AÑO 25. Nº 3-4 MAYO-JUNIO 1938

Sobre las integrales determinantes ordinarias y generalizadas

POR

Carlos Biggeri (Buenos Aires)

(Continuación)

TERCERA PARTE

Demostración del teorema 9º.).

Según la condición b) el logaritmo del módulo de f (z) es:

$$\log |f(x+iy)| = k + \int_0^\infty b(t) \cdot e^{-\mu(t) \cdot x} \cdot \cos[y \cdot \mu(t)] \cdot dt \qquad (141)$$

de donde:

$$\log |f(x+2iy)| = k + \int_0^\infty b(t) \cdot e^{-\mu(t)x} \cdot \cos[2y \cdot \mu(t)] \cdot dt \qquad (142)$$

y:

$$\log |f(x)| = \log f(x) = k + \int_0^\infty b(t) \cdot e^{-\mu(t)x} \cdot dt \qquad (143)$$

De (141), (142) y (143) se deduce:

$$\log \left\{ |f(x+iy)|^4 \cdot |f(x+2iy)| \cdot |f(x)| \right\} =$$

$$= 8k + \int_0^\infty b(t) \cdot e^{-\mu(t)x} \cdot \Big[3 + 4 \cdot \cos[y \cdot \mu(t)] + \cos[2y \cdot \mu(t)]\Big] \cdot dt \qquad (144)$$

Ahora bien, fácilmente se ve que:

$$3+4.\cos[y.\mu(t)]+\cos[2y.\mu(t)]\equiv 2.\Big[\cos[y.\mu(t)]+1\Big]^2\geq o \quad (145)$$

Según (144) y (145) se tiene:

$$\Big|f(x+iy)\Big|^4\cdot\Big|f(x+2iy)\Big|\cdot\Big|f(x)\Big|^3\geq e^{8k}$$

de donde:

$$\Big|f(x+iy)\Big|\geq\frac{e^{2k}}{|f(x)|^{3/4}.|f(x+2iy)|^{1/4}} \quad (146)$$

Tomando x en el semiplano:

$$R\ (z)\equiv x>C$$

según (146) será:

$$\frac{|f(x+iy)|}{x-C}>\frac{e^{2k}}{|(x-C).f(x)|^{3/4}}\cdot\frac{1}{|(x-\alpha).f(x+2iy)|^{1/4}} \quad (147)$$

Según la condición d) es:

$$o\leq(x-C)\ .\ f\ (x)<K\equiv\text{constante} \quad (148)$$

en un semientorno a la derecha del punto:

$$x=C$$

sobre el eje real; luego, según (147) y (148):

$$\frac{|f(x+iy)|}{x-C}>K_1.\frac{1}{|x-C|^{1/4}.|f(x+2iy)|^{1/4}} \quad (149)$$

poniendo:

$$K_1\equiv e^{2k}.K^{-3/4}\equiv\text{constante.}$$

En virtud de la segunda parte de la condición c), todos los puntos de la recta de convergencia de la integral (6) son regulares para $f\ (z)$, salvo el punto: $z=C$; luego si es $y\pm o$, se tiene:

$$\lim_{x \to C} f\,(x + 2\,i\,y) = f\,(C + 2\,i\,y) \equiv o|o$$

de donde:

$$\lim_{x \to C} \left\{ \left| x - C \right|^{1/4} . \left| f\,(x + 2\,i\,y) \right|^{1/4} \right\} = 0 \tag{150}$$

Según (149) y (150) es:

$$\lim_{x \to C} \frac{\left| f\,(x + i\,y) \right|}{x - C} = \infty \tag{151}$$

siempre que sea:

$$y \pm o.$$

Tomemos un punto:

$$z_0 = C + i\,y$$

cualquiera sobre la recta de convergencia ,salvo el:

$$z = C\ ;$$

como en z_0 la función f (z) es regular, se tiene:

$$f\,(z) = \sum_{n=o}^{\infty} (z - z_0)^{n} . \frac{f^{(n)}_{(z_0)}}{n!}$$

de donde:

$$f\,(x + i\,y) = f\,(C + i\,y) + \sum_{n=1}^{\infty} (x - C)^{n} . \frac{f^{(n)}_{(z_0)}}{n!} \tag{152}$$

Según (151) y (152) es:

$$\lim_{x \to C} \frac{f\,(C + i\,y)}{x - C} = \infty\ , \text{ para todo } y \pm o, \tag{153}$$

pues:

$$\lim_{x \to C} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} (x - C)^{n} . \frac{f^{(n)}_{(z_0)}}{n!} \right\} = f'\,(z_0) \equiv \text{ finito}.$$

De (153) se infiere:

$$f\,(C + i\,y) \pm o, \text{ para todo } y \pm o, \tag{154}$$

pues, si para algún $y \pm o$, fuese:

$$f\,(C + i\,y) = o$$

sería:

$$\lim_{x \to C} \frac{f\,(C + i\,y)}{x - C} = o\,,$$

igualdad que contradice a la (153).

La desigualdad, en sentido estricto, (154), prueba el teorema 9º.).

Demostración del teorema 10º.).

Llamemos $\gamma_1\,(z)$ y $\gamma_2\,(z)$ a las partes real e imaginaria, respectivamente, de $\gamma\,(z)$. Con tal notación se tiene:

$$\log f\,(z) = \left\{ \gamma_1\,(z) + \int_0^\infty b(t)\,.\,e^{-\mu\,(t)\,.\,x}\,.\cos\left[\,y\,.\,\mu\,(t)\,\right].\,dt \right\} +$$

$$+ i\,.\left\{ \gamma_2\,(z) + \int_0^\infty b\,(t)\,.\,e^{-\mu\,(t)\,x}\,.\operatorname{sen}\left[\,y\,.\,\mu\,(t)\right]\,.\,dt \right\}$$

de donde, se obtiene sucesivamente:

$$\log \left| f(x+iy) \right| = \gamma_1(x+iy) + \int_0^\infty b(t)\,.\,e^{-\mu\,(t)\,x}\,.\cos\,[y\,.\,\mu\,(t)]\,.\,dt \tag{155}$$

$$\log \left| f(x+2\,iy) \right| = \gamma_1(x+2iy) + \int_0^\infty b(t)\,.\,e^{-\mu\,(t)\,x}\,.\cos\,[2\,.\,y\,.\,\mu\,(t)]\,.\,dt \tag{156}$$

$$\log \left| f\,(x) \right| = \gamma_1(x) + \int_0^\infty b\,(t)\,.\,e^{-\mu\,(t)\,x}\,.\,dt \tag{157}$$

Según (155), (156) y (157), se tiene:

$$\log \left\{ \left| f(x+iy) \right|^4 . \left| f(x+2iy) \right| . \left| f(x) \right|^3 \right\} =$$

$$= 4 . \gamma_1(x+iy) + \gamma_1(x+2iy) + 3\gamma_1(x) + \int_0^\infty b(t) . e^{-\mu(t)\, x} .$$

$$. \left[3 + 4 \cos[y . \mu(t)] + \cos[2y . \mu(t)] \right] dt \qquad (158)$$

De (145) y (158) se deduce:

$$\log \left\{ \left| f(x+iy) \right|^4 . \left| f(x+2iy) \right| . \left| f(x) \right|^3 \right\} \geq$$

$$\geq 4 . \gamma_1(x+iy) + \gamma_1(x+2iy) + 3 . \gamma_1(x) \qquad (159)$$

Según la hipótesis c), el segundo miembro de (159) se mantiene superior a una cierta constante k, luego:

$$\left| f(x+iy) \right|^4 . \left| f(x+2iy) \right| . \left| f(x) \right|^3 \geq e^k = k_1 = \text{constante} \qquad (160)$$

~~Puesto que es:~~

$$x > C$$

de (160) se obtiene:

$$\frac{|f(x+iy)|}{x - C} > \frac{k_1}{(x-C) . |f(x)|^{3/4} . |f(x+2iy)|^{1/4}} \qquad (161)$$

Según la hipótesis b), en todo un cierto semientorno lateral a la derecha, sobre el eje real, del punto:

$$z = C$$

es:

$$0 \leq (x - C) . |f(x)| < K = \text{constante} \qquad (162)$$

luego, en tal semientorno, según (161) y (162) es:

$$\frac{|f(x+iy)|}{x - C} > \frac{K_1}{\left[(x - C) . |f(x+2iy)| \right]^{1/4}} \qquad (163)$$

siendo:

$$K_1 = \frac{k_1}{K^{3/4}} = \text{constante}$$

Según la condición a) para todo $y \pm o$, el punto $x + 2iy$ es *regular* para f (z), luego:

$$\lim_{x \to C} \left\{ (x - C) \,.\, |\, f(x + 2iy) \,| \right\} = 0 \qquad (164)$$

De (163) y (164) se deduce:

$$\lim_{x \to C} \frac{|\, f(x + iy) \,|}{x - C} = \infty, \text{ para todo } y \pm o, \qquad (165)$$

Por otra parte, es:

$$\frac{f(x + iy)}{x - C} = \frac{f(C + iy)}{x - C} + f'(z_0) + \sum_{n=1}^{\infty} (x - C)^n \,.\, \frac{f^{(n+1)}_{(z_0)}}{(n+1)\,!} \qquad (166)$$

y además:

$$\lim_{x \to C} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} (x - C)^n \,.\, \frac{f^{(n+1)}_{(z_0)}}{(n+1)\,!} \right\} = o \qquad (167)$$

Ahora bien si fuese:

$$f(C + iy) = o$$

para *algún* $y \pm o$, de (166) y (167) se deduciría:

$$\lim_{x \to C} \frac{|\, f(x + iy) \,|}{x - C} = f'(z_0) = \text{finito}$$

lo que contradice a (165). Por consiguiente, para *todo* $y \pm o$ se verifica:

$$f(C + iy) \pm o;$$

lo que demuestra el teorema 10º.).

(Continuará)