AÑO 25. Nº 1-2 MARZO-ABRIL 1938

Sobre las integrales determinantes ordinarias y generalizadas

POR

Carlos Biggeri (Buenos Aires)

(Continuación)

SEGUNDA PARTE

Los teoremas 3º.), 4º.), 5º.) y 6º.) se prueban por procedimientos análogos entre sí; por lo tanto, será suficiente demostrar alguno de ellos: por ejemplo, demostraremos el 6º.). De paso, su demostración nos probará la existencia de la abscisa de convergencia uniforme.

Demostración del teorema 6º.)

Pongamos:

$$J(t,z) \equiv \int_0^t a(\tau) \,.\, e^{-z \cdot \lambda(\tau)} \,.\, d\tau .$$

De acuerdo con la definición de T (t) se tiene:

$$T(t) \geq |J(t\,;\,iy)| \tag{81}$$

Pongamos:

$$L \equiv \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\log T(t)}{\lambda(t)}$$

y supongamos primeramente que L sea finito y no — negativo.

Si fuese:

$$\lim_{t \to \infty} T(t) = o$$

prefijado arbitrariamente un número δ positivo, existe un:

$$t_0 = t_0(\delta) \geq o$$

tal que para: $t \geq t_0$

es: $T(t) < \delta$. (82)

Tomando:

$$t' > t \geq t_0$$

tenemos:

$$\left| \int_t^{t'} a(\tau) \cdot e^{-iy \cdot \lambda(\tau)} \cdot d\tau \right| = \left| J(t', iy) - J(t, iy) \right| \leq T(t') + T(t) \tag{83}$$

Según (82) y (83):

$$\left| \int_t^{t'} a(\tau) \cdot e^{-i \cdot y \cdot \lambda(\tau)} \cdot d\tau \right| < 2\delta$$

para $t' > t \geq t_0$ y para *todo* y *del intervalo* $-\infty < y < +\infty$; es decir, la integral (6) converge uniformemente para $x = o$, por lo tanto es:

$$C_2 \leq o \tag{84}$$

contra la hipótesis:

$$C_2 > o .$$

Como es: $T(t) \geq o$

debe, necesariamente, verificarse:

$$\overline{\lim_{t \to \infty}} T(t) \geq o$$

pero el caso de igualdad no puede presentarse, pues de lo contrario se verificaría (84) contra lo supuesto; luego es:

$$\overline{\lim_{t \to \infty}} \; T(t) > o \tag{85}$$

por lo tanto, el límite superior del logaritmo de $T(t)$ no puede ser $-\infty$, luego: si L es finito, debe, necesariamente, ser:

$$L \geq o.$$

Probemos que la integral (6) converge uniformemente para:

$$R(z) \equiv x \geq L + \delta .$$

Según la definición de L, para: $t > t_0 \equiv t_0(\delta)$ es:

$$T(t) < e^{\lambda(t) \cdot (L + \frac{\delta}{2})} \quad ; \tag{86}$$

siempre que sea:

$$\lambda(t) > o$$

cosa siempre cierta, a partr de un t suficientemente grande.

Por otra parte se tiene:

$$\left| \int_t^{t'} a(\tau) \cdot e^{-z \cdot \lambda(\tau)} \cdot d\tau \right| \leq \left| J(t', iy) \cdot e^{-x \cdot \lambda(t')} \right| +$$

$$+ \left| J(t, iy) \cdot e^{-x \cdot \lambda(t)} \right| + \int_t^{t'} | J(\tau, iy) | \cdot \left| d\, e^{-x \cdot \lambda(\tau)} \right| \tag{87}$$

Además por definición de T (t) se verifican:

$$| J(t', iy) | \leq T(t') \tag{88}$$

$$| J(t, iy) | \leq T(t) \tag{89}$$

Según (89) es:

$$\int_t^{t'} | J(\tau, iy) | \cdot \left| d\, e^{-x \cdot \lambda(\tau)} \right| \leq \int_t^{t'} T(\tau) \cdot \left| d\, e^{-x \cdot \lambda(\tau)} \right| \tag{90}$$

De (87), (88), (89) y (90) se infiere que:

$$\left| \int_t^{t'} a(\tau) \cdot e^{-z\lambda(\tau)} \cdot d\tau \right| \leq T(t') \cdot e^{-x.\lambda(t')} + T(t) \cdot e^{-x.\lambda(t)} +$$

$$+ \int_t^{t'} T(\tau) \cdot \left| d\, e^{-x \cdot \lambda(\tau)} \right| \qquad (91)$$

Teniendo en cuenta (86) y (91), para todo z perteneciente al semiplano: $x \geqq L + \delta$, es:

$$\left| \int_t^{t'} a(\tau) \cdot e^{-z \cdot \lambda(\tau)} . d\tau \right| < 2 . e^{-\frac{\delta}{2} \cdot \lambda(t)} +$$

$$+ \int_t^{t'} e^{\lambda(\tau) \cdot \left(L + \frac{\delta}{2}\right)} \cdot \left| d\, e^{-x \cdot \lambda(\tau)} \right| \qquad (92)$$

además:

$$e^{\lambda(\tau) \cdot \left(L + \frac{\delta}{2}\right)} \cdot \left| d\, e^{-x \cdot \lambda(\tau)} \right| = \left| \frac{x}{x - L - \frac{\delta}{2}} \right| \cdot$$

$$\cdot\, e^{-\lambda(\tau) \cdot \left(x - L - \frac{\delta}{2}\right)} \cdot d\left[\left(x - L - \frac{\delta}{2}\right) \cdot \lambda(\tau) \right] \qquad (93)$$

(pues es: $d\,\lambda(t) \geq o$, y : $x - L - \frac{\delta}{2} \geq L + \delta - L - \frac{\delta}{2} = \frac{\delta}{2} > o$).

Por otra parte:

$$\left| \frac{x}{x - L - \frac{\delta}{2}} \right| = \left| 1 + \frac{L + \frac{\delta}{2}}{x - L - \frac{\delta}{2}} \right| \leq 1 + \frac{|2L + \delta|}{\delta} =$$

$$= 1 + \frac{2L + \delta}{\delta} = \frac{2(L + \delta)}{\delta} \tag{94}$$

Según (93) se verifica:

$$\int_t^{t'} e^{\lambda(\tau) \cdot \left(L + \frac{\delta}{2} \right)} \cdot \left| d\, e^{-x \, . \, \lambda(\tau)} \right| =$$

$$= \left| \frac{x}{x - L - \frac{\delta}{2}} \right| \cdot \left\{ e^{-\lambda(t) \cdot (x - L - \frac{\delta}{2})} - e^{-\lambda(t') \, . \, (x - L - \frac{\delta}{2})} \right\} \tag{95}$$

Según (94) y (95) es:

$$\int_t^{t'} e^{\lambda(\tau) \, . \, (L + \frac{\delta}{2})} \cdot \left| d e^{-x \, . \, \lambda(\tau)} \right| < \frac{2}{\delta} \, . \, (L + \delta) \, . \, e^{-\lambda(t) \cdot \frac{\delta}{2}} \tag{96}$$

De (92) y (96) se deduce:

$$\left| \int_t^{t'} a(\tau) \, . \, e^{-z \, . \, \lambda(\tau)} \, . \, d\tau \right| < \frac{2}{\delta} \, . \, (2\delta + L) \, . \, e^{-\lambda(t) \cdot \frac{\delta}{2}} \tag{97}$$

Ahora bien, por ser:

$$\lim_{t \to \infty} \lambda(t) = +\infty$$

(por definición), dado un $\epsilon > o$ arbitrario, existe un valor:

$$t_1 \equiv t_1 (\epsilon)$$

(que podemos suponer: $t_1 > t_0$) *independiente* de x, de y y de t', tal que para:

$$t \geq t_1$$

es:

$$\lambda (t) > \frac{2}{\delta} \cdot \log \frac{2 (2 \delta + L)}{\epsilon \cdot \delta} \tag{98}$$

De (97) y (98) se deduce que: cualesquiera sean los valores de z, pertenecientes al semiplano $R(z) \equiv x \geqslant L + \delta$, y los valores de t' y t, tales que $t' > t \geq t_1 \geqslant t_0$, se verifica:

$$\left| \int_t^{t'} a(\tau) \cdot e^{-z \cdot \lambda(\tau)} \cdot d\tau \right| < \epsilon$$

es decir: la integral (6) converge *uniformemente* en el semiplano:

$$R(z) \equiv x \geqslant L + \delta \ ;$$

es decir:

$$C_2 \leq L \ . \tag{99}$$

Probaremos ahora que: si la integral (6) converge *uniformemente* en el semiplano:

$$R(z) \equiv x \geqslant x_0 > o \ ;$$

dado arbitrariamente un δ *positivo*, existe un:

$$t_0 \equiv t_0 (\delta)$$

tal que para:

$$t \geqslant t_0 \equiv t_0 (\delta)$$

es:

$$\frac{\log T(t)}{\lambda(t)} \leq x_0 + \delta$$

es decir; que será:

$$L \leq C_2 \tag{100}$$

En efecto, si la integral (6) converge uniformemente en el semiplano:

$$x \geqslant x_0 > o$$

existe un t_2 *fijo*, tal que para todo:

$$t \geqslant t_2$$

y cualquiera que sea $y \equiv$ parte imaginaria de z, es:

$$\left| \int_{t^2}^{t} a(\tau) \cdot e^{-(x_0 + i\, y) \cdot \lambda(\tau)} \cdot d\tau \right| < 1 . \qquad (101)$$

Según (101) y la definición de J (t, z) se tiene:

$$\left| J(t, x_0 + i\, y) \right| < 1 + \int_0^{t_2} \left| a(\tau) \right| \cdot d\tau \qquad (102)$$

Como t_2 es finito y la integral del segundo miembro de (102) también es finita (por definición), el número *J*, definido así:

$$J \equiv 1 + \int_0^{t_2} \left| a(\tau) \right| \cdot d\tau$$

y la (102) se escribirá:

$$\left| J(t, x_0 + i\, y) \right| < J \equiv \text{número fijo}; \qquad (103)$$

para:

$$t \geqslant t_2 \equiv t_2\,(1) .$$

Si fuese:

$$t \leq t_2 \qquad (104)$$

se tiene:

$$\left| J(t, x_0 + i\, y) \right| \leq \left| \int_0^{t} \left| a(\tau) \right| \cdot e^{-x_0 \cdot \lambda(o)} \cdot d\tau \leqslant \int_0^{t_2} \left| a(\tau) \right| \cdot d\tau$$

lo que nos dice que para los valores de t que satisfacen a (104), y para todo y, también se verifica (103).

Según la definición de J (t, z), se tiene:

$$e^{x_0 \, . \, \lambda(t)} \, . \, d\,J\,(t, x_0 + i\,y) = a\,(t)\,.\, e^{-i.y\lambda\,(t)} \, . \, dt \qquad (105)$$

Mediante integración por partes ,teniendo presente que $x_0 \, . \, \lambda\,(t)$ es real, de (103) y (105) se deduce que:

$$\left| J\,(t, i\,y) \right| < 2\,.\,J\,.\,e^{x_0 \, . \, \lambda(t)} \qquad (106)$$

Pero:

$$\lim_{t \to \infty} \frac{2\,.\,J}{e^{\delta \, . \, \lambda(t)}} = o$$

luego: dado arbitrariamente un $\delta > o$ existe un $t_0 \equiv t_0(\delta) \geqq t_2$, tal que para $t \geqq t_2$ es:

$$2\,.\,J\,.\,e^{x_0 \, . \, \lambda(t)} < e^{(x_0 + \delta) \, . \, \lambda(t)} \qquad (107)$$

Según (106) y (107) para:

$$t \geqq t_0 \equiv t_0\,(\delta) \geqq t_2 \geqq o$$

es

$$J\,(t, i\,y) < e^{(x_0 + \delta) \, . \, \lambda\,(t)}$$

de donde:

$$T\,(t) \leqq e^{(x_0 + \delta) \, . \, \lambda\,(t)} \qquad (108)$$

según la misma definición de T (t).

Según (108) se tiene:

$$\overline{\lim_{t \to \infty}} \frac{\log T\,(t)}{\lambda\,(t)} \leqq x_0 + \delta$$

es decir, se verifica la (100).

Comparando (99) y (100), se tiene:

$$C_2 = L$$

lo que demuestra el teorema 6.°).

Como dijimos más arriba los teoremas 3°.), 4°.) y 5°.) se prueban por procedimientos similares al 6°.): huelga, por lo tanto, detallar dichas demostraciones.

Demostración del teorema 7°.).

Sin restringir la generalidad supondremos que $\lambda(t)$ es derivable. (1).

Pongamos:

$$P(t, z) \equiv \int_0^t a(\tau) \cdot e^{\varphi[\lambda(\tau)] - z \cdot \lambda(\tau)} \cdot d\tau$$

Como hemos dicho más arriba, $T(t)$, en este teorema designa el extremo superior de la función:

$$P(t, iy) \cdot e^{-\varphi[\lambda(t)]}$$

en el intervalo:

$$-\infty < y < +\infty .$$

Pongamos además:

$$L \equiv \overline{\lim_{t \to \infty}} \cdot \frac{\log T(t)}{\lambda(t)}$$

y supongamos que L sea finito.

Sea δ un número positivo arbitrario; demostraremos que la integral (6) converge uniformemente en el semiplano:

$$R(z) \equiv x \geqslant L + \delta$$

(1) Téngase en cuenta, con respecto a esta hipótesis, lo dicho al comienzo de la demostración del teorema 2°.).

Para todo $\delta > o$, existe un:

$$t_0 = t_0 (\delta) \geqq o$$

tal que para:

$$t \geqq t_0$$

es:

$$\frac{\log T(t)}{\lambda(t)} < L + \frac{\delta}{2} \tag{109}$$

y como siempre se puede suponer que para todo t es:

$$\lambda(t) > o$$

según (109) es:

$$T(t) < e^{\left(L + \frac{\delta}{2}\right) \cdot \lambda(t)} \tag{110}$$

Según las definiciones de $P(t, z)$ y de $T(t)$ es:

$$|P(t, iy)| \leqq T(t) \cdot e^{\varphi[\lambda(t)]} \tag{111}$$

para todo $t > o$ y para todo y del intervalo $-\infty < y < +\infty$.

De (110) y (111) se tiene:

$$|P(t, iy)| < e^{\varphi[\lambda(t)] + \left(L + \frac{\delta}{2}\right) \cdot \lambda(t)} \tag{112}$$

para $t \geqq t_0$ y para *todo y real*.

Por hipótesis, es:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\varphi(x)}{x} = + \infty$$

y por ser:

$$\lim_{t \to \infty} \lambda(t) = + \infty$$

se tiene que:

$$\lim_{t \to \infty} . \frac{\varphi[\lambda(t)]}{\lambda(t)} = +\infty$$

de donde:

$$\lim_{t \to \infty} \left\{ \frac{\varphi[\lambda(t)]}{\lambda(t)} + L \right\} = +\infty \tag{113}$$

Según (113), existe un valor de t, que podemos suponer igual a t_0, tal que a partir de él es:

$$\frac{\varphi[\lambda(t)]}{\lambda(t)} + L > o$$

de donde:

$$\varphi[\lambda(t)] + L . \lambda(t) > o . \tag{114}$$

En el semiplano $x \geqslant L + \delta$, según (114) es:

$$\varphi[\lambda(t)] + x . \lambda(t) > o \tag{115}$$

Tomemos un par arbitrario de valores de t, tales que:

$$t' > t > t_0 \equiv t_0(\delta) \geqslant o;$$

teniendo en cuenta la definición de $P(t, x)$, de (112) se llega a:

$$\left| \int_t^{t'} a(\tau) . e^{-z . \lambda(\tau)} . d\tau \right| < e^{\lambda(t') . \left(L + \frac{\delta}{2} - x\right)} + e^{\lambda(t) . \left(L + \frac{\delta}{2} - x\right)} +$$

$$+ \int_t^{t'} e^{\varphi[\lambda(t)] + \lambda(t) \cdot \left(L + \frac{\delta}{2}\right)} . \left| d e^{-\varphi[\lambda(\tau)] - x . \lambda(\tau)} \right| \tag{116}$$

Según la condición a) es:

$$\frac{\varphi(a)}{a} > x \tag{117}$$

y: $$\frac{d\,\varphi(\alpha)}{d\,\alpha} + x > o \tag{118}$$

para α suficientemente grande $\left(\alpha \geqslant \alpha_0 \equiv \alpha_0\,(x) > o\right)$. Según (115) o (117) la función:

$$\varphi[\lambda(t)] + x\,.\,\lambda\,(t) \tag{119}$$

es positiva para $t \geqslant t_0$, y según (118) la función (119) es monótona creciente con t, a partir de un cierto valor de t, que podemos suponer igual a t_0 $\left(\text{entonces es: } t_0 \equiv t_0\ (\delta, x)\right)$; por lo tanto, según (116):

$$\left|\int_t^{t'} a(\tau)\,.\,e^{-z\,.\,\lambda(\tau)}\,.\,d\tau\right| < 2\,.\,e^{-\frac{\delta}{2}\cdot\lambda(t)} +$$

$$+\int_t e^{-\lambda(\tau).\left(x-L-\frac{\delta}{2}\right)}\cdot D\,\lambda\,(\tau)\cdot\left[D\,\varphi[\lambda(\tau)]+x\right]\cdot d\tau \tag{120}$$

teniendo, además, en cuenta que:

$$t' > t$$

y:

$$x - L - \frac{\delta}{2} \geqslant \frac{\delta}{2} > o\,.$$

Puesto que la función sub-integral del segundo miembro de (120) no es negativa, se tiene:

$$\int_t^{t'} e^{-\lambda(\tau)\cdot\left(x-L-\frac{\delta}{2}\right)}\cdot D\,\lambda(\tau)\cdot\left[D\,\varphi\,[\lambda(\tau)]+x\right]\cdot d\tau \leq$$

$$\leq \int_t^{\infty} e^{-\lambda(\tau)\cdot\left(x - L - \frac{\delta}{2}\right)} \cdot D\lambda(\tau) \cdot \left[D\varphi[\lambda(\tau)] + x \right] \cdot d\tau = - \frac{x}{x - L - \frac{\delta}{2}} \cdot$$

$$\cdot\, e^{-\lambda(t)\cdot\left(x - L - \frac{\delta}{2}\right)} + \int_t^{\infty} e^{-\lambda(\tau)\cdot\left(x - L - \frac{\delta}{2}\right)} \cdot D\lambda(\tau) \cdot D\varphi[\lambda(\tau)] d\tau \equiv A_1 + A_2 \tag{121}$$

Llamamos A la integral del segundo miembro de (120), pero tomada entre los límites o y ∞, luego según (121) es:

$$A = A_1 + A_2 \tag{122}$$

Por ser:

$$\left| \frac{x}{x - L - \frac{\delta}{2}} \right| = \left| 1 + \frac{L + \frac{\delta}{2}}{x - (L + \frac{\delta}{2})} \right| < 1 + \frac{|2L + \delta|}{\delta} \tag{123}$$

es según (123):

$$|A_1| < \left\{ 1 + \frac{|2L + \delta|}{\delta} \right\} . e^{-\frac{\delta}{2} . \lambda(t)} \tag{124}$$

Según la condición b) es:

$$\lim_{\alpha \to +\infty} \frac{D\varphi(\alpha)}{\alpha^k} = o$$

para *algún k positivo;* dado un valor positivo arbitrario ϵ, existe un cierto valor de t, que podemos suponer igual a t_0 (entonces es: $t_0 \equiv t_0\,(\delta, x, \epsilon) \geqslant o$) a partir del cual es:

$$|\,D\,[\lambda(t)]\,| < \varepsilon\,.\,\overline{\lambda}\,(t)^{k} \qquad (125)$$

De la condición a) y según (125) se infiere:

$$o < D\,\varphi[\lambda(t)\,] < \epsilon\,.\,\overline{\lambda}\,(t)^{k} \qquad (126)$$

Pongamos:

$$\theta \equiv \left(x - L - \frac{\delta}{2}\right)\,.\,\lambda\,(t)\,.$$

Teniendo en cuenta (126) es:

$$A_2 < \frac{\epsilon}{x - L - \frac{\delta}{2}}\,.\int_{\theta_1}^{\infty} e^{-\theta}\,.\,\theta^{k}\,.\left(x - L - \frac{\delta}{2}\right)^{-k}.\,d\,\theta \qquad (127)$$

siendo θ_1 el valor de θ que corresponde al valor de τ igual a t.

De (127) se obtiene:

$$A_2 < \epsilon\,.\left(\frac{2}{\delta}\right)^{k+1}.\,k! \qquad (128)$$

De (120), (121), (122), (124) y (128) se obtiene:

$$\left|\int_{t}^{t'} a(\tau)\cdot e^{-z\cdot\lambda(\tau)}\cdot d\tau\right| < \varepsilon.k!\cdot\left(\frac{2}{\delta}\right)^{k+1} + \left[3 + \frac{|\,2\,L+\delta\,|}{\delta}\right]\cdot e^{-\lambda(t)\cdot\frac{\delta}{2}} \qquad (129)$$

El segundo miembro de (129) es independiente de z; por ser:

$$\left[3 + \frac{|2L + \delta|}{\delta}\right] \cdot e^{-\lambda(t)\cdot\frac{\delta}{2}} \to o \text{ , para } t \to \infty$$

y:

$$\epsilon \cdot k! \left(\frac{2}{\delta}\right)^{k+1} \to o \text{, para } \epsilon \to o,$$

se deduce que la expresión:

$$\left| \int_t^{t'} a(\tau) \cdot e^{-z \cdot \lambda(\tau)} \cdot dt \right|$$

tiende *uniformemente a cero* en el semiplano $x \geqslant L + \delta$; es decir, hemos probado:

$$C_2 \leq L \qquad (130)$$

Probemos ahora que:

$$C_2 \geq L \qquad (131)$$

Ante todo, recordemos que en la demostración del teorema 6º.) vimos que: si la integral (6) converge uniformemente en el semiplano:

$$R(z) \equiv x > x_0$$

se verifica:

$$| J(t, x_0 + i y) | < J \equiv$$ constante independientemente de z. (103).

Ahora bien, podemos escribir:

$$\left|P(t, i y)\right| \equiv \left| \int_0^t e^{q[\lambda(\tau)] + x_0 \cdot \lambda(\tau)} \cdot d J(t, x_0 + i y)\right| \qquad (132)$$

Según (103) y (132):

$$\left|P(t, iy)\right| < J . e^{\varphi[\lambda(t)] + x_0 \cdot \lambda(t)} + J . \int_0^t \left| d\, e^{\varphi[\lambda(t)] + x_0 \cdot \lambda(t)} \right| \tag{133}$$

De la condición a) se deduce:

$$\varphi[\lambda(t)] + x_0 . \lambda(t) > o \tag{134}$$

a partir de un $t_0 \equiv t_0(x_0) \geqslant o$; y además las dos siguientes relaciones:

$$\frac{d\left\{\varphi[\lambda(t)] + x_0 . \lambda(t)\right\}}{d\lambda(t)} > o$$

$$\frac{\varphi[\lambda(t)]}{\lambda(t)} + x_0 \rightarrow +\infty ;$$

es decir: la función (134) es, a partir de t_0, positiva, monótona creciente y converge a $+\infty$. Por lo tanto:

$$\int_0^t \left| de^{\varphi[\lambda(\tau)] + x_0 \cdot \lambda(\tau)} \right| < e^{\varphi[\lambda(t)] + x_0 \cdot \lambda(t)} + \int_0^{t_0} \left| de^{\varphi[\lambda(\tau)] + x_0 \cdot \lambda(\tau)} \right| \tag{135}$$

Como la integral del segundo miembro de (135) tiene un valor finito (por ser t_0 fijo) y el límite de:

$$e^{\varphi[\lambda(t)] + x_0 \cdot \lambda(t)}$$

es $+\infty$, para $t \rightarrow \infty$, tomando t_0 suficientemente grande pero fijo se verifica:

$$\int_0^{t_0} \left| de^{\varphi[\lambda(\tau)] + x_0 \cdot \lambda(\tau)} \right| < e^{\varphi[\lambda(t)] + x_0 \cdot \lambda(t)} \tag{136}$$

Según (133), (135) y (136) es:

$$\left| P(t, i\,y) \right| < 3 \,.\, J \,.\, e^{\varphi[\lambda(t)] + x_0 \cdot \lambda(t)} \tag{137}$$

Sea un número arbitrario positivo δ; puesto que el límite del cociente del segundo miembro de (137) por la función:

$$e^{\varphi[\lambda(t)] + (x_0 + \delta) \,.\, \lambda(t)}$$

es cero, para $t \to +\infty$; a partir de un valor fijo de t suficientemente grande es:

$$\left| P(t, i\,y) \right| < e^{\varphi[\lambda(t)] + (x_0 + \delta) \,.\, \lambda(t)}$$

de donde:

$$\left| P(t, i\,y) \,.\, e^{-\varphi[\lambda(t)]} \right| < e^{(x_0 + \delta) \,.\, \lambda(t)} \tag{138}$$

De acuerdo con la definición de T (t), la (138) conduce a:

$$T(t) \leq e^{(x_0 + \delta) \,.\, \lambda(t)}$$

de donde:

$$\frac{\log T(t)}{\lambda(t)} \leq x_0 + \delta$$

y de ésta: $L \leq x_0 + \delta$

o sea: $$L \leq C_2 \tag{131}$$

De la coexistencia de (130) y (131) se infiere:

$$C_2 = L$$

igualdad que demuestra el teorema 7º.), recordando el significado del número *L*.

Según la fórmula (establecida en la introducción):

$$C \leq C_2 \leq C_1$$

si es: $$C = C_1$$
se verifican necesariamente que:
$$C = C_2 \tag{139}$$
y:
$$C_1 = C_2 \tag{140}$$
pero se puede probar, mediante ejemplos, lo siguiente: la realización de (139) no implica, necesariamente, la realización de (140), y viceversa.

Por lo tanto, cada uno de los teoremas 14º.), 15º.), 16º.), 17º.), 18º.), 19º.) y 20º.) constituye una condición suficiente, pero no necesaria para la verificación simultánea de (139) y (140).

Ahora bien, se plantea un doble problema:

a) obtener condiciones suficientes (aunque no sean necesarias) para que se verifiquen:

y: $$\left.\begin{array}{l} C = C_2 \\ C_2 < C_1 \end{array}\right\}$$

b) obtener condiciones suficientes (aunque no sean necesarias) para que se verifiquen:

y: $$\left.\begin{array}{l} C < C_2 \\ C_2 = C_1 \end{array}\right\}$$

La solución de este doble problema será tema de otro trabajo, puesto que ella se basa principalmente en la "teoría de las singularidades". De inmediato se comprende que este problema es mucho más difícil que averiguar condiciones suficientes (aunque no necesarias) para asegurar la igualdad de las abscisas de convergencia simple y absoluta, basta con tener en cuenta, por un lado, la *similitud* de las fórmulas, que hemos dado, para el cálculo de C y de C_1; y por otro lado, la *falta de analogía* entre tales fórmulas y las establecidas en los teoremas 6º.) y 7º.) para el cálculo de C_2. Nótese además que: las fórmulas (14), (14′), (15), 15′), (16), (16′), (17) y (17′) implican un *doble paso al límite* (*sucesivo*); mientras que las fórmulas (7), (7′), (8), (8′), (9), (9′), (10) y (10′) implican un *solo paso al límite.*

(Continuará)