra!

Seguramente casi todos conocen la mencionada criba de la escuela primaria o secundaria. Funciona así: se elije un número natural N, digamos el 100 y se hace una lista de todos los números del 1 al N. El 1 no es primo (podemos tacharlo) y el primer número primo es el 2. Marcamos el 2 con un círculo y tachamos todos los números pares mayores que 2 (múltiplos de 2), ya que no serán primos. Luego miramos el primer número no tachado, que es el 3. Como 3 es primo, lo circulamos y tachamos todos los múltiplos de 3, ya que no serán primos. Por una cuestión de eficiencia, si queremos no volvemos a tachar un número ya tachado (por ejemplo el 6 o cualquier múltiplo de 6 se tacha por ser par y por ser múltiplo de 3). Siguiendo este procedimiento, los números menores que 100 que no se encuentren tachados serán primos, como puede verse en la siguiente figura:

	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~60~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

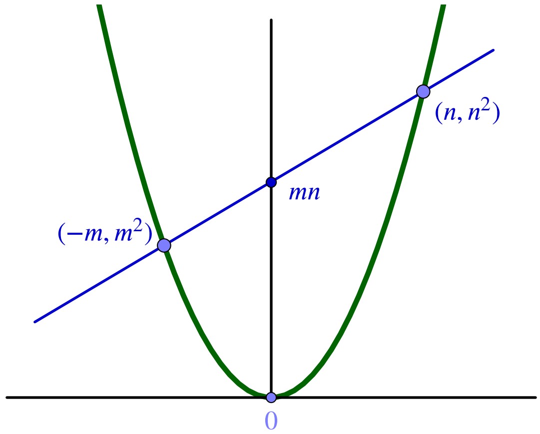
Por supuesto, existen otras cribas más modernas (de las cuales quizás nos ocupemos en otra ocasión), como la de Sundoran (1934), la de Atkin (2003) y las llamadas cribas de rueda. Sin embargo, hay una de ellas que lleva adelante la

Criba de Eratóstenes de una manera geométrica. Se trata de la criba parabólica que explicamos a continuación.

Consideremos la parábola de la forma

$$y = x^2.$$

Ya August Möbius observó en 1841 (*Geometrische Eigenschaften einer Factorentafel*, Journal für die reine und angewandte Mathematik, Vol. 22, pp. 276–284) que la recta que une dos puntos cualquiera de la parábola, uno en cada rama de ella, digamos $P = (-m, m^2)$ y $Q = (n, n^2)$, corta al eje y en el punto $R = (0, mn)$.



En efecto, la recta

$$y = (n - m)x + mn.$$

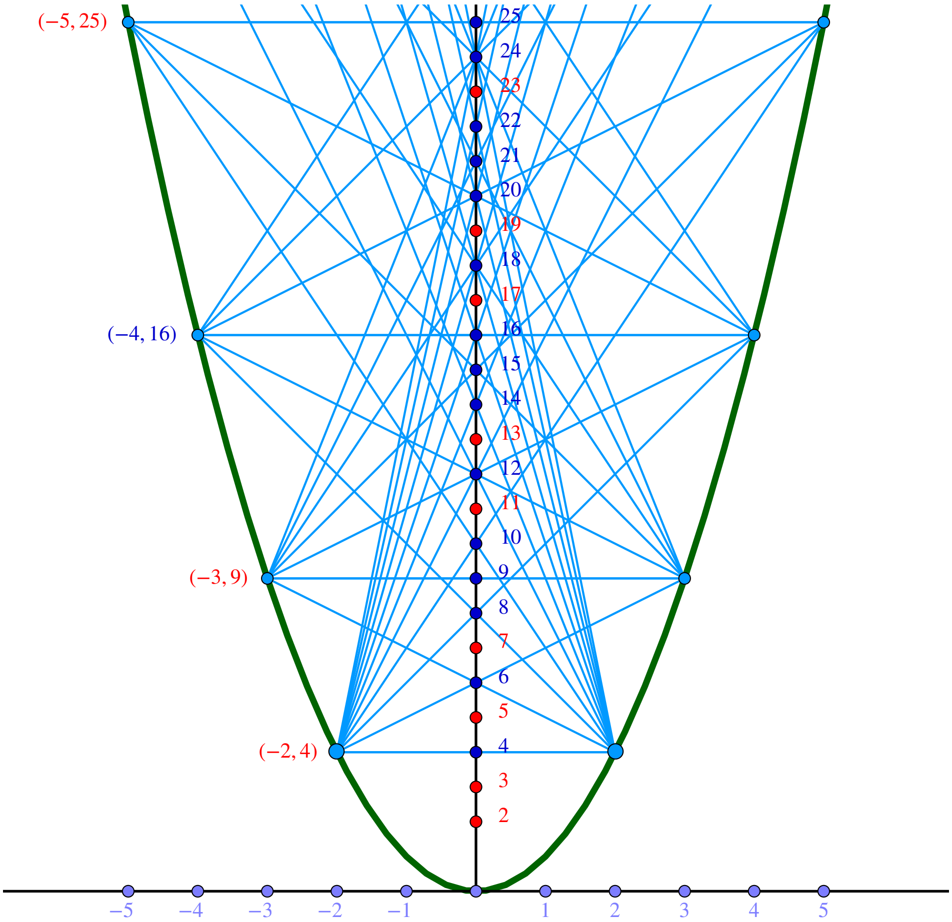
pasa por los puntos $P = (-m, m^2)$ y $Q = (n, n^2)$ y tiene ordenada al origen mn.

En 1999, los matemáticos rusos Yuri Matiyasévich y Boris Stechkin publicaron en la página personal de Yuri la mencionada criba parabólica (ver la página logic.pdmi.ras.ru/ yumat/personaljournal/sieve/sieve.html), que te contamos a continuación. Utilizando la observación de Möbius hecha más arriba (aunque no sabemos si Yuri la conocía o no), consideramos todos los puntos enteros de la parábola $y = x^2$, es decir todos los puntos de la forma

$$P = (-m, m^2) \qquad \text{y} \qquad Q = (n, n^2)$$

con $m, n \in \mathbb{N}$. Si unimos todos los puntos enteros P de una rama con todos los puntos enteros Q de la otra rama con rectas (digamos que para $n, m < N$), encontramos que cortan al eje y en los puntos de la forma nm con $n, m \in \mathbb{N}$. Esto quiere decir que estas rectas cruzan al eje y exactamente en los números compuestos nm y no corta a los números primos. Es decir, ¡estamos cribando a los números primos en un eje usando una parábola!

A continuación graficamos la parábola con las primeras rectas y los primeros primos, pues ya se sabe que una imagen vale más que mil palabras.



O sea, los puntos $(\pm 2, 4)$ tachan los múltiplos de 2 mayores que 2, los puntos $(\pm 3, 9)$ tachan todos los múltiplos de 3 mayores que 3, los puntos $(\pm 5, 25)$ tachan los múltiplos de 5 mayores que 5, etc.

Finalmente notamos que, tal como hacemos en la Criba de Eratóstenes, buscando evitar algunas “tachaduras” repetidas, basta trazar los segmentos que unen $(-p, p^2)$ –en rojo en la figura– y (n, n^2) con p recorriendo los primos que nos van apareciendo y $n \geq p$.

August Ferdinand Möbius (Schulpforta, 17/11/1790 – Leipzig, 26/9/1868) fue un matemático y astrónomo alemán. Es mas que nada conocido por su descubrimiento en 1858 de la superficie que hoy lleva su nombre, la cinta de Möbius. Además, fue el primero en introducir las coordenadas homogéneas en geometría proyectiva. Se interesó también por la teoría de números donde la función aritmética de Möbius $\mu(n)$ y la fórmula de inversión de Möbius se nombran así por él.

Yuri Vladímirovich Matiyasévich (Leningrado, 2/3/1947) es un matemático ruso. En 1964 obtuvo el primer premio de la 6º Olimpiada Internacional de Matemática que tuvo lugar en Moscú. Matiyasévich se graduó en el Departamento de Matemáticas y Mecánica de la Universidad Estatal de Leningrado en 1969. Es muy conocido por su solución negativa al décimo problema de Hilbert sobre soluciones a ecuaciones Diofánticas, presentada en su tesis doctoral en 1972 con 25 años, en el Departamento de Leningrado del Instituto de Matemáticas Steklov.

Revista de Educación Matemática
Volumen 38, N° 3 (2023), páginas 28 – 58 ✽
Unión Matemática Argentina - Famaf (UNC)

Investigación en educación matemática

DIFICULTADES CON LOS MODOS INFERENCIALES FALACES EN ESTUDIANTES DE MATEMÁTICA Y FÍSICA

Samuel Ivan Noya y Agustín Adúriz-Bravo

Resumen. El presente trabajo tiene por objetivo general aportar datos de análisis en torno a la creencia de que la matemática desarrolla habilidades de razonamiento condicional con mejores resultados que otras disciplinas. A estos fines, se propone evidenciar la habilidad lógica alcanzada por estudiantes universitarios avanzados de carreras (Licenciaturas y Profesorados) de matemática y física para resolver y justificar actividades donde aparecen modos inferenciales condicionales válidos y falaces. La aproximación teórica que sustenta la investigación es de naturaleza epistemológica y cognitiva y la metodología es de tipo cualitativo. El análisis de los resultados pone en evidencia una habilidad lógica acotada de los estudiantes en la resolución y justificación de tareas que involucran dos falacias bien conocidas, en contraste con su buen desempeño en dos modos inferenciales válidos.

Abstract. The aim of this paper is to provide data for the analysis of the belief that mathematics develops conditional reasoning skills with better results than other disciplines. To these ends, evidence is provided regarding the logical ability attained by advanced university students of mathematics and physics (Master programmes in pure science and in teaching) to solve and justify activities where valid and fallacious conditional modes of inference appear. The theoretical perspective that supports this piece of research is of epistemological and cognitive nature; the methodological approach is qualitative. Analysis of the results shows students' limited logical ability in the resolution and justification of tasks involving two well-known fallacies, in contrast to their good performance in two valid inferential modes.

§1. Introducción y antecedentes

Muchos pensadores a lo largo de la historia han destacado de la matemática dos grandes aspectos que han considerado complementarios. Por un lado, el de

Palabras clave: habilidades lógicas, razonamiento condicional, falacias, teoría de la disciplina formal, razonamiento abductivo.

Keywords: logical skills, conditional reasoning, fallacies, theory of formal discipline, abductive reasoning.

proveer un lenguaje para modelizar el mundo y hallar soluciones a problemas empíricos de muy variada índole y, por otro, su aparente capacidad de promover el pensamiento lógico o "razonamiento", que resulta indispensable no solo para la vida adulta, sino también para acometer cualquier disciplina (Arsac, 1996). Así, la actividad matemática consistiría en

> la búsqueda de estructuras y pautas que aportan orden y simplicidad a nuestro universo. Se puede incluso llegar a afirmar que ni el punto de partida ni el objeto de un estudio matemático son tan importantes *como las pautas y la coherencia que emergen de él*. Esas pautas y esa coherencia proporcionan a la matemática su potencia, porque, con frecuencia, permiten iluminar con claridad objetos y procesos completamente diferentes y que se hallan presentes en otras ramas de la matemática, en otras ciencias o en la sociedad en general. (Griffiths, 2000, p. 23; el destacado es nuestro)

Esta mirada sobre la naturaleza de la matemática trasciende la frontera de las opiniones o creencias de los matemáticos profesionales y se extiende también a los teóricos del pensamiento formal, manifestándose en sus postulados de partida acerca de cómo aprendemos y cómo se desarrollan nuestras habilidades cognitivas. El didacta de la matemática británico Tall (2008) menciona tres atributos necesarios para el pensar matemático que conforman parte de las herramientas básicas con las que nacemos y que han de ir desarrollándose desde temprana edad. Tales atributos son: el reconocimiento de patrones, similitudes y diferencias; la repetición de secuencias de acciones hasta que se vuelven automáticas; y el lenguaje para describir y refinar la forma en que pensamos sobre las cosas. El desarrollo del pensamiento matemático en el estudiantado a lo largo de la escolaridad dependería profundamente del fomento armónico de estos tres conjuntos de competencias anteriores. Adicionalmente, en un artículo con Gray (Gray y Tall, 1994), este mismo autor señala que existe un nivel aún más elevado que el de esos tres atributos, que involucra no solo la capacidad de realizar un procedimiento matemático, sino también la de pensar sobre él "metateóricamente", considerándolo como una *entidad sofisticada en sí misma*, susceptible de análisis.

Podemos hallar ideas similares en los escritos de Inhelder y Piaget (1972) acerca del pensamiento formal. Como es bien sabido, estos investigadores proponen utilizar el lenguaje lógico-matemático para dar cuenta ("referir") de las estructuras que subyacen al comportamiento cognitivo de los sujetos, modelizándolo, por tanto, desde un punto de vista *formalista* o *logicista*. La huella del enfoque piagetiano fundacional en una parte sustantiva de la didáctica de la matemática se reconoce en

> la tesis según la cual la lógica de referencia pertinente para analizar el razonamiento matemático es el cálculo de predicados. [Una clarificación epistemológica de las ideas fundamentales de la lógica] permite poner en evidencia las dificultades de la emergencia del complejo de la implicación y la polisemia del propio término, así como afirmar que la lógica es, en principio, una teoría de la inferencia válida y luego, gracias a la cuantificación objetual, *una teoría de la referencia*. (Durand Guerrier, 1996, resumen; la traducción y el destacado son nuestros)

Para Jean Piaget, el pensamiento hipotético-deductivo es necesario para formular y poner a prueba hipótesis sobre la realidad. Si bien este postulado sobre el pensamiento formal tuvo sus detractores inmediatos y críticas subsiguientes, estando hoy en día fuertemente cuestionado, no es menos cierto que el núcleo duro de ideas piagetianas trazó un fuerte camino a seguir en relación con las siguientes preguntas atinentes al campo de lo educativo: ¿qué podemos pretender de un sujeto adulto en relación a sus habilidades cognitivas?, ¿a partir de cuándo debería pretenderse tal tipo de desempeños?, ¿cómo ir en pos de habilidades de esa robustez? Estas y otras observaciones ya fueron puestas en escena por Lawson (1985) y son mencionadas más adelante en este artículo.

El desarrollo de las habilidades cognitivas pretendidas para los sujetos que pasan por instrucción matemática se encuentra, para muchos autores, en vínculo estrecho con una actividad inseparable de esta disciplina, la *demostración* (ver, por ejemplo, Arsac (1990); Legrand (1990); Hanna (1995)). Si existen contextos óptimos para el desarrollo de las habilidades lógicas, estos son, más que el del aprendizaje de cálculos automatizados carentes de encuadre, los de las demostraciones y la resolución de problemas. En particular, en el contexto de las demostraciones hay amplio espacio para argumentar, debatir y conjeturar. Esta afirmación reposa en el juicio de un sinnúmero de especialistas que sostienen que este sería el principal aporte de la matemática a la formación de las personas; no tanto por tratarse de una metodología estandarizada ni de un saber erudito digno de ser comunicado, sino porque, como mencionan Crespo Crespo y Farfán (2005), "la problemática de la demostración en el aula de matemática debe enmarcarse dentro de otra problemática más amplia: el desarrollo y evaluación de las distintas *prácticas argumentativas* que se realizan en este ámbito" (p. 292; el destacado es nuestro).

Avanzando un poco más en esta dirección, Crespo Crespo y Farfán (2005) destacan que el quehacer matemático se muestra "indispensable" para lograr la capacidad de razonar, y en este sentido la relación de la educación matemática con la lógica formal es fundamental, dado que esta brinda herramientas para detectar inconsistencias en los razonamientos propios y ajenos. La hipótesis fuerte de muchos autores es que tener una mirada crítica sobre el discurso inferencial les permitirá a las y los estudiantes poder avanzar hacia distintos niveles de pensamiento que son necesarios en la vida ciudadana.

En términos de Schoenfeld (1994) y Knuth (2002), las demostraciones tienen una función pedagógica importante, *relacionada con su naturaleza explicativa*. Sin embargo, en las últimas décadas las pruebas matemáticas de carácter formal están siendo dejadas de lado en favor de una mirada más instrumental que tiene muy poco de reflexiva, en tanto que muchas veces apunta a la enseñanza de cálculos harto superados por los ordenadores. Todo esto se suma al hecho bien señalado por Schoenfeld (1994) de que los procedimientos demostrativos son un componente que no puede ser separado de la clase de matemática, dado que apuntan a habilidades esenciales para producir, comunicar, registrar y evaluar el conocimiento matemático.

Esta concepción de demostración, que para muchos resulta inseparable del quehacer matemático, deja su huella en muchas prácticas de aula donde se destaca la fuerte impronta de la modalidad triádica "definición-teorema-prueba". En un estudio de Weber (2004) aparecen no solo una revisión de las publicaciones sobre aprendizaje y comprensión de conceptos matemáticos avanzados en una asignatura de una carrera universitaria, sino también una descripción de la enseñanza utilizada en esa asignatura. Weber menciona la fuerte impronta de la modalidad antes citada y señala cómo la misma encuentra apoyo en las creencias del docente y cómo las formas de enseñanza centradas en esa tríada influyen en el abordaje que el estudiantado hace de los contenidos.

Esta modalidad "definición-teorema-prueba" tiene su raíz en el esquema hipotético-deductivo, que es la pieza clave de la reconstrucción formalista del raciocinio humano, y nos muestra una vez más que científicos y docentes no escapamos a las concepciones que tenemos de nuestras disciplinas de base, a las nociones o creencias sobre cómo aprendemos y a lo que consideramos como herramientas válidas para desarrollar una disciplina o impartir una clase.

Lo citado hasta aquí ha sido a menudo usado para responder a un objetivo educativo amplio, como es el de alcanzar la abstracción "reflexiva", es decir, el tipo de abstracción que parte de las acciones u operaciones y no meramente de los objetos (Beth y Piaget, 1980). Esta noción, en palabras de Dubinsky (1991), constituye una poderosa herramienta para caracterizar el pensamiento matemático avanzado, que es lo que nos interesa estudiar en este trabajo en relación con el razonamiento. El desarrollo de estas ideas piagetianas dio pie a la bien conocida teoría APOS (Acción-Proceso-Objeto-Esquema) en el campo de la didáctica de la matemática, aunque nosotros no la hemos usado en la investigación empírica que estamos reportando aquí.

Retomando lo expresado al comienzo de esta introducción, la inclusión de la matemática en el currículo de educación tanto obligatoria como posobligatoria suele basarse explícitamente en las dos razones que expusimos: su capacidad de modelización de la realidad y, más ampliamente, su rol como herramienta para promover con más eficacia el desarrollo del pensamiento lógico, en particular, del razonamiento condicional. La primera de estas ideas goza de buena salud en la comunidad matemática y es, en gran medida, la que rige las corrientes didácticas actuales que se inclinan por una matemática *basada en la modelización y en la resolución de problemas* (Biembengut y Hein, 2004). En relación con la segunda razón, es pretensión de este trabajo poner de manifiesto que la caracterización de la matemática como una herramienta que facilita el desarrollo del razonamiento lógico en estudiantes de nivel superior se encuentra, al menos por el momento, poco sustentada en datos empíricos y, sin embargo, suele esgrimirse como piedra fundamental de justificación de la enseñanza de la matemática en tal nivel (Attridge y Inglis, 2013). Esta idea, o más bien creencia, acerca de los alcances *formativos* de la lógica y la matemática suele ser mencionada como "teoría de la disciplina formal" (López-Astorga, 2015).

Cabe aclarar que la teoría de la disciplina formal no es, estructuralmente hablando, una teoría, sino un conjunto articulado de postulados que podría ser descrito como la explicitación sistematizada de la creencia instaurada de que las personas que pasan por una instrucción formal en matemática desarrollan mejores herramientas en el campo del razonamiento condicional del tipo "si P, entonces Q", permitiéndoles esto entender la *lógica interna de los discursos argumentativos* que pudieran encontrar en diversos contextos. En otras palabras, esta "teoría" propugna la tesis de que es la matemática, por sobre otras actividades intelectuales, la que mejor promueve el pensamiento lógico necesario para la comprensión *de cualquier campo disciplinar*. En este trabajo nos proponemos no solo aportar datos que una vez más pongan de manifiesto que la teoría de la disciplina formal no cuenta con sustento empírico suficiente que justifique lo influyente que es, sino también reconocer que sigue existiendo un vacío en nuestro conocimiento sobre cómo generar los desempeños pretendidos por las disciplinas formales. En este sentido, reconocemos lo reportado por Attridge y Inglis (2013) en relación con resultados empíricos concretos en favor de la "teoría", pero creemos que tales resultados son insuficientes, sobre todo en razón de las elecciones teóricas y metodológicas de los autores, que son diferentes a las nuestras. Por otra parte, también reconocemos que la única línea de enseñanza de la matemática que continúa avanzando consistentemente en la misma dirección de estas ideas y resultados es la corriente que pone en valor la necesidad de la demostración en las aulas escolares. Sin embargo, y tal como puede verse en los trabajos que hemos citado al respecto, al menos de momento falta mucho por hacer (ver Clarke y cols. (2013)).

Por último, destacamos aquí que no es nuestra intención incorporar nuevos elementos teóricos a las discusiones ya instauradas, sino más bien retomar y reorganizar lo planteado hasta el momento, por considerar que aún no se ha cerrado el debate y el mismo continúa siendo necesario en el contexto de la formación de matemáticos y profesores de matemática. Es en este contexto que entendemos la pertinencia de nuestra investigación y nuestras reflexiones.

§2. Marco teórico y objetivos

De manera general, entenderemos por "habilidad de razonamiento" (o, más restrictivamente, "habilidad lógica") la facultad mental que tiene un individuo para utilizar modos de *inferencia* que le permitan obtener nueva información a partir de la que ya posee, o bien dar evidencia de la verdad o falsedad de tal información.

Actualmente, las didácticas de las ciencias naturales y la matemática sostienen que las habilidades de razonamiento deben estar al servicio de la formación de ciudadanos críticos, y de ahí el interés que tienen por su desarrollo sistemático (Bronkhorst y cols., 2020). Las habilidades de razonamiento encuentran en la matemática un escenario potente en el cual desplegarse, aunque por supuesto no el único posible. Ahora bien, como se verá, no existe total consenso en que el estudio de la matemática escolar, al menos tal cual ella es llevada adelante hoy en día, proporcione condiciones suficientes para asegurar el pleno desenvolvimiento de tales habilidades (Henao y Moreno, 2016).

Si bien los orígenes del análisis del razonamiento en general se remontan a la filosofía, y en concreto a la lógica aristotélica, es la psicología cognitiva, a partir de los trabajos pioneros de Jerome Bruner (Bruner y cols., 1956) y, algunos años más tarde, de Wason (1966), la disciplina que asume actualmente buena parte de los estudios sobre raciocinio e inferencia. A su vez, dentro del campo del razonamiento condicional pueden diferenciarse al menos dos líneas de investigación: una de ellas con mayor énfasis puesto en la lógica y la otra, en las capacidades de raciocinio con proposiciones de uso cotidiano (Quelhas y Juhos, 2013). Esta segunda línea se vincula más estrechamente con la psicología; la primera está más ligada a estudios de carácter lógico-matemático. La aproximación *logicista* en las investigaciones se ha centrado en la justificación "arquitectural" de la validez de los razonamientos, mientras que la *psicologista* se interesa por la forma en que la razón de hecho opera "en la acción". Estudios posteriores a los inaugurados por los autores fundacionales más arriba citados han diferido tanto en sus abordajes metodológicos como en sus propuestas teóricas (ver, por ejemplo, Elleman (2017)).

El enfoque actualmente vigente que nos interesa rescatar para este artículo se centra en un estudio que podemos considerar hasta cierto punto "naturalista" de los razonamientos válidos e inválidos (falaces) tal cual ellos se despliegan en contextos reales. Este enfoque sería naturalista en el sentido de que trata de investigar cómo se desarrollan los procesos mentales del estudiantado *en situaciones reales de aula*, lo más cercanas a las clases tradicionales, no intervenidas, que ellos venían recibiendo. Asumir tal enfoque tiene por objetivo comprender cómo las personas razonan y hacen inferencias en diversos contextos utilizando proposiciones y escenarios que los reflejan.

Es también en algún sentido naturalista nuestra elección de los contextos en los cuales requeriremos que los participantes de nuestra investigación pongan en marcha las habilidades lógicas, en contraste con una aproximación cerradamente logicista que busca centrarse en la justificación formal de la validez de razonamientos y argumentos con gran independencia del contenido. *En este artículo nos enfocamos en comprender cómo el estudiantado participante enfrenta problemas y toma decisiones basadas en sus capacidades de razonamiento*.

La aproximación naturalista así entendida tiene varias ventajas, ya que permite analizar la naturaleza del razonamiento humano en contextos más auténticos y relevantes para la vida diaria y facilita la identificación y comprensión de los errores y falacias más comunes que las personas pueden cometer al razonar en situaciones prácticas. Estudiar el razonamiento de manera naturalista es esencial para mejorar la enseñanza y el aprendizaje, especialmente en campos como la educación en ciencias naturales y matemáticas, pues proporciona a docentes y especialistas una visión más afinada de cómo los estudiantes abordan y resuelven "problemas matemáticos" en el mundo real.

De todos modos, nos es necesario señalar aquí que, al tratarse la nuestra de una investigación que utiliza un instrumento estructurado de cariz evaluativo diseñado *ad hoc* para mediar con el contenido y recoger datos, resulta en una indudable "intervención" en el contexto educativo al que nos acercamos. Llamar al enfoque naturalista en este sentido amplio arriba definido no supone caer en la ingenuidad de considerar la posibilidad de un acceso directo y "prístino" al contexto real como si se lo pudiera captar sin intervenirlo, perturbarlo o modificarlo. Todo nuestro acercamiento a las aulas universitarias, y en particular la fase de aplicación del instrumento evaluativo, está constituido por un conjunto articulado acciones concebidas específicamente *para construir pruebas o evidencias* (en una secuencia argumentativa) (Adúriz-Bravo y Sans Pinillos, 2023) en torno a la teoría de la disciplina formal.

Entre los modos de razonamiento silogístico, las falacias lógicas "formales" que quisimos examinar en nuestra investigación son dos: la *falacia de afirmación del consecuente* (AC), también denominada "falacia abductiva", y la *falacia de negación del antecedente* (NA). Recuperamos aquí brevemente la formalización condicional de estas dos falacias. Dada una proposición de la forma $P \Rightarrow Q$, su *proposición recíproca* es $Q \Rightarrow P$, la cual, como es bien sabido, se lee "Si Q, entonces P". Esta afirmación no es lógicamente equivalente a la proposición directa de la que partimos. La falacia de afirmación del consecuente, que consiste en la inferencia incorrecta de la proposición recíproca a partir de la directa, puede ser descrita como la creencia de que, ante la ocurrencia del consecuente Q, el individuo interpreta que estuvo presente previamente el antecedente P. Ello por supuesto pudo haber sido cierto, pero solo en términos *posibles* y no con necesidad lógica.

En el ámbito de la educación en ciencias y matemática, puede ser útil aquí interpretar esta falacia en términos de relaciones causa-efecto. En ese contexto, tal falacia se presenta cuando, ante un determinado efecto (por ejemplo, la calle mojada), el intérprete entiende que se debe a una causa en particular (usualmente, que ha llovido). Si bien es cierto que *si llueve, la calle se moja*, el hecho de que haya llovido no es la única causa para que la calle esté mojada (Panizza, 2005). La falacia por tanto se mapea, entre otras cosas, a la sobreinterpretación monocausal de fenómenos que pueden ser multicausados.

Haciendo uso de este ejemplo canónico de la lluvia y la calle mojada podemos identificar la AC con una forma de inferencia *abductiva* (Adúriz-Bravo y Sans Pinillos, 2023) y contrastar este modo de razonamiento con los más clásicos deductivo e inductivo. Para ello usaremos el mecanismo "rotativo" de premisas y conclusiones propuesto por el célebre filósofo estadounidense Charles Sanders Peirce (Samaja, 2005). Llamemos entonces Regla (R) a "Siempre que llueve, la calle se moja", Caso (C) a "Estuvo lloviendo" y Resultado (r) a "La calle está mojada". Tenemos entonces tres posibles esquemas inferenciales usando esas proposiciones. En la deducción, R + C implican r con *necesidad*. En la inducción, C + r implican R con *probabilidad*. En la abducción, entendida como "tercera vía", r + R implican C con *plausibilidad* (Adúriz-Bravo y Sans Pinillos, 2023). *Del hecho de que la calle esté mojada se infiere entonces abductivamente que ha llovido*.

En la reconstrucción a la que adherimos aquí, la inferencia abductiva, formalmente inválida, va de "casos" a "reglas", y es por ello la que muestra mayor capacidad para generar nuevo conocimiento operativo. Se tiene que distinguir entonces la abducción de un uso superficial, "mal computado", de la falacia AC, *recurriendo para ello elementos pragmáticos fuertes*. Por ejemplo, supongamos que vemos la calle mojada, pero al mismo tiempo tenemos razones para creer que no llovió. Ponemos ahora bajo consideración una nueva regla R′ que dice "Si pasa el camión de limpieza, la calle se moja". El resultado r que podemos observar es que la calle está mojada, y tal resultado puede subsumirse bajo dos reglas en conflicto, relacionadas con dos casos bien distintos: o "Estuvo lloviendo" (C) o "Pasó el camión de limpieza" (C′). Es el "resolutor del enigma" quien reúne, selecciona y utiliza más información del contexto para *decidir* cuál de los casos es el más verosímil. Puede tal vez tocar las paredes o las hojas de los árboles para ver si están húmedas o estudiar el esquema de tareas de la empresa de limpieza urbana para desestimar uno u otro caso.

La abducción juega un papel fundamental para encontrar nuevas reglas, que no son sino *hipótesis* para dar sentido a los fenómenos con los que nos encontramos. Pero, al ser una inferencia no demostrativa, lo que se predica como efecto puede ser producto de causas distintas a la abducida, como hemos visto en el ejemplo anterior. La abducción ya había sido estudiada bajo el nombre de *apagogé* por Aristóteles, pero solo fue puesta en valor por los estudios del mencionado Peirce a caballo entre los siglos XIX y XX (Adúriz-Bravo y Sans Pinillos, 2023).

La inferencia abductiva ha tenido poco lugar en la reconstrucción epistemológica tradicional, fuertemente formalista, de la matemática en tanto que disciplina. En efecto, muy a menudo se ha considerado la matemática como ciencia *únicamente deductiva*, en la que se afirman ciertas proposiciones (cuyo origen queda velado) y, tomadas estas como antecedentes, se procede a deducir otras. Debemos señalar aquí, sin embargo, que los procesos de construcción y puesta a prueba preliminar de las ideas matemáticas, en el clásicamente llamado "contexto de descubrimiento", no escapan a lo que sucede en las otras disciplinas científicas de carácter más empírico (nuestra tesis cae entonces muy cerca de las ideas desarrolladas por Panizza (2005)). Entonces, es muy probable que la abducción se encuentre fuertemente presente *en la generación del conocimiento matemático*, y de allí la pertinencia de estudiar un estilo de pensamiento *aparentemente* apoyado en falacias de afirmación del consecuente.

Adherimos aquí a la idea de que la generación de una explicación de la forma $P \Rightarrow Q$ que contiene contenido nuevo para la comunidad matemática tuvo que darse necesariamente desde un razonamiento ampliativo –abductivo, analógico o relacional, principalmente (Adúriz-Bravo, 2014). Sin embargo, esas fases de la laboriosa construcción del conocimiento les son vedadas a los estudiantes, y se cae en una replicación de conocimientos ya instaurados mediante la validación deductiva, con muy poco hincapié en los contextos que han generado su emergencia. Así, los razonamientos abductivos deberían ser abordados en clase dado que "son válidos, pero no en el sentido de la lógica formal", sino "porque ellos [. . .] permiten conocer, operar, calcular, formular hipótesis" (Panizza, 2005, p. 32).

Como se mencionó, la falacia abductiva tiene un carácter constructivo que le confiere fuerza, no siendo este el caso de la falacia de negación del antecedente, y de allí tal vez proviene el escaso tratamiento de esta última en la educación matemática. Podemos resumir esta segunda falacia del siguiente modo. Dada la proposición $P \Rightarrow Q$, su *afirmación obversa* es $\neg P \Rightarrow \neg Q$, la cual se lee "Si no P, entonces, no Q". Esta proposición, que tampoco es lógicamente equivalente a la proposición directa de la que partimos, es poco abordada en el proceso de enseñanza tradicional de la lógica. Sin embargo, desde la psicología cognitiva se verifica una fuerte tendencia de los individuos a considerar que la negación del antecedente trae consigo la negación del consecuente. Podemos citar una larga tradición de trabajos desde Henle (1962) hasta la actualidad (Aliseda, 2006).

Destacamos aquí que, ante la negación del antecedente, no puede asegurarse ni la negación ni la afirmación de su consecuente. Esto es, del conocimiento de la regla $P \Rightarrow Q$ no puede concluirse $\neg P \Rightarrow \neg Q$, así como tampoco $\neg P \Rightarrow Q$. Siguiendo a Panizza (2005), se entiende aquí que los estudiantes podrían incurrir en la falacia NA cuando desestiman que el consecuente de una determinada implicación puede darse a partir de varios antecedentes distintos. En la interpretación en términos causales introducida más arriba, el hecho de que no llueva no impide que las calles se mojen por otros mecanismos (como el camión de limpieza).

En el contexto de los estudios naturalistas del razonamiento cotidiano han surgido explicaciones para esta falacia que, en lugar de suponer que los sujetos razonan de modo formalmente incorrecto, consideran que ellos están interpretando de modo distinto el alcance de la premisa mayor $P \Rightarrow Q$ (Wason, 1966). En particular, estas explicaciones psicologistas suponen que los sujetos interpretan tal premisa como $P \Leftrightarrow Q$, es decir, bicondicional. Este fenómeno se denomina "perfección del condicional" (Herburger, 2015). Cuando el sujeto que infiere "perfecciona" (es decir, "completa") el condicional, convierte en válidas las formas $\neg P \Rightarrow \neg Q$ del caso NA y $Q \Rightarrow P$ del caso AC.

Siguiendo con la búsqueda de antecedentes teóricos y empíricos para este artículo, debemos destacar que una breve revisión de los trabajos vinculados con la temática muestra comparaciones entre estudiantes de matemática, ingeniería y otras carreras con fuerte presencia matemática y estudiantes de carreras como psicología, historia, artes u otras similares (ver, por ejemplo, Başaran y cols. (2015); Berndt y cols. (2021)), usualmente bajo el supuesto de que en las primeras se encontrarían mejores habilidades lógicas que en las segundas. A diferencia de estas investigaciones, aquí hacemos hincapié en observar el desempeño en asignaturas de matemática más avanzada y en registrar diferencias y similitudes entre los estudiantes de las cuatro carreras con más formación en matemática de que se dispone en la oferta académica actual en la Universidad Nacional del Nordeste (UNNE, en la ciudad de Corrientes, Argentina): Licenciatura y Profesorado en Matemática y en Física.

En vínculos más estrechos con la didáctica de la matemática y de las ciencias naturales, se rescatan en este trabajo los esfuerzos de algunos grupos de investigación por poner en relieve algunas de las problemáticas asociadas a la enseñanza de la lógica en distintas carreras. Como reseña sobre este particular, puede visitarse el artículo de revisión de Henao y Moreno (2016) en el que se rescatan los trabajos que se llevan adelante actualmente en Cuba, Colombia y México. Estos autores señalan que la discusión actual no pasa solo por qué contenidos de lógica se deben enseñar, sino también *por los vínculos que existen o deberían de existir entre la lógica* *y otros campos del saber*, como la matemática, por ejemplo. Identificar y fortalecer tales vínculos permitiría traspasar las fronteras de la lógica formalista y aportar elementos que puedan extrapolarse a otros ámbitos, con la pretensión de lograr la formación de ciudadanos críticos.

Autores como Lawson (1985) sostienen que la educación debe tener como uno de sus propósitos centrales el mejorar las habilidades de razonamiento de los estudiantes, bajo un mandato general de fomento del pensamiento crítico. Lawson (1985) intenta evaluar la validez de la teoría del pensamiento formal de Piaget en su relación con la práctica educativa contemporánea. Deja entrever que parte de la herencia de los trabajos de Piaget puede observarse en la fuerte apuesta al desarrollo de habilidades de razonamiento y al vínculo entre estas y la maduración biológica. El análisis pormenorizado que realiza en su artículo muestra deficiencias en algunas cuestiones metodológicas de los trabajos tempranos de Piaget, pero valora la psicología del desarrollo por ser capaz de proporcionar información importante sobre cómo la escuela puede ser más eficaz para trabajar en armonía con el desarrollo biológico:

> En resumen, la presente revisión demostrará que, aunque existen problemas teóricos y metodológicos, las investigaciones de Piaget y otras que surgieron a partir de ellas proporcionan un trasfondo importante a partir del cual construir programas de enseñanza que puedan ayudar en el más central de todos los objetivos educativos: ayudar a los estudiantes a pensar bien. (Lawson, 1985, p. 570; la traducción es nuestra)

Con miras a consumar el objetivo mencionado por Lawson de lograr "estudiantes que piensan bien", sale al encuentro otra temática de interés, *la de la argumentación y la demostración en las aulas de matemática*. El connotado didacta de la matemática francés Balacheff (1987) ve la demostración como una *práctica lingüística* extremadamente específica de la matemática y sugiere que su comprensión es clave para la enseñanza y el aprendizaje efectivos de esa disciplina.

Los recursos argumentativos de la matemática (explicaciones y demostraciones) tienen su fundamento en la lógica. Esta vinculación entre matemática y lógica hunde sus raíces en la Grecia clásica, donde se dio el paso de argumentaciones basadas en figuras a aquellas que estaban apoyadas estrictamente en postulados axiomáticos que eran tomados como base para la construcción de otras proposiciones por medio de la deducción (Arsac, 1987).

Una parte sustantiva de la didáctica de la matemática ha concentrado esfuerzos en poner de manifiesto la importancia de la demostración dentro de la argumentación en el aula (Crespo Crespo, 2004), pues ha sido siempre de interés de la disciplina desarrollar estrategias que permitan la incorporación de habilidades de razonamiento matemático. Ahora bien, en términos de Lawson, la argumentación y el descubrimiento constituyen el núcleo del razonamiento científico (Lawson, 2010). Por esta razón,

> ayudar a los estudiantes a comprender mejor cómo los científicos razonan y argumentan para sacar conclusiones científicas se ha considerado durante mucho tiempo como un componente crítico de la alfabetización científica, por lo que sigue siendo un objetivo central de la educación científica. (Lawson, 2010, p. 336; la traducción es nuestra)

Habida cuenta de que, siguiendo a Lawson (1985), "existe evidencia sustancial de que las deficiencias [en el razonamiento] son reales y pueden conducir a un rendimiento pobre no solo en las ciencias naturales y la matemática, sino también en las ciencias sociales y las humanidades" (p. 570; la traducción es nuestra), las investigaciones didácticas se han centrado sobre si tales deficiencias pueden ser o no remediadas. La idea subyacente es que el interés de la enseñanza no debería ser "acelerar" el desarrollo intelectual (entendido como un punto al cual se habría de llegar en términos biológicos), sino descubrir si algún tipo de intervención educativa puede ser valiosa para acompañar y fortalecer dicho desarrollo.

En relación con los resultados negativos reportados en las investigaciones, cabe aclarar que la didáctica de las ciencias naturales ha concentrado esfuerzos en determinar si ellos son indicadores de deficiencias generales en el razonamiento o simplemente emergen de un conjunto de factores tales como falta de conocimiento declarativo específico, dificultades con los modos de representación, carencia de motivación o excesiva ansiedad ante los exámenes (Lawson, 1985). Es decir, a fines de evitar sesgos como los que fueron criticados en Piaget, la pesquisa didáctica actual pone foco en si las tareas mediante las cuales se estudia el razonamiento formal *miden lo que dicen medir*. Hemos intentado tener en cuenta al máximo este recaudo en la construcción de nuestro instrumento de recogida de datos.

En vínculo con la problemática de la enseñanza de recursos argumentales como el de la demostración, aparecen concepciones fuertes de las y los docentes de matemática acerca de esta competencia. Crespo Crespo (2004) entiende que el profesorado de matemática enseñará de acuerdo con las ideas que tenga sobre su disciplina. En particular, hará un abordaje de la demostración en total acuerdo con las concepciones epistemológicas que sostenga. Así, si "la demostración es considerada como una estructura rígida y no modificable que aparece en los libros, la enseñará como algo acabado y que debe ser memorizado por los alumnos". En contraposición con esto, la autora entiende que las demostraciones pueden convertirse en un "elemento dinámico y modificable" que permita un espacio para la argumentación y, en consecuencia, para la formación de estudiantes pensantes que se entrenen en explicar, verificar, comunicar, sistematizar y descubrir.

Por último, cerrando así esta revisión sobre los vínculos entre las habilidades de razonamiento y las didácticas específicas, se menciona, como sostienen Henao y Moreno (2016), que la enseñanza de la lógica debería ganar espacios de debate en los congresos de educación en ciencias y tecnologías. A ello añadimos otro foco de interés (Adúriz-Bravo y Sans Pinillos, 2023): que, entre el profesorado de ciencias y matemáticas, la abducción juegue un papel protagónico en el desarrollo de experiencias educativas que propendan el pensamiento crítico y que conlleven mejores maneras de razonar y de actuar dentro y fuera del aula. Así,

> la abducción se puede convertir en un proceso de formación alternativa para la enseñanza de la lógica y su didáctica [...]. Este proceder abductivo puede tener como mediación didáctica una ecuación, un problema, un texto literario, la lectura de un artículo de investigación. (Henao y Moreno, 2016, p. 95)

Así, sostenemos aquí que la abducción, que es un tipo de razonamiento que despierta un interés significativo en el estudio de los procesos cognitivos y epistemológicos, debe colocarse también en la agenda de los estudios educativos. Entendido como lo definimos aquí, el razonamiento abductivo permite al estudiantado, ante la observación de un fenómeno desconocido o sorprendente, "activar" una hipótesis de trabajo y generar así una explicación tentativa, pero a la vez satisfactoria, que pueda dar cuenta de la situación y permita seguir operando (desde el pensamiento, el discurso y la acción).

Abducimos una hipótesis a partir de la establecer relaciones fuertes entre la información disponible y el "resultado" peirceano que se nos aparece, pero sin que exista una garantía de que la explicación a la que arribamos sea cierta o la única posible. La abducción *entendida como búsqueda de buenas explicaciones* puede por tanto resultar un enfoque relevante para comprender cómo los aprendices de matemáticas y física se enfrentan a problemas desconocidos y desafiantes, similares en su complejidad y en su baja estructuración a los que encontrarán en la vida real. Se está dando así valor educativo al desarrollar habilidades de pensamiento más flexibles y abiertas a la incertidumbre.

Con todo lo antedicho, nos parece indispensable introducir explícitamente en las aulas la perspectiva epistemológica de que la abducción *constituye un recurso central de generación de conocimiento*. En nuestro trabajo, pretendemos que el profesorado de ciencias naturales y matemáticas se haga cargo de la importancia de la lógica abductiva en el proceso de formación del espíritu crítico entre los estudiantes.

Es dentro del contexto teórico hasta aquí presentado que surge nuestro interés por estudiar el *desempeño lógico* de los estudiantes de matemática y física de la Universidad Nacional del Nordeste (UNNE) en relación con los razonamientos condicionales. Las clásicas inferencias *modus ponens* (MP) y *modus tollens* (MT) son trabajadas a lo largo de todo el trayecto de formación universitaria de estos estudiantes, mientras que las falacias de negación del antecedente NA y afirmación del consecuente AC parecerían estar siendo dejadas de lado, al menos de modo explícito. Efectivamente, en una rápida revisión hecha sobre los planes y programas de estudio de las carreras bajo investigación (Profesorados y Licenciaturas en Matemática y en Física), se constata que no se enumeran en ningún momento los modos de razonamiento falaces como contenido a discutir. En el caso de los Profesorados, existen en la malla curricular materias de cariz didáctico en las que quizás se trabaje la temática, aunque ella no es enunciada en ningún programa.

En vista de que los estudiantes de estas carreras llegarán eventualmente a ser docentes e investigadores, y habida cuenta de que se ha encontrado abundante evidencia de desempeños deficientes en tareas lógicas condicionales (con las muy distintas consecuencias que ello supone en el ejercicio de la profesión de investigador y la de docente), nos planteamos los siguientes interrogantes:

1. Siendo que las cuatro inferencias arriba mencionadas se presentan en el quehacer matemático de quienes investigan y en las tareas de aula de quienes ejercen la docencia, ¿no sería la asimetría en su tratamiento un problema de formación a subsanar?
2. Siendo la enseñanza de las demostraciones (en la forma directa MP, en su *contrarrecíproca* MT o inclusive en la vía de razonamiento por el absurdo) un contexto preferencial para la apropiación y uso del razonamiento condicional, y teniendo en cuenta que tal contexto se está dejando de lado en la enseñanza, ¿cuál es el impacto del tratamiento específico de las inferencias válidas y falaces arriba mencionadas en el pensamiento formal?
3. En este mismo sentido, ¿qué elementos apoyan la plausibilidad de la teoría de la disciplina formal, tan extendida como justificación del modo de enseñar matemática en la UNNE?

En función de lo reseñado, y a la luz de las tres preguntas de investigación amplias que anteceden, esta investigación se dirigió a *evaluar la habilidad lógica alcanzada por estudiantes universitarios* avanzados de los Profesorados y Licenciaturas en Matemática y Física de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales y Agrimensura de la UNNE para resolver y justificar actividades donde aparecen modos inferenciales condicionales válidos y falaces.

En términos más específicos, nos propusimos: 1. advertir posibles problemas en la resolución de unas actividades que involucran tanto los razonamientos válidos MP y MT como las falacias NA y AC; 2. identificar los modos inferenciales que aparecen en las justificaciones dadas a esas actividades propuestas; 3. categorizar las respuestas dadas a las actividades a fin de establecer comparaciones entre las habilidades lógicas disponibles (y, suponemos, adquiridas o fortalecidas durante la carrera) en la resolución de modos inferenciales, tanto falaces como válidos;

y 4. establecer similitudes y diferencias entre las respuestas dadas por las y los estudiantes de las diferentes carreras.

§3. Metodología

Participaron de esta investigación 20 estudiantes avanzados de las carreras de Licenciatura y Profesorado en Matemática (6 mujeres y 4 varones) y Licenciatura y Profesorado en Física (4 mujeres y 6 varones) de la Universidad Nacional del Nordeste, universidad pública de alrededor de 67.000 estudiantes. La muestra que tomamos, *en función de su disposición para participar*, constituye la casi totalidad de la matrícula de los dos últimos años de esas carreras. Se debe aclarar, además, que todas/os los participantes, tanto de matemática como de física, son estudiantes simultáneamente del Profesorado y de la Licenciatura, con lo cual no podemos construir evidencia en torno a la influencia que puede tener una u otra formación en el desempeño lógico.

El instrumento que se utilizó (ver Anexo) es un cuestionario con el formato de "examen" que contiene 8 problemas lógico-matemáticos, con diverso grado de balance entre las habilidades demandadas de una y otra disciplina. Surge como resultado de la revisión, validada por pares, de versiones previas de ítems ya utilizados en investigaciones similares del primer autor (Noya, 2019). El instrumento contiene dos problemas para cada uno de los modos inferenciales condicionales a estudiar, a saber: modus ponens (Actividades 1 y 2), modus tollens (Actividades 3 y 4), negación del antecedente (Actividades 5 y 6) y afirmación del consecuente (Actividades 7 y 8). Las actividades impares tienen la finalidad de introducir y facilitar lo que ha de trabajarse en las actividades pares, que son de un mayor nivel de dificultad.

La implementación se realizó en una única jornada, sin tiempo límite para la resolución (que insumió, en todos los casos, menos de 2 horas). Cada estudiante recibió, en una única entrega, 4 hojas impresas de ambos lados, destinándose una carilla a cada actividad. Así, cada página contenía el enunciado de la actividad impreso y abundante espacio debajo para desarrollar las respuestas que así lo requirieran.

Los 20 cuestionarios recogidos se inspeccionaron con técnicas clásicas de análisis de contenido, que solo nos sirven para "ordenar" la situación más realista de corrección colaborativa de un examen en equipo docente.

§4. Resultados y discusión

4.1. Resultados de la Actividad 1 (MP). La Actividad 1 presenta 5 proposiciones bajo la carátula de "premisas". Esas 5 premisas están construidas con información referente a contenidos de álgebra moderna avanzada, pero con los nombres de los objetos y propiedades cambiados a fin de hacerlos irreconocibles. Tal cambio pretende forzar en los estudiantes la manipulación únicamente formal de los enunciados, sin apoyo en posibles conocimientos matemáticos previos.

En el ítem (a) deben ser seleccionadas de entre esas premisas una cantidad mínima indispensable tal que sea posible arribar a otra proposición caratulada como "tesis". Es de notar que, a posteriori de su aplicación, fue observado que el enunciado de este ítem es problemático. En efecto, en él se usa el término "necesarias", lo que puede prestarse a confusión debido al conflicto entre el significado lógico estricto de este término y el propósito inferencial deseado de identificación de premisas lógicamente *suficientes*. Al comienzo del desarrollo de esta primera actividad, el administrador del cuestionario (primer autor) hizo hincapié en que la idea de la tarea es "no tomar premisas de más". En este sentido, indicó a las y los estudiantes participantes que la cuestión era solo considerar aquellas que ellos necesitaran para justificar el cumplimiento de la tesis. Todo ello con vistas a que, en el ítem (b), se les requería desarrollar explícitamente una cadena lógica para la efectiva deducción de la tesis a partir de las premisas seleccionadas por ellos.

En el ítem (a), los 20 estudiantes realizaron una selección correcta de premisas que permitían deducir la tesis. De ellos, los 10 estudiantes de matemática dieron justificativos válidos desde la lógica, tal cual se pedía en el ítem (b). En cambio, para esta segunda parte, en los estudiantes de física aparecieron algunas pocas dificultades. Uno (1) de estos estudiantes, que hizo una selección correcta de las premisas, no logra explicar el porqué de su razonamiento. Otros 2 estudiantes acompañaron la elección de premisas que llevan a la tesis con una explicación difusa de la cadena lógica que las vincula. Los restantes 7 estudiantes de física, además de haber escogido correctamente las premisas, pudieron explicar con la misma precisión que los estudiantes de matemática cuál es el vínculo entre ellas que permite deducir la tesis. Entre esos 7 estudiantes se encuentran 2 que acompañaron su razonamiento con representaciones gráficas: usaron diagramas de Venn como sustento de la validez de su argumento.

Así, hay en total 17 participantes del grupo bajo estudio que pueden enmarcarse dentro de la categoría de desempeño lógico muy bueno para el modo MP, lo que prima facie resultaba esperable habida cuenta de que este es el modo inferencial más abordado dentro de la formación del estudiantado que analizamos.

4.2. Resultados de la Actividad 2 (MP). La Actividad 2 es una versión del muy conocido teorema del valor medio (o teorema de Lagrange, clásico del cálculo diferencial) aplicada al caso particular de las funciones polinómicas de grado menor o igual que 10. El teorema está enunciado, en su forma general, para funciones continuas en un intervalo cerrado y derivables al interior de él; los polinomios de grado menor 10 constituyen un caso particular de tales funciones, razón por la cual se puede afirmar la verdad de la proposición condicional presentada mediante el uso del modus ponens. La dificultad aquí estriba en identificar que los polinomios de los que se habla cumplen la hipótesis del teorema y por tanto entender que la restricción impuesta en esta consigna es innecesaria para la deducción. Otra dificultad que podría emerger proviene del hecho de que la modificación de la hipótesis podría devenir en la falacia NA.

Los 10 estudiantes de matemática explicaron correctamente que la verdad de la proposición enunciada viene por tratarse de un caso particular del teorema del valor medio, en donde la hipótesis se cumple. De todos modos, y como quizás era de esperarse, 2 estudiantes de matemática desarrollaron la demostración del teorema aplicado al caso de polinomios, siendo que esto era innecesario si se usaba adecuadamente el modo MP. La necesidad de estos estudiantes de demostrar quizás es indicio, más que de una comprensión débil del MP, del "oficio de estudiante" en las carreras de matemática, que de cierta manera los obliga a "exhibir" la prueba demostrativa clásica como modo de enriquecer una respuesta formal.

En los estudiantes de física, por su parte, observamos una tendencia a resaltar el hecho de que la proposición no tendría por qué señalar que el polinomio debe tener grado menor que 10 (tal condición, como indicamos, es totalmente innecesaria y fue puesta con la finalidad de generar un desequilibrio en quien conoce lo que el teorema afirma). En particular, en 2 de estos estudiantes, el "ruido" introducido por esta restricción o especificación los llevó a afirmar que la proposición condicional compuesta es falsa. Estamos quizás ante una falacia del tipo NA, pues es probable que interpreten el cambio de la P original hacia una P' aplicada a polinomios como una negación de la hipótesis del teorema del valor medio ($\neg P$). Ante esto, estarían contestando que $\neg Q$.

Esta anomalía podría explicarse por el hecho de que siempre se exhiben las versiones más fuertes de los teoremas, es decir, aquellas que contienen la familia más amplia posible de objetos que cumplen con la hipótesis. En el currículo canónico de las carreras de matemática (que mayormente comparten las asignaturas básicas de matemática con las carreras de física), ni siquiera son dejadas como *ejercicios de práctica* versiones más débiles de los teoremas.

También cabe destacar que, tanto para los estudiantes de matemática como para los de física, el tratamiento de los teoremas del cálculo, al menos en este aspecto de su presentación y demostración canónica, no difiere y, sin embargo, el error solo se observó en los de física. Probablemente ello se deba a que estos estudiantes tienen una representación menos robusta de la naturaleza y propiedades de las funciones polinómicas.

4.3. Resultados de la Actividad 3 (MT). En la Actividad 3, dedicada al modus tollens, los estudiantes se encuentran con una proposición P que hace referencia al conjunto numérico al que pertenecen tres elementos y una proposición Q que menciona una cualidad del producto de esos elementos. El ítem (a) de la actividad pide determinar el valor de verdad de la implicación $P \Rightarrow Q$, para poder constatar luego si alguien, a sabiendas de la verdad de la implicación directa, evita usarla al preguntársele por el contrarrecíproco.

En el ítem (b), los 10 estudiantes de matemática dejan entrever en sus respuestas que entienden que debe darse $\neg P$, lo cual es correcto, pero se observa una menor claridad en las respuestas en comparación con las dadas para las Actividades 1 y 2, sobre MP. En efecto, solo 6 de esos estudiantes emplean el contrarrecíproco de manera clara y compacta y evitan hacer una distinción innecesaria o incompleta de los casos. Los 4 casos fallidos se ajustan a lo ya estudiado por la psicología cognitiva en relación con la dificultad que agrega la introducción de proposiciones negadas (Braine y O'Brien (1998); Palomo Ferrera y Sánchez Herrera (2014)).

Entre los estudiantes de física, tenemos 7 respuestas correctas para el MT, en las que se elige hacer uso de elementos de la lógica proposicional en lugar de trabajar con casos numéricos particulares. En esta Actividad, entonces, se ve un desempeño levemente mejor en los estudiantes de física que en los de matemática.

4.4. Resultados de la Actividad 4 (MT). Cabe destacar aquí que, si bien el contenido matemático involucrado en esta actividad de MT es más elevado (en términos de los conocimientos y formación previa que requiere) que el de la Actividad 3, la forma de negar la hipótesis que se postula es más sencilla, a saber: o la función no es continua o es continua pero no derivable.

En el grupo de matemática, 9 estudiantes contestaron de manera correcta haciendo un uso apropiado del modus tollens y de la regla de negación de De Morgan; 7 de ellos acompañan sus justificaciones con representaciones geométricas. El estudiante restante da una respuesta incorrecta, con alto grado de imprecisión en lo que expone.

También 9 estudiantes de física contestaron de manera correcta la consigna, pero en este caso solo 2 de ellos acompañan sus justificativos con representaciones gráficas. El estudiante que resta omitió dar respuesta a la consigna.

4.5. Resultados de la Actividad 5 (NA). Las Actividades 5 y 6 corresponden a la falacia NA. En la Actividad 5 se retoman las proposiciones presentadas en la Actividad 3 y –en un único ítem– se pregunta si, ante el conocimiento del no cumplimiento del antecedente, se puede afirmar algo sobre el cumplimiento, o no, del consecuente.

En ambos grupos se encuentran problemas con la negación de la conjunción. De entre los 10 estudiantes de matemática, 5 contestan correctamente. En el resto tenemos 1 estudiante que incurre en la falacia NA y 4 cuyas respuestas se pueden catalogar como dejando entrever una habilidad lógica acotada, dado lo difuso de su formulación.

En el caso de física, se tienen 7 respuestas correctas y 3 casos de la falacia NA. Uno de ellos, posiblemente como consecuencia de un uso incorrecto de la regla de De Morgan. En los casos de respuesta correcta, se destaca su claridad, por encima de la de los matemáticos.

4.6. Resultados de la Actividad 6 (NA). Los resultados en esta actividad nos muestran que es muy probable que estemos ante casos de perfección del condicional. Los estudiantes investigados no cuentan con antecedentes alternativos para la tesis del teorema del valor medio; por esta razón, ante la negación del antecedente "canónico", conjeturan que también debe darse la negación de la tesis consecuente.

Dentro del contexto de "paridad e imparidad" planteado para la Actividad 5 no resultaron dificultosas las manipulaciones de ejemplos que permitieran un análisis de la situación, mas ahora la complejidad del nuevo contexto matemático (cálculo) y la falta de abordaje de este tipo de situaciones en el proceso de formación de estos estudiantes aumentan la aparición de la falacia NA. Se insiste aquí una vez más en que, si se considera que los estudiantes están perfeccionando el condicional, incurren en la falacia NA por una inadecuada interpretación del alcance de la premisa mayor.

Para el grupo de matemática, tenemos 1 omisión de la actividad, 4 respuestas correctas y 5 respuestas que pueden construirse como indicando una habilidad lógica acotada. La comparación entre los desempeños que tuvieron en esta actividad y en la anterior muestra que *la diferencia de complejidad en el contenido fue determinante*.

En el caso de los estudiantes de física, tenemos solo 2 respuestas correctas, contra 8 incorrectas. Tres de estas últimas, por interpretaciones incorrectas de conceptos; las otras 5, por incurrirse en la falacia NA.

Hay 4 estudiantes (1 de matemática y 3 de física) que, habiendo contestado bien la Actividad 5, cometen la falacia en la Actividad 6. Esto resulta importante a la hora de hipotetizar sobre la posible presencia del fenómeno de perfección del condicional. El contexto de la Actividad 5 permite manipular casos con facilidad a fin de encontrar situaciones tanto de tipo $\neg P$ y Q como de tipo $\neg P$ y $\neg Q$. El desenvolvimiento correcto en aquella tarea muestra que los estudiantes son capaces de evitar la falacia NA. En la Actividad 6, sin embargo, al no poder manipular fácilmente otros antecedentes para el teorema del valor medio, el cálculo lógico se complica.

4.7. Resultados de la Actividad 7 (AC). Las Actividades 7 y 8 con de tipo AC. Nuevamente, la Actividad 7 retoma las premisas utilizadas en las Actividades 3 y

5, pero en esta ocasión pregunta qué puede afirmarse acerca del valor de P si se sabe que ha ocurrido Q.

Tenemos respuestas correctas en todos los estudiantes de matemática para el modo inferencial falaz AC. No hay problemas con la tarea.

De entre los 10 estudiantes de física, 8 logran justificar correctamente que podrían existir otros antecedentes que den lugar al consecuente Q de la consigna. En particular, 5 de estas 8 respuestas son sumamente precisas. En los 2 estudiantes restantes se ve una falacia AC y un caso de incorrección formal que adscribimos a un posible error de tipeo.

En suma, enfrentados con el hecho de que se da el caso del consecuente, tanto los matemáticos como la mayoría de los físicos entienden la naturaleza contingente (posible o probable) del antecedente.

4.8. Resultados de la Actividad 8 (AC). Recordemos que la regla que los estudiantes conocen y aceptan es el teorema del valor medio, esto es, en forma simplificada, la noción de que la continuidad en el cerrado $[a, b]$ y derivabilidad en el abierto (a, b) asegura la existencia del punto donde la recta tangente T a la gráfica tiene la misma pendiente que la recta R que une los puntos $A = (a, f(a))$ y $B = (b, f(b))$.

La Actividad 8 les plantea que si, a sabiendas de que existe un punto en el que la recta T tiene la misma pendiente que la recta R esto les permite afirmar que la función es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b). La respuesta correcta es NO, es decir, la proposición es "Falsa", y la manera de justificarlo es mostrar una función f y un punto c tales que satisfagan la ecuación brindada por el teorema del valor medio, pero f no sea continua, o f no sea derivable. Más específicamente, dado que la estructura de la proposición es de la forma $P \Rightarrow (Q \wedge R)$ la misma se refuta con $P \wedge (\neg Q \vee \neg R)$. Esto es, mostrar un punto donde la recta T a la gráfica tiene la misma pendiente que la recta R siendo, o bien discontinua, o bien no derivable.

En el caso de los estudiantes de matemática, tenemos 9 respuestas correctas y 1 incorrecta. Dentro de las correctas, podemos diferenciar aquellas argumentaciones de tipo estrictamente geométrico y aquellas mixtas de tipo geométrico-analítico siempre en el marco de lo mencionado anteriormente acerca de la estructura de la negación. Los estudiantes pudieron mostrar funciones que, si bien tenían un punto en el que la recta tangente a la gráfica era paralela a la secante que une los extremos de la curva, eran discontinuas o no derivables.

Un aspecto interesante a tener en cuenta para el análisis de esta actividad es que un contraejemplo geométrico utilizable ya se encontraba disponible en la representación geométrica de la Actividad 6. Sin embargo, esto no sirvió al grupo de física, donde 8 estudiantes contestan incorrectamente, diciendo que la proposición es verdadera. En sus argumentaciones mencionan el teorema del valor medio como argumento de apoyo. Algunos de los estudiantes por entender que lo expuesto no es otra cosa que el propio teorema del valor medio, y otros por considerar que es algo que se puede deducir de este. Desde el punto de vista formal, estamos frente a claros casos de falacia AC, que bien podrían estar suscitados por la perfección del condicional.

Por otra parte, hay 2 estudiantes de física que logran evitar la falacia AC y dan justificativos de un alto nivel de precisión. En particular, esas dos respuestas contienen justificaciones de carácter geométrico.

§5. Análisis de conjunto

Tomando en conjunto los resultados, no encontramos diferencias significativas en el desempeño de ambos grupos (matemática y física) en los modos inferenciales válidos MP y MT, desempeño que fue, en líneas generales, satisfactorio. Sin embargo, un obstáculo para esta inferencia deviene de la redacción fallida del ítem 1(a), que puede viciar los resultados.

Por otra parte, frente a los modos falaces, aparecieron algunas dificultades en ambos grupos de estudiantes. Los físicos tuvieron un buen desempeño frente a la falacia NA en la primera de las tareas dedicadas a ella (Actividad 5), pero ese logro cayó en la Actividad 6. A su vez, los matemáticos tuvieron un desempeño bueno y parejo frente a la falacia AC en las Actividades 7 y 8.

Hemos propuesto y articulado distintas explicaciones hipotéticas a las respuestas erróneas de los estudiantes, que necesitarán de ulteriores investigaciones. Señalamos como posibles las siguientes cuestiones: problemas en la negación de una conjunción (regla de De Morgan), posible perfección del condicional, ausencia de recursos formales que permitan identificar las falacias NA y AC, interferencia con el contenido de la tarea, mala comprensión del papel de los (contra)ejemplos.

Además, dado que ambos grupos de estudiantes fueron expuestos a las mismas consignas, *todas con relativo contenido matemático*, podríamos tener aquí una explicación de por qué los físicos optan en mayor proporción que los matemáticos por justificativos lógico-formales para independizarse de ese contenido y no por distinciones mediante casos o refutaciones. Los estudiantes de física *estarían prefiriendo interactuar con cada situación desde un punto de vista más estrictamente formal*, tal vez por no sentirse tan cómodos manipulando los objetos matemáticos involucrados.

La falacia NA es la que obtuvo mayor cantidad de respuestas incorrectas. Esto puede explicarse, quizás, por una fuerte herencia positivista que no enseña a los estudiantes a preguntarse “¿qué sucede si no pasa tal cosa?”, pues pone un fuerte peso en un entrenamiento en formulaciones afirmativas, del tipo “si pasa esto (que es lo esperable), haga esto otro”.

Por otra parte, creemos que la formación tradicional de matemáticos en general tampoco lleva a preguntarse por los resultados de pequeñas modificaciones en la hipótesis inicial de una cadena deductiva, dejando pasar la oportunidad de revisar si las proposiciones que componen tal hipótesis son necesarias o suficientes.

Por último, creemos posible afirmar que el desempeño destacable de los estudiantes de matemática en el modo AC cuando se trabajaba con el teorema del valor medio podría deberse a su entrenamiento en la resolución de problemas. Tal conjetura encuentra apoyo en el hecho de que los estudiantes de física se desempeñaron mejor en la actividad AC que se sustentaba en el concepto de imparidad, relativamente fácil de "calcular", que en aquella que entraba de lleno en el uso de un teorema matemático reconocible.

§6. Conclusiones

Nuestra opción por la perspectiva psicologista y naturalista, que toma distancia de la idea de una lógica mental deductiva, nos da insumos para explicar las dificultades con los modos inferenciales válidos e inválidos. Esta opción nos permite llegar a afirmar, con base en las evidencias que hemos construido, que resultaría necesario abordar, en las aulas de matemática y física, razonamientos formalmente "defectuosos", como son la abducción y la analogía o también la inducción (no nos estamos refiriendo aquí por supuesto a la llamada *inducción completa*, formalmente válida), que han sido históricamente utilizados para entender los procesos de producción de nuevo conocimiento en las disciplinas (Adúriz-Bravo y Sans Pinillos, 2023). Así, el presente artículo adhiere a la idea de que

> el razonamiento y la demostración no pueden enseñarse, por ejemplo, en una simple unidad sobre lógica, o haciendo demostraciones en geometría [. . .]. El razonamiento y la demostración deberían ser una parte consistente de la experiencia matemática durante toda la escolaridad. *Razonar matemáticamente es un hábito mental y, como todo hábito, ha de desarrollarse mediante un uso coherente en muchos contextos*. (National Council of Teachers of Mathematics, 2000, p. 59; la traducción y el destacado son nuestros)

En cuanto a la inclusión de la abducción, la inducción y la analogía como razonamientos defectuosos sin más, es importante considerar que esta afirmación puede ser matizada alejándonos de la perspectiva logicista clásica. La abducción, aunque es un razonamiento no-deductivo y, por lo tanto, no garantiza la certeza de sus conclusiones, ha sido identifica por muchos autores como una parte esencial del proceso de inferencia y generación de nuevas hipótesis en el avance del conocimiento (Aliseda, 2006). La inducción, por otro lado, puede ser incluida en un marco formal y correcto en algunos contextos matemáticos, como el de inducción completa. Por tanto, más allá de identificar *su invalidez y su incorrección sintáctica* en el marco clásico, resulta provechoso considerarlos como razonamientos no "garantizados", pero valiosos *por su carácter ampliativo y no monotónico* (Adúriz-Bravo y Sans Pinillos, 2023) para la exploración de ideas, la construcción de conocimiento y la resolución de problemas.

Nuestra adhesión a la tesis de que abducción es un enfoque de razonamiento fundamental para fomentar en las aulas de matemática y física nos lleva a querer explorar el desempeño lógico del estudiantado en modos de inferencia tradicionalmente listados como falaces. Ello supone un primer paso para estudiar *in vivo* procesos de explicación y argumentación.

En la discusión de resultados, se adoptó como postura teórica que los errores que documentamos en el manejo de falacias y abducción pueden ser producto de la perfección del condicional. En concordancia con esto, proponemos que en las clases se debería trabajar con una variedad de hipótesis (restringidas o alternativas) a fin de evitar ese fenómeno, mejorar la comprensión que tenemos de las relaciones condicionales y fortalecer el trabajo con teoremas.

Creemos que las evidencias que hemos construido nos permiten poner en tela de juicio el supuesto mencionado en las secciones iniciales como teoría de la disciplina formal. En efecto, a la vista de lo dicho anteriormente, hemos concluido que la competencia lógica general evidenciada en el grupo bajo estudio no termina de ser la deseable para estudiantes avanzados de dos carreras con fuerte formación matemática, tomando como supuesto que la enseñanza de esta debiera dar cuenta de una habilidad mucho mejor desarrollada y automatizada. Estamos convencidos, por tanto, de que sigue abierto el debate de si el entrenamiento extensivo en matemática propicia mejor que otros escenarios y contextos el desarrollo de habilidades avanzadas de razonamiento condicional.

Se destaca que el posicionamiento que tomamos acerca de los resultados obtenidos es intermedio. No se descarta aquí la colaboración que representa para el desarrollo de las habilidades lógicas un escenario abstracto como el que la matemática propone (y en este sentido, aparecieron muchos resultados positivos en nuestro estudio), pero tampoco adherimos a pensar que el entrenamiento en matemática, sin una revisión profunda de su naturaleza y de su historia, de sus procesos de construcción y de una formación transversal en lógica, vaya a generar indefectiblemente sujetos bien entrenados en el razonamiento condicional.

Se remarca como conclusión que la matemática en efecto constituye un escenario propicio para la *puesta en uso* de los modos inferenciales, pero que tal escenario no es el único posible y quizás tampoco el óptimo. La práctica puede darse desde dentro de cada disciplina: los elementos para razonar, provistos por la lógica, pueden "imprimirse" sobre los contenidos disciplinares sin necesidad de que la matemática se encuentre presente de manera explícita.

Por otra parte, si se pretende dejar en manos de la enseñanza de la matemática el grueso del aprendizaje de las competencias lógicas, deberíamos cesar de suponer que un abordaje mecanicista e irreflexivo aportará a su desarrollo. Los resultados de los dos grupos que componen la población que se estudió muestran algunos datos no deseables en quienes se pretende estén más entrenados en el razonamiento condicional, lo cual lleva a preguntarnos qué mejoras supone la inclusión de la matemática en cursos *donde su principal justificativo sea el de posibilitar el desarrollo de habilidades formales*.

Los problemas evidenciados en este trabajo no son subsanables simplemente por una formación más acabada en lógica. La breve reseña hecha sobre la práctica didáctica de la demostración, así como el reconocimiento de una muy extendida imagen de la matemática como ciencia hipotético-deductiva, dan cuenta del vínculo que existe entre las concepciones epistemológicas, metodológicas e históricas de los docentes y la forma en la que ellas/ellos enseñan. La ausencia en la formación de otros modos inferenciales como la abducción no puede ser subsanada *si no se acompaña la actividad matemática de una revisión epistemológica seria de sus orígenes y su historia*.

Adicionalmente, creemos que es menester que los docentes de matemática volvamos a plantearnos cuál es el porqué de la enseñanza de nuestra disciplina en el contexto de otras carreras a fin de poder contrarrestar décadas de una enseñanza muchas veces fútil. Por lo menos deberíamos estar en conocimiento del debate existente, a nivel internacional, acerca de la validez de la teoría de la disciplina formal y permitirnos la duda acerca de que la mera introducción de la matemática hará devenir a nuestros estudiantes en sujetos con habilidades lógicas mejor desarrolladas que las que tendrían sin no atravesaran asignaturas matemáticas.

Es aquí el lugar apropiado para introducir otra reflexión al respecto del alcance de lo que hallamos: ¿qué distintas consecuencias tiene nuestra interpretación de las dificultades en la formación lógica universitaria en los casos en que estemos estudiando licenciados o profesores? Creemos que ambas poblaciones tienen puntos en común, pero también especificidades que habría que seguir inspeccionando. En relación con el profesorado de ciencias naturales y matemática, una pobre comprensión de la estructura lógica de los argumentos puede, como ya sugerimos a lo largo del trabajo, *comprometer su competencia para diseñar actividades didácticas en torno a la argumentación y al pensamiento crítico*.

Por último, y con ánimos prospectivos, se dejan planteados algunos interrogantes. Si estudiantes con alto grado de entrenamiento en matemática avanzada como los de esta investigación muestran debilidades en su formación lógica, ¿cómo seguir justificando la inclusión de matemática en el currículo simplemente basados en la creencia de que la misma constituye un escenario óptimo para el desarrollo de las habilidades lógicas? ¿No es ya tiempo de vincular la práctica matemática con sus fundamentos lógicos de manera más explícita? ¿No sería mejor un entrenamiento en habilidades lógicas desde los mismos contenidos de las diversas disciplinas? ¿Y qué papel jugaría en todo ello la resolución de problemas genuinos o auténticos?

Para seguir profundizando en estas preguntas, se recomienda la lectura del trabajo de Henao y Moreno (2016), en el que muestran el estado actual de la didáctica de la lógica y proponen estrategias para incorporar la abducción, que consideran como una inferencia relegada en comparación con otros modos de razonamiento. Esta postura plantea grandes desafíos, como se observa en los trabajos relacionados con la abducción en la formación científica y docente, como ser los de Aliseda (2006), Carranza y cols. (2012), Adúriz-Bravo (2014, 2015) o Adúriz-Bravo y Sans Pinillos (2023).

Apéndice
Transcripción del cuestionario utilizado

Actividad 1.

a) Seleccione con un círculo cuáles de las siguientes premisas son necesarias para afirmar la tesis.

Premisas

- P1: Los polinomios de Klafenbach son inversibles en un anillo de Klein.
- P2: Los anillos de Klein son isomorfos a los espacios de Hannan-Pinen.
- P3: Todo polinomio de Klafenbach par puede ser descompuesto como el producto de un inversible por un elemento del núcleo.
- P4: Los elementos del dual de un espacio de Hannan-Pinen son polinomios primos dentro de un anillo de Igortsky-Pluchevncoff.
- P5: Los únicos anillos isomorfos a los espacios de Hannan-Pinen son los anillos de polinomios.

Tesis: Los elementos de un anillo de Klein son polinomios.

b) Proponga un orden deductivo para llegar a la tesis entre las premisas que seleccionó anteriormente y explique su razonamiento.

Actividad 2.

Conteste si la siguiente afirmación es verdadera o falsa justificando su respuesta de la manera más detallada posible, ya sea a través de contraejemplos, demostraciones o la cita de propiedades o teoremas que usted conozca.

Afirmación: Si $P(x)$ es una función polinómica de grado menor o igual que 10 en $[a, b]$, entonces existe $c \in (a, b)$ tal que:

$$P(c) = \frac{P(b) - P(a)}{b - a}$$

Recuadre la opción que considere correcta: VERDADERA FALSA
Justifique su respuesta:

Actividad 3.

Considere las siguientes proposiciones:

- P: Los números reales a_1, a_2, a_3 son todos pares. (P: antecedente)
- Q: El producto de los números reales a_1, a_2, a_3 es par. (Q: consecuente)

a) Determine el valor de verdad de la proposición $P \Rightarrow Q$.

b) Si se sabe que no ocurre Q, ¿Qué puede concluirse sobre el antecedente?

Actividad 4.

Dada la función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Se sabe que no existe un punto "c" dentro de (a, b) en el que la pendiente de la recta tangente coincida con el de la recta que pasa por $(a; f(a))$ y $(b; f(b))$.

¿Qué puede decir sobre f? Explique el porqué de su respuesta.

Actividad 5.

Retomando las proposiciones de la actividad 3:

- P: Los números reales a_1, a_2, a_3 son todos pares. (P: antecedente)
- Q: El producto de los números reales a_1, a_2, a_3 es par. (Q: consecuente)

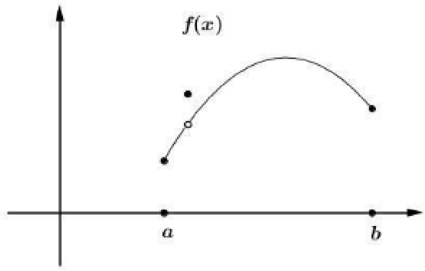
Si se sabe que no ocurre P, ¿Qué puede concluirse sobre el consecuente? Explique el porqué de su respuesta.

Actividad 6.

Conteste si la siguiente afirmación es verdadera o falsa justificando su respuesta de la manera más detallada posible, ya sea a través de contraejemplos, demostraciones o la cita de propiedades o teoremas que usted conozca.

Afirmación: En la gráfica que se muestra a continuación existe un punto "c" en el intervalo (a, b) tal que

$$f(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



Recuadre la opción que considere correcta: VERDADERA FALSA
Justifique su respuesta:

Actividad 7.

Retomando las proposiciones de la actividades 3 y 5:

- P: Los números reales a_1, a_2, a_3 son todos pares. (P: antecedente)
- Q: El producto de los números reales a_1, a_2, a_3 es par. (Q: consecuente)

Si se sabe que el producto de los tres números a_1, a_2, a_3 es par ¿Qué puede concluirse sobre antecedente? Explique el porqué de su respuesta.

Actividad 8.

Conteste si la siguiente afirmación es verdadera o falsa justificando su respuesta de la manera más detallada posible, ya sea a través de contraejemplos, demostraciones o la cita de propiedades o teoremas que usted conozca.

Afirmación: Sea $f : [a, b] \to R$ una función de la cual se sabe que existe un punto "c" en el intervalo (a, b) tal que

$$f(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

entonces $f(x)$ es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b).

Bibliografía

Adúriz-Bravo, A. (2014). Revisiting school scientific argumentation from the perspective of the history and philosophy of science. En M. R. Matthews (Ed.), *International handbook of research in history, philosophy, and science teaching* (p. 1443-1472). Springer. doi: 10.1007/978-94-007-7654-8_45

Adúriz-Bravo, A. (2015). Pensamiento "basado en modelos" en la enseñanza de las ciencias naturales. *Revista del Instituto de Investigaciones en Educación*, *6*, 20-31. Descargado de https://revistas.unne.edu.ar/index.php/riie/article/view/3680/3312

Adúriz-Bravo, A., y Sans Pinillos, A. (2023). Abduction as a mode of inference in science education. *Science & Education*, *32*(4), 993-1020. doi: 10.1007/s11191-022-00366-8

Aliseda, A. (2006). *Abductive reasoning: Logical investigations into discovery and explanation*. Springer.

Arsac, G. (1987). L'origine de la démonstration: Essai d'épistémologie didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *8*(3), 267-312. Descargado de https://revue-rdm.com/1987/l-origine-de-la-demonstration/

Arsac, G. (1990). Les recherches actuelles sur l'apprentissage de la démonstration et les phénomènes de validation en france. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *9*(3), 247-280. Descargado de https://revue-rdm.com/1988/les-recherches-actuelles-sur-lapprentissage-de-la-demonstration-et-les-phenomenes-de-validation-en-france/

Arsac, G. (1996). *Un cadre d'étude du raisonnement mathématique*. IMAG. (En: Actes du Séminaire de Didactique et Technologies Cognitives en Mathématiques, No. 175)

Attridge, N., y Inglis, M. (2013). Advanced mathematical study and the development of conditional reasoning skills. *PLoS ONE*, *8*(7), e69399. doi: 10.1371/journal.pone.0069399

Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics*, *18*(2), 147-176. doi: 10.1007/BF00314724

Başaran, M., Özalp, G., Kalender, I., y Alacacı, C. (2015). Mathematical knowledge and skills expected by higher education in engineering and the social sciences: Implications for high school mathematics curriculum. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education*, *11*(2), 405-420. doi: 10.12973/eurasia.2015.1357a

Berndt, M., Schmidt, F. M., Sailer, M., Fischer, F., Fischer, M. R., y Zottmann, J. M. (2021). Investigating statistical literacy and scientific reasoning & argumentation in medical-, social sciences-, and economics students. *Learning and Individual Differences*, *86*, 101963. doi: 10.1016/j.lindif.2020.101963

Beth, E. W., y Piaget, J. (1980). *Epistemología matemática y psicología: Relaciones entre la lógica formal y el pensamiento real*. Crítica. (2ª edición. Original en inglés de 1974)

Biembengut, M. S., y Hein, N. (2004). Modelación matemática y los desafíos para enseñar matemática. *Educación Matemática*, *16*(2), 105-125. Descargado de https://www.redalyc.org/pdf/405/40516206.pdf

Braine, M. D., y O'Brien, D. P. (Eds.). (1998). *Mental logic*. Mahwah: Lawrence Erlbaum Associates.

Bronkhorst, H., Roorda, G., Suhre, C., y Goedhart, M. (2020). Logical reasoning in formal and everyday reasoning tasks. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *18*(8), 1673–1694. doi: 10.1007/s10763-019-10039-8

Bruner, J. S., Goodnow, J. J., y Austin, G. A. (1956). *A study of thinking*. New York: Wiley.

Carranza, P., Cyr, S., Durand-Guerrier, V., y Polo, M. (2012). Les différentes pensées mathématiques et leur développement dans le curriculum: Compte-rendu du groupe de travail n° 3. En J.-L. Dorier y S. Coutat (Eds.), *Enseignement des mathématiques et contrat social: Enjeux et défis pour le 21e siècle: Actes du colloque emf2012* (pp. 384–391). Descargado de http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

Clarke, D., Roche, A., Wilkie, K., y cols. (2013). Demonstration lessons in mathematics education: Teachers' observation foci and intended changes in practice. *Mathematics Education Research Journal*, *25*(2), 207–230. doi: 10.1007/s13394-012-0058-z

Crespo Crespo, C. R. (2004). Argumentar matemáticamente: Su importancia en el aula. En *Ponencia presentada en el ii congreso virtual de enseñanza de las matemáticas-cvem 2004.*

Crespo Crespo, C. R., y Farfán, R. M. (2005). Una visión socioepistemológica de las argumentaciones en el aula: El caso de las demostraciones por reducción al absurdo. *RELIME*, *8*(3), 287–317. Descargado de https://www.redalyc.org/pdf/335/33508304.pdf

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. En D. O. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 95–123). Dordrecht: Kluwer.

Durand Guerrier, V. (1996). *Logique et raisonnement mathématique: Défense et illustration de la pertinence du calcul des prédicats pour une approche didactique des difficultés liées à l'implication* (Tesis Doctoral, Université Claude Bernard, Lyon I). Descargado de https://www.theses.fr/1996LYO10245

Elleman, A. M. (2017). Examining the impact of inference instruction on the literal and inferential comprehension of skilled and less skilled readers: A meta-analytic review. *Journal of Educational Psychology*, *109*(6), 761–781. doi: 10.1037/edu0000180

Gray, E. M., y Tall, D. O. (1994). Duality, ambiguity, and flexibility: A "proceptual" view of simple arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education*, *25*(2), 116–140. doi: 10.2307/749505

Griffiths, P. A. (2000). Las matemáticas ante el cambio de milenio. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, *3*(1), 23–41. Descargado de http://blogs.mat.ucm.es/catedramdeguzman/las-matematicas-ante-el-cambio-de-milenio/

Hanna, G. (1995). Challenges to the importance of proof. *For the Learning of Mathematics*, *15*(3), 42–49. Descargado de https://www.jstor.org/stable/

40248188

Henao, R. D., y Moreno, M. (2016). Didáctica de la lógica para el ejercicio de la razonabilidad. *Magis*, *9*(18), 85–110. doi: 10.11144/Javeriana.m9-18.dler

Henle, M. (1962). On the relation between logic and thinking. *Psychological Review*, *69*(4), 366–378. doi: 10.1037/h0042043

Herburger, E. (2015). Conditional perfection: The truth and the whole truth. En S. D'Antonio, M. Moroney, y C. R. Little (Eds.), *Proceedings of salt* (Vol. 25, pp. 615–635). Ithaca: Stanford University.

Inhelder, B., y Piaget, J. (1972). *De la lógica del niño a la lógica del adolescente: Ensayo sobre la construcción de las estructuras operatorias formales*. Buenos Aires: Paidós. (Original en francés de 1955)

Knuth, E. J. (2002). Proof as a tool for learning mathematics. *Mathematics Teacher*, *95*(7), 486–490. Descargado de http://web.mit.edu/bskow/www/215-S12/knuth_proof-as-a-tool-for-learning.pdf

Lawson, A. (1985). A review of research on formal reasoning and science teaching. *Journal of Research in Science Teaching*, *22*(7), 569–617. doi: 10.1002/tea.3660220702

Lawson, A. (2010). Basic inferences of scientific reasoning, argumentation, and discovery. *Science Education*, *94*(2), 336–364. doi: 10.1002/sce.20357

Legrand, M. (1990). Rationalité et démonstration mathématiques: Le rapport de la classe à une communauté scientifique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *9*(3), 365–406. Descargado de https://revue-rdm.com/1988/rationalite-et-demonstration/

López-Astorga, M. (2015). La teoría de la disciplina formal y la lógica mental. *Praxis Filosófica*(41), 11–25. doi: 10.25100/pfilosofica.v0i41.3178

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston: NCTM. Descargado de https://www.nctm.org/Standards-and-Positions/Principles-and-Standards/

Noya, S. (2019). *Un estudio sobre razonamiento condicional: Apropiaciones de la lógica en estudiantes de matemática y física* (Tesis de Maestría, Universidad Nacional del Nordeste). Descargado de https://repositorio.unne.edu.ar/handle/123456789/9043

Palomo Ferrera, M. J., y Sánchez Herrera, S. (2014). Diferencias evolutivas en la ejecución de la tarea de selección de wason con material abstracto y deóntico. *Campo Abierto*, *33*(2), 127-138. Descargado de https://mascvuex.unex.es/revistas/index.php/campoabierto/article/view/1601

Panizza, M. (2005). *Razonar y conocer: Aportes a la comprensión de la racionalidad matemática de los alumnos*. Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Quelhas, A. C., y Juhos, C. (2013). A psicologia cognitiva e o estudo do raciocínio dedutivo no último meio século. *Análise Psicológica*, *31*(4), 359-375. Descargado de https://repositorio.ispa.pt/handle/10400.12/3301

Samaja, J. (2005). *Epistemología y metodología: Elementos para una teoría de la investigación científica* (3.ª ed.). Buenos Aires: EUDEBA.

Schoenfeld, A. H. (1994). What do we know about mathematics curricula? *The Journal of Mathematical Behavior*, *13*(1), 55-80. doi: 10.1016/0732-3123(94)90035-3

Tall, D. O. (2008). The transition to formal thinking in mathematics. *Mathematics Education Research Journal*, *20*(2), 5-24. doi: 10.1007/BF03217474

Wason, P. C. (1966). Reasoning. En B. M. Foss (Ed.), *New horizons in psychology* (p. 135-151). Harmonsworth: Penguin Books.

Weber, K. (2004). Traditional instruction in advanced mathematics courses: A case study of one professor's lectures and proofs in an introductory real analysis course. *The Journal of Mathematical Behavior*, *23*(2), 115-133. doi: 10.1016/j.jmathb.2004.03.001

Samuel Ivan Noya
Facultad de Ciencias Económicas/Facultad de Ciencias Exactas y Naturales y Agrimensura, Universidad Nacional del Nordeste, Argentina.
(✉) *samuelivannoya@comunidad.unne.edu.ar*

Agustín Adúriz-Bravo
CONICET/Universidad de Buenos Aires, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Instituto de Investigaciones CeFIEC, GEHyD-Grupo de Epistemología, Historia y Didáctica de las Ciencias Naturales, Argentina.
(✉) *aadurizbravo@cefiec.fcen.uba.ar*

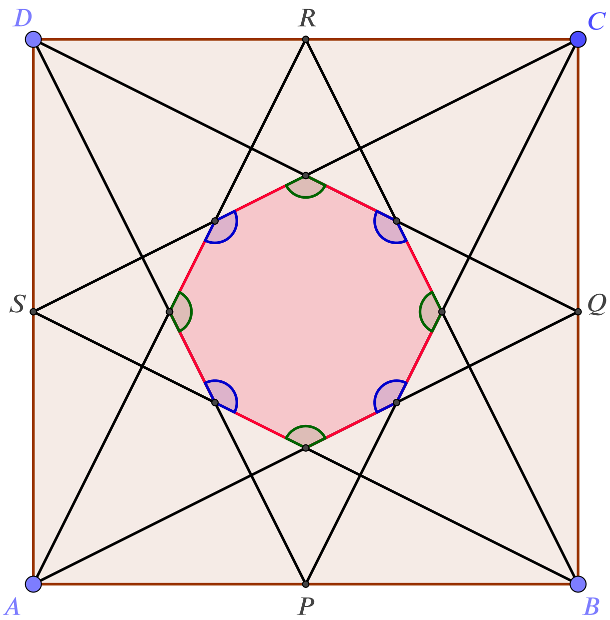
Recibido: *8 de marzo de 2023.*
Aceptado: *3 de noviembre de 2023.*
Publicado en línea: *27 de diciembre de 2023.*

en un cuadrado cualquiera, el octógono interior obtenido por el corte de las 8 medias diagonales no es regular?

Recordamos que por media diagonal de un cuadrado nos referimos al segmento que une un vértice con el punto medio de un lado opuesto (o sea, hay dos medias diagonales por vértice).

Hay 8 medias diagonales en un cuadrado $\mathcal{C} = \square ABCD$, que podemos dividirlas en dos grupos. Si P, Q, R, S son los puntos medios de los lados AB, BC, CD y DA, respectivamente, tenemos un grupo formado por AQ, BR, CS y DP, y otro formado por AR, BS, CP y DQ. Cada uno de estos dos conjuntos de cuatro medias diagonales determina un cuadrado que tiene $\frac{1}{5}$ del área de $\mathcal{C}$ (ver el ¿Sabías que...? del número anterior, Número 38, vol. 2, año 2023).

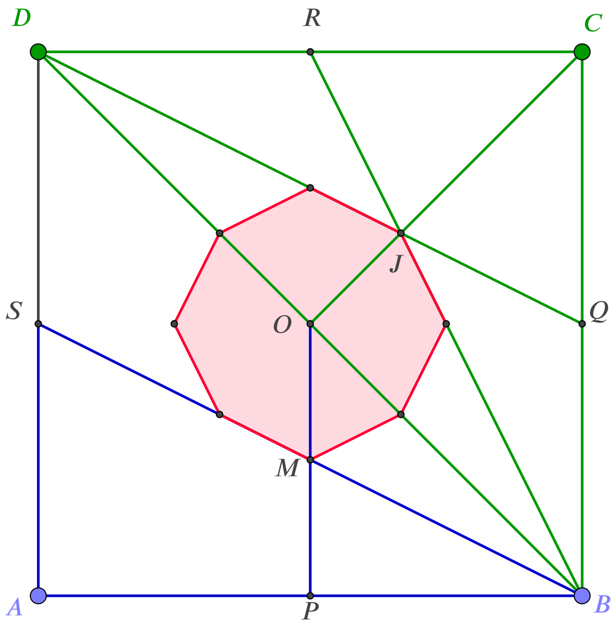
El corte de las 8 medias diagonales determina un octógono $\mathcal{O}$, que es además la intersección de los dos cuadrados interiores mencionados mas arriba.



Podría parecer que por la simetría con que fue construido el octógono, este debería ser regular. Pero no, para nuestra sorpresa no es así. Por supuesto que los 8 lados del octógono $\mathcal{O}$ son congruentes. En efecto, dos lados consecutivos de $\mathcal{O}$ son congruentes pues algunos pares de ellos son simétricos con respecto a una diagonal del cuadrado $\mathcal{C}$ y otros pares son simétricos con respecto a un segmento que une los puntos medios de $\mathcal{C}$.

Sin embargo, los ángulos no son todos congruentes, sino que vienen en 2 conjuntos de 4 ángulos congruentes cada uno. Por un lado, si rotamos 90° el cuadrado $ABCD$ con respecto a su centro, cada ángulo azul del octógono va a parar al ángulo azul siguiente y lo mismo ocurre con los verdes. Esto demuestra que los ángulos azules son todos congruentes entre sí, y que los ángulos verdes también son todos congruentes entre sí. Por otro lado, damos a continuación dos pruebas muy sencillas (sin medir) de que los ángulos verdes no son congruentes a los azules. Dejamos de desafío al lector calcular la medida de los ángulos azules y verdes.

(1) Para la primer demostración, observemos la figura siguiente:



Si $\mathcal{O}$ fuese regular, OM y OJ serían congruentes. Sin embargo, es fácil ver que no miden lo mismo:

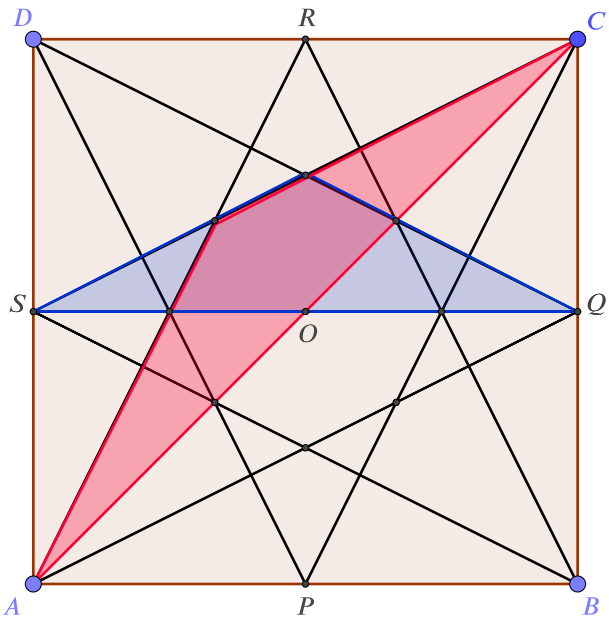
$$|OM| = |MP| = \tfrac{1}{2}|AS| = \tfrac{1}{4}|AB|,$$

mientras que

$$|OJ| = \tfrac{1}{3}|OC| = \tfrac{1}{6}|AC| = \tfrac{\sqrt{2}}{6}|AB|,$$

donde hemos usado que MP es base media del triángulo $\triangle SAB$ (en el 1er caso) y que J es el centroide de $\triangle BCD$ (en el 2do caso). Recordemos que el centroide de un triángulo es la intersección de las medianas y que dada una mediana cualquiera, se encuentra a $\frac{1}{3}$ del punto medio del lado donde apoya la mediana y a $\frac{2}{3}$ del vértice opuesto.

(2) La segunda demostración es más simple todavía. Basta observar la siguiente figura.



Si el octógono fuese regular, entonces al rotar el triángulo azul por el centro de $\mathcal{O}$ de forma antihoraria tendría que coincidir con el triángulo rojo, pero claramente el triángulo azul tiene el lado mayor mas corto que el lado mayor del rojo (1 versus $\sqrt{2}$ si suponemos que $\mathcal{C}$ es unitario).

Finalmente, ahora que ya hemos visto que el octógono no es regular, nos surge la duda, ¿cuál es su área? Sabemos que tiene que ser menor que $\frac{1}{5}$ del área del cuadrado grande $\mathcal{C}$. De las figuras, vemos que por construcción, el área de $\mathcal{O}$ es el área de $\mathcal{C}_1$ (o de $\mathcal{C}_2$) menos el área de cuatro triángulitos rectángulos.

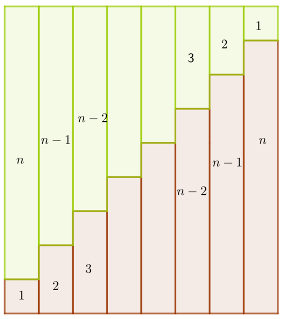
¿Te animás a encontrar el área de $\mathcal{O}$? La solución en la última página.

Sección de Problemas

☞ *por Diego A. Sulca*

En esta edición vamos a explorar algunas preguntas en torno a los cuadrados perfectos. Estos son los números $0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, \ldots$, y son quizás, junto con los números primos, los primeros números “especiales"que analizamos en nuestras clases de matemática en el secundario. Geométricamente, el cuadrado n^2 representa el área de un cuadrado de lado entero n.

El primer problema consiste de dos identidades que bien podrían resolverse haciendo manipulaciones algebraicas o invocando al principio de inducción matemática. Sin embargo el reto que les propongo es probar las identidades de manera geométrica, sin recurrir al álgebra. A modo de ejemplo, el siguiente gráfico



muestra la igualdad $1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$. En efecto, en la figura observamos un rectángulo de base n y altura $n+1$, y por lo tanto de área $n(n+1)$. Este rectángulo a su vez se encuentra dividido en rectángulos largos cuyas áreas se encuentran especificada en el dibujo. El área de cada una de las dos zonas de un solo color es igual a $1+2+3+\cdots+n$. Luego $2(1+2+3+\cdots+n) = n(n+1)$ y de aquí sale la fórmula deseada.

Problema 1. Probar geométricamente los siguientes enunciados.

(a) La suma de los primeros n números impares es igual a n^2.
(b) La suma de los primeros n cuadrados positivos es igual a $\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

Ahora les presento una serie de problemas de caráctar numérico. A los números los escribimos usualmente en su notación decimal, y es por lo tanto natural hacerse preguntas sobre los cuadrados en torno a sus representaciones decimales.

Problema 2.

(a) ¿Con cuántos ceros puede terminar un cuadrado perfecto?
(b) ¿Con qué digito puede terminar un cuadrado perfecto?
(c) ¿Cuales son los posibles dos últimos dígitos de un cuadrado perfecto?

Problema 3.

(a) Si N es un número de k dígitos, demostrar que hay un cuadrado perfecto cuya distancia a N es menor que $10^{\frac{k}{2}}$.
(b) Probar que si N es un número cualquiera, entonces existe un cuadrado perfecto que empieza con N. Por ejemplo, para $N = 1234$ obtengo $1234321 = 1111^2$ y para $N = 999$ obtengo $9998244 = 3162^2$.

En lo que sigue usaremos la notación $N = \overline{a_1 \ldots a_r}$ para indicar que $a_1, \ldots, a_r$ son los dígitos de N: a_r es la unidad, a_{r-1} la decena, a_{r-2} la centena, etc. Usamos la barra para no confundirnos con $a_1 \cdots a_r$, que normalmente denota la multiplicación de $a_1, \ldots, a_r$.

Sea $N = \overline{a_1 \ldots a_k}$ un cuadrado perfecto. Quiero agregarle r dígitos $a_{k+1}, \ldots, a_{k+r}$ a la derecha para que el número resultante $M = \overline{a_1 \ldots a_k a_{k+1} \ldots a_{k+r}}$ sea nuevamente un cuadrado perfecto. Me pregunto cuál es el menor valor posible de r (para un N dado). Obviamente agregando dos ceros al final de N se obtiene un cuadrado. Para evitar esta trivialidad se va a pedir que el último dígito agregado a_{r+k} sea distinto de cero. Por ejemplo, si $N = 144$ $(= 12^2)$, entonces $r = 1$ pues $1444 = 38^2$. Si $N = 121$ $(= 11^2)$ entonces el próximo cuadrado que empieza con 121 y no termina en 0 es $121801 = 349^2$.

Encontrar una expresión general para r en términos de N parece ser una tarea difícil. Para simplificar el problema podemos preguntarnos sobre cotas para r. Si se exige además que r sea par se puede llegar a una cota inferior de r.

Problema 4. Sea $N = \overline{a_1 \cdots a_k}$ un cuadrado perfecto. Sea r un número par y sean $a_{k+1}, \ldots, a_{k+r}$ dígitos tales que $a_{k+r} \neq 0$ y el número $M = \overline{a_1 \ldots a_k a_{k+1} \ldots a_{k+r}}$ es también un cuadrado perfecto. Probar que $r \geq k$.

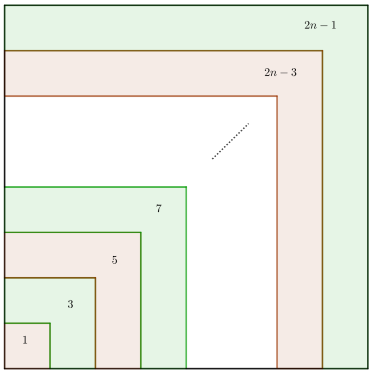
¿Se animan a formular una cota superior para r?

Finalmente les comparto un problema de la Olimpíada Matemática Argentina del año 2001 que se tomó en la selección del equipo que nos representó ese año en la Olimpiada Internacional de Matemática. Este problema es el primero que me fascinó de manera infinita. Cuando lo ví me parecía imposible y me llevó un buen tiempo (años) en resolverlo. A pesar de esto me cambió mucho la forma en que entendía a las matemáticas. Ustedes no se preocupen, porque con lo trabajado en los problemas anteriores no les debería resultar difícil. Solo espero que puedan disfrutarlo tanto (y más) que yo.

Problema 5. Pablito escribe en el pizarrón un millón de dígitos, todos distintos de cero, empezando de izquierda a derecha. Cada vez que termina de escribir un dígito, si el número que aparece en el pizarrón es un cuadrado perfecto, entonces recibe 1 peso (épocas del uno a uno). Por ejemplo, si empezara escribiendo 169744 ya habría ganado 4 pesos pues $1 = 1^2, 16 = 4^2, 169 = 13^2, 169744 = 412^2$. Demostrar que Pablito no puede ganar más de 40 pesos.

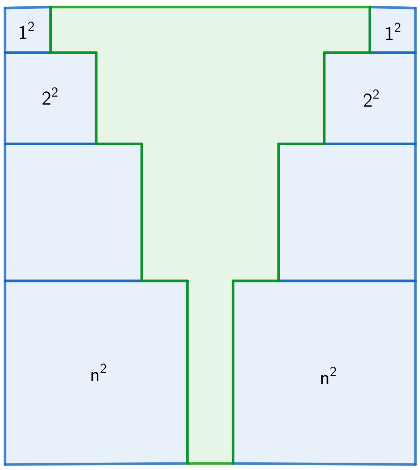
SOLUCIONES

Solución 1. (a) En el siguiente dibujo se presenta un cuadrado de tamaño $n \times n$ y desde el corner inferior izquierdo hasta el corner superior derecho se van dibujando uno dentro del otro los cuadrados de tamaño 1×1, 2×2, 3×3, etc.



Cada número en la diagonal es el área de la zona pintada en donde se encuentra el número. Es claro que estos números tienen que ir creciendo de a dos a partir de 1, y por lo tanto resultarán ser los n primeros impares. La suma de todos estos números da el área del cuadrado y por lo tanto es n^2.

(b) Consideremos el siguiente rectángulo



El mismo se construye apilando cuadrados de tamaño $1 \times 1, 2 \times 2, \ldots, n \times n$ a la izquierda y a la derecha. Estas pilas están distanciadas en una unidad. Los números en el gráfico indican el área del cuadrado que lo encierra. Como se puede apreciar, la base del rectángulo mide $n+1+n = 2n+1$, mientras que la altura mide

$1+2+\ldots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$. Por lo tanto el área del rectángulo es $\frac{1}{2}n(n+1)(2n+1)$. Deducimos que

$$2(1^2+2^2+\ldots+n^2)+(\text{área de la zona verde})=\frac{1}{2}n(n+1)(2n+1).$$

Si a la zona verde la dividimos de abajo hacia arriba en cuadraditos de tamaño 1×1 su área resulta

$$\begin{aligned}&\underbrace{1+1+\ldots+1}_{n}+\underbrace{3+\ldots+3}_{n-1}+\ldots+\underbrace{2n-3+2n-3}_{2}+\underbrace{2n-1}_{1}\\ &\qquad=(1+3+5+\cdots+2n-1)+(1+3+5+\cdots+2n-3)+\cdots+(1+3)+1\\ &\qquad=n^2+(n-1)^2+\cdots+2^2+1^2.\end{aligned}$$

Juntando todo obtenemos $3(1^2+2^2+\cdots+n^2)=\frac{1}{2}n(n+1)(2n+1)$, de donde se deduce la identidad deseada.

El cálculo del área de la zona verde también se puede hacer gráficamente. ¿Se animan a hacerlo?

Solución 2. (a) Si n termina con r ceros entonces $n=m10^r$ para algún m que no es múltiplo de 10. Luego $n^2=m^2 10^{2r}$. Como m^2 tampoco es múltiplo de 10, deducimos que n^2 termina con $2r$ ceros. Luego el número de ceros con que termina un cuadrado es siempre un número par.

(b) Si calculamos el cuadrado de un número n cuya unidad es el dígito u, la unidad de n^2 será igual a la unidad de u^2. Formalmente, si u es la unidad de n entonces podemos escribir $n=10m+u$ para algún m y luego $n^2=10^2m^2+20mu+u^2=10(10m^2+2um)+u^2$. De aquí vemos que solo u^2 aporta a la unidad de n^2. Calculando $0^2=0$, $1^2=1$, $2^2=4$, $3^2=9$, $4^2=16$, $5^2=25$, $6^2=36$, $7^2=49$, $8^2=64$, $9^2=81$, concluímos que los únicos valores posibles para la unidad de n^2 son $0,1,4,5,6,9$.

(c) Si $\overline{du}$ son los últimos dígitos de n entonces los últimos dos dígitos de n^2 son los mismos que los de $\overline{du}^2$. En efecto, $n=100m+\overline{du}^2$ para algún m y por lo tanto $n^2=100^2m^2+200m\overline{du}+\overline{du}^2=100(100m^2+2m\overline{du})+\overline{du}^2$, y de esta igualdad se sigue nuestra afirmación. Al igual que antes, todo lo que resta hacer es calcular los cuadrados desde 0^2 hasta 99^2 y obtener sus dos últimos dígitos. De hecho basta calcular hasta 49^2, ¿por qué?

Solución 3. (a) Si N ya es un cuadrado no hay nada que probar. Si no fuera un cuadrado lo podemos encerrar entre dos cuadrados consecutivos $n^2<N<(n+1)^2=n^2+2n+1$. La distancia de N a algunos de los cuadrados n^2 o $(n+1)^2$ debe ser menor o igual que n pues si fuera $N-n^2\geq n+1$ y $(n+1)^2-N\geq n+1$ entonces sumando estas desigualdades término a término obtendríamos el absurdo $(n+1)^2 - n^2 \geq 2n+2$, cuando en realidad $(n+1)^2 - n^2 = 2n+1$. Para terminar, observemos que $n < \sqrt{N} < 10^{\frac{k}{2}}$.

(b) Sea $N = \overline{a_1 \ldots a_k}$. Como primera estrategia podríamos agregarle ceros a la derecha y al número resultante, digamos M, buscarle el cuadrado más cercano. La cantidad de ceros a agregar debería ser lo suficiente para que el cuadrado más cercano a M también empiece con $\overline{a_1 \ldots a_k}$. Pero como el cuadrado más cercano a un número puede estar por debajo del número, lo cual forzaría a cambiar a_k, cambiamos la estrategia y antes de agregar los ceros coloco un 5.

De manera más precisa, considero el número $M = \overline{a_1 \ldots a_k 50 \ldots 0}$ de $2k+1$ dígitos obtenido a partir de N agregándole un 5 y luego k ceros a la derecha. Por el primer item, el cuadrado más cercano está a distancia $< 10^{\frac{2k+1}{2}} < 4 \cdot 10^k$. Esto quiere decir que el cuadrado más cercano vive entre los números $\overline{a_1 \ldots a_k 10 \ldots 0}$ y $\overline{a_1 \ldots a_k 90 \ldots 0}$ (ambos con k ceros al final). Luego el cuadrado más cercano tiene los primeros k dígitos iguales a los de M.

Solución 4. Sea $N = n^2$ y $M = m^2$. Tenemos que $n^2 \cdot 10^r + \overline{a_{k+1} \ldots a_{k+r}} = m^2$, con lo cual

$$\overline{a_{k+1} \ldots a_{k+r}} = m^2 - \cdot 10^r n^2 = (m - n10^{\frac{r}{2}})(m + n10^{\frac{r}{2}}) \geq m + n10^{\frac{r}{2}}.$$

En esta desigualdad usamos que $\frac{r}{2}$ es entero y por lo tanto $m - n10^{\frac{r}{2}} \geq 1$. No puede ser cero porque $a_{k+r} \neq 0$.

Notemos ahora que $M = m^2 > 10^{k+r-1}$, con lo cual $m > 10^{\frac{k+r-1}{2}}$ y así

$$10^r > \overline{a_{k+1} \ldots a_{k+r}} > 10^{\frac{k+r-1}{2}},$$

De aquí resulta $r > \frac{k+r-1}{2}$ y luego $r > k-1$, es decir, $r \geq k$.

Solución 5. Supongamos que $N_1 < N_2 < N_3 < \cdots < N_d$ son todos los cuadrados obtenidos por Pablito. Vamos a probar por inducción que N_{2k} tiene por lo menos 2^k dígitos. Esto es evidente cuando para $k = 1$: N_2 tiene al menos $2 = 2^1$ dígitos. Asumamos que vale para k, es decir, que N_{2k} tiene por lo menos 2^k dígitos. Vamos a probar lo análogo para $k+1$. Analicemos tres casos:

- Caso 1: La diferencia de dígitos entre N_{2k} y N_{2k+1} es par. Por el Problema 4, la cantidad de dígitos de N_{2k+1} es por lo menos 2 veces la cantidad de dígitos de N_{2k}, y por lo tanto es $\geq 2^{k+1}$. Luego con más razón N_{2k+2} tendrá por lo menos 2^{k+1} dígitos.
- Caso 2: La diferencia de dígitos entre N_{2k+1} y N_{2k+2} es par. Argumentando como el caso anterior llegamos a que N_{2k+2} tiene por lo menos 2^{k+1} dígitos.
- Caso 3: La diferencias de dígitos entre N_{2k} y N_{2k+1} y entre N_{2k+2} y N_{2k+1} son impares. Pero entonces la diferencia de dígitos entre N_{2k+2} y N_{2k} es par

y podemos usar el Problema 4 para concluir que la cantidad de dígitos de N_{2k+2} es al menos el doble que la cantidad de dígitos de N_{2k}, y por lo tanto es $\geq 2^{k+1}$.

Esto termina la inducción porque hemos visto que en cualquiera de los casos la cantidad de dígitos de N_{2k+2} es por lo menos 2^{k+1}.

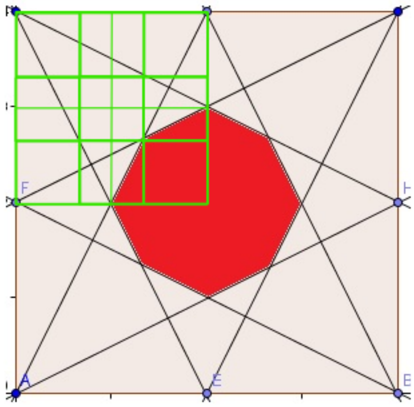
Para terminar, la hipótesis del problema nos dice que N_d tiene a lo sumo 10^6. Si d es par, entonces por lo probado arriba deberíamos tener $10^6 \geq 2^{\frac{d}{2}}$, lo cual implica $\frac{d}{2} \leq 19$, es decir, Pablito gana a lo sumo 38 pesos. Si d es impar entonces $d-1$ es par y nuevamente, por lo probado antes, deberíamos tener $10^6 \geq 2^{\frac{d-1}{2}}$. Luego $\frac{d-1}{2} \leq 19$ y en tal caso Pablito gana como mucho 39 pesos.

Solución al problema del "¿Sabías que..'?"

En el *"¿Sabías que..?"* de la página 59 dejamos planteada la siguiente pregunta: dado un cuadrado unidad $\mathcal{C}$ (de lado 1),

> *¿cuál es el área del octógono $\mathcal{O}$ determinado por la intersección de las 8 medias diagonales de $\mathcal{C}$?*

Seguramente ya habrás intentado resolverlo por vos mismo. Si estas acá es por que no pudiste hallar una respuesta o por que sí la hallaste y querés comprobar si es correcta o compararla con la que ofrecemos acá. Como suele suceder, una buena idea hace que una respuesta sea corta. Este es el caso. La solución es casi automática a partir de la siguiente figura:



Si bien el octógono no es regular, es simétrico respecto a los ejes y las diagonales. Esto implica que la proporción del área de $\mathcal{O}$ respecto del cuadrado es la misma que si nos restringimos a un cuarto del cuadrado y la región ocupada por $\mathcal{O}$ en este cuadrado mas pequeño de lado $\frac{1}{2}$.

Recordemos que el vértice del octógono es el centroide de un triángulo isósceles con vértice en $\mathcal{C}$ y por lo tanto se encuentra a $\frac{2}{3}$ de ese vértice. Por eso dividimos el cuadrado en 9 partes. El área buscada (en rojo) es 1 más el área de los dos triangulitos rectángulos en rojo, que claramente tienen área $\frac{1}{4}$.

Luego, el area de roja buscada es simplemente

$$\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) \cdot \frac{1}{9} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{6}$$

del área del cuadradito verde, y por lo tanto el área de $\mathcal{O}$ es $\frac{1}{6}$ del área del cuadrado $\mathcal{C}$ que es 1. ¡Qué prueba más bonita! (debida al usuario *flawr* en StackExchange, ver aquí).

¿Te animás a encontrar otra solución?