AÑO 1. Nº2. SEPTIEMBRE DE 1914

UN PROBLEMA DE GEODESIA

DETERMINACIÓN DEL AZIMUT POR LA OBSERVACIÓN DE LA ALTURA DE UN ASTRO.

I. — *Consideraciones generales y fórmulas fundamentales.*

La falta de claridad y de precisión matemática con que tratan los autores este punto tan importante de la Geodesia, y las continuas confusiones a que da lugar, sobre todo en los principiantes o profesionales poco prácticos, nos ha inducido a abordar este estudio con la amplitud y extensión que su importancia requiere.

Tratándose de una fórmula matemática, su aplicación no debe dejar lugar a la más mínima duda, y su generalidad debe ser absoluta, de manera que pueda extenderse a todos los casos posibles, sin otra restricción que la que resulta de la naturaleza misma de las cantidades que la constituyen.

A fin de proceder con método y dejar bien establecidas las fórmulas, tomaremos como punto de partida el triángulo de posición, haciendo sobre él todas las combinaciones de signos posibles.

Siguiendo la nomenclatura general designaremos por h la altura del astro, por δ su declinación, y por φ la latitud del lugar de observación: h es siempre positivo, pero δ y φ pueden ser indistintamente positivos o negativos. Bajo este supuesto tenemos los siguientes casos:

1°. — h, δ y φ positivos;

2°. — h y φ positivos y δ negativo;

3°. — h y δ " y φ " ;

4°. — h positivo y δ y φ negativos;

a que dan lugar todas las combinaciones de signos posibles. Los examinaremos por su órden.

Primer caso.

h, δ y φ positivos.

Es el general que traen y demuestran todos los autores.

En la esfera celeste representada en fig. 1, P_n es el polo norte, P_s el polo sud, E_1 E' el escuador, H_s el punto sud de. horizonte, H_n el punto norte, Z el zenit, y S el astro de altura $SD = h$ y de declinación $SB = \delta$.

En el triángulo de posición P_n Z S, tenemos:

$$\cos(90°-\delta) = \cos(90°-h)\cos(90°-\varphi) + \operatorname{sen}(90°-h)\operatorname{sen}(90°-\varphi)\cos A'$$

$$\text{o} \quad \operatorname{sen}\delta = \operatorname{sen} h \operatorname{sen}\varphi + \cos h \cos\varphi \operatorname{con} A' \qquad (2)$$

siendo A' medido por el arco de horizonte H_n E D, o sea el azimut del astro referido al punto norte del horizonte.

Si como se hace generalmente contamos el azimut desde el punto sud por el oeste hacia el norte, estará en este caso representado por el arco H_s O H_n E D $= A$, y tenemos evidentemente:

$$A = 180° + A'$$

$$\text{o} \quad A' = A - 180°$$

de donde $\cos A' = -\cos A$

y reemplazando en (2) resulta,

$$\text{sen}\,\delta = \text{sen h sen}\,\varphi - \cos \text{h} \cos\varphi \cos \text{A} \qquad (1)$$

que es la fórmula cuya generalidad vamos a demostrar.

Segundo caso

h y φ positivos, pero δ negativo.

Reproduzcamos la fig 1, a excepción de la posición del astro que debe estar al sud del ecuador para que la declinación B S sea negativa.

Haciendo $-\delta = \delta'$, tenemos en fig. 2 :

$$\cos(90^\circ + \delta') = \text{sen h sen}\,\varphi + \cos \text{h} \cos\varphi \cos \text{A}'$$

pero $\cos(90^\circ + \delta') = \cos[90^\circ + (-\delta)] = \cos(90^\circ - \delta) = \text{sen}\,\delta$

luego $\text{sen}\,\delta = \text{sen h sen}\,\varphi + \cos \text{h} \cos\varphi \cos \text{A}' \qquad (2)$

o bien $\text{sen}\,\delta = \text{sen h sen}\,\varphi - \cos \text{h} \cos\varphi \cos \text{A} \qquad (1)$

Tercer caso

h y δ positivos, y φ negativo.

Siendo en este caso la latitud negativa, el observador se encuentra en el hemisferio austral, y su polo será por consiguiente el polo sud. La figura se presenta invertida; pero refiriendo todo al polo norte y haciendo $-\varphi = \varphi'$, el triángulo de posición P_n Z S (fig. 3) nos da:

$$\cos(90^\circ - \delta) = \cos(90^\circ - \text{h}) \cos(90^\circ + \varphi') + \text{sen}(90^\circ - \text{h})\,\text{sen}(90^\circ + \varphi') \cos \text{A}'$$

pero $\cos(90°+\varphi') = \cos(90°-\varphi) = \operatorname{sen}\varphi$

y $\operatorname{sen}(90°+\varphi') = \operatorname{sen}(90°-\varphi) = \cos\varphi$

luego $\operatorname{sen}\delta = \operatorname{sen} h \operatorname{sen}\varphi + \cos h \cos\varphi \cos A'$ (2)

y como aquí es $A' + A = 180°$

tenemos por último

$$\operatorname{sen}\delta = \operatorname{sen} h \operatorname{sen}\varphi - \cos h \cos\varphi \cos A \quad (1)$$

Si quisiéramos referir todo al polo del observador, que es el polo sud, no tendríamos mas que cambiar los signos de δ y de φ que se cuentan en este caso en sentido opuesto al que se cuentan cuando se refieren al polo norte; en esta hipótesis sería φ postivo y δ negativo, y nos encontraríamos en el segundo caso estudiado.

Haciendo $-\delta = \delta'$, el triángulo de posición P_s Z S nos da:

$$\cos(90°+\delta') = \operatorname{sen} h \operatorname{sen}\varphi + \cos h \cos\varphi \cos A$$

o $\operatorname{sen}\delta = \operatorname{sen} h \operatorname{sen}\varphi + \cos h \cos\varphi \cos A$ (2)

que es la misma fórmula que hemos deducido para el caso en que el azimut se refiera al extremo de la meridiana que queda del lado del polo del observador.

Cuarto caso

h positivo, y δ y φ negativos.

La posición de la figura es la misma que en el caso anterior, pues el observador se encuentra en el hemisferio austral.

Para referirnos al polo norte, hagamos $-\delta = \delta'$ y $-\varphi = \varphi'$. El triángulo de posición P_n Z S (fig. 4) da :

$$\cos(90°+\delta') = \cos(90°-h)\cos(90°+\varphi') + \operatorname{sen}(90°-h)$$
$$\operatorname{sen}(90°+\varphi') \operatorname{sen} A'$$

pero $\cos(90°+\delta') = \cos(90°-\delta) = \operatorname{sen}\delta$

$$\cos(90°+\varphi') = \cos(90°-\varphi) = \operatorname{sen}\varphi$$

$$\operatorname{sen}(90°+\varphi') = \operatorname{sen}(90°-\varphi) = \cos\varphi$$

y como $A + A' = 180°$

tenemos finalmente :

$$\operatorname{sen}\delta = \operatorname{sen} h \operatorname{sen}\varphi - \cos h \cos\varphi \cos A \qquad (1)$$

Para el polo sud, δ y φ son positivos, y el triángulo de posición $P_s Z S$ da directamente como en el primer caso :

$$\operatorname{sen}\delta = \operatorname{sen} h \operatorname{sen}\varphi + \cos h \cos\varphi \cos A \qquad (2)$$

II. — FÓRMULAS RESULTANTES

Dos son las fórmulas que hemos deducido y cuya generalidad se ha demostrado para todas las posiciones posibles del astro y del observador.

La primera, que llamaremos general, es:

$$\operatorname{sen}\delta = \operatorname{sen} h \operatorname{sen}\varphi - \cos h \cos\varphi \cos A \qquad (1)$$

en la que A tiene su origen en el punto sud del horizonte y se cuenta hacia el oeste, norte y este; mientras que δ y φ tienen los signos que se les asigna en la convención general que rige al respecto, es decir, positivas en el hemisferio boreal y negativas en el austral.

La segunda, referida al polo del observador, es:

$$\operatorname{sen}\delta = \operatorname{sen} h \operatorname{sen}\varphi + \cos h \cos\varphi \cos A \qquad (2)$$

en la que A se cuenta en el sentido convenido, pero desde el punto cardinal del meridiano situado al mismo lado del polo del observador, es decir, desde el punto norte en el hemisferio boreal y desde el sud en el austral; mientras que δ y φ son positivos cuando están situados en el hemisferio del observador y negativos en caso contrario.

Con las restricciones indicadas, ambas fórmulas pueden emplearse indistintamente, como tendremos ocasión de comprobarlo más adelante.

III. — FÓRMULAS LOGARÍTMICAS

Transformación de la fórmula general.

Despejando cos A en (1) se obtiene:

$$\cos A = \frac{\operatorname{sen} h \operatorname{sen} \varphi - \operatorname{sen} \delta}{\cos h \cos \varphi}$$

Introduciendo aquí la distancia zenital en lugar de la declinación, y recordando que $\triangle = 90° - \delta$, tendremos:

$$\cos A = \frac{\operatorname{sen} h \operatorname{sen} \varphi - \cos \triangle}{\cos h \cos \varphi} \qquad (3)$$

Por otra parte, las fórmulas relativas a la división de los arcos nos dán:

$$\operatorname{sen} \tfrac{1}{2} A = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos A}{2}}$$

$$\cos \tfrac{1}{2} A = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos A}{2}}$$

Reemplazando en éstas el valor de cos A obtenido de (3), haciendo $h + \varphi + \triangle = 2S$, y efectuando las operaciones pertinentes, llegamos a este resultado:

$$\operatorname{sen} \tfrac{1}{2} A = \pm \sqrt{\frac{\cos S \cos (S - \triangle)}{\cos h \cos \varphi}} \qquad (4)$$

$$\cos \tfrac{1}{2} A = \pm \sqrt{\frac{\operatorname{sen} (S - h) \operatorname{sen} (S - \varphi)}{\cos h \cos \varphi}} \qquad (5)$$

de donde

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} A = \pm \sqrt{\frac{\cos S \cos (S - \triangle)}{\operatorname{sen} (S - h) \operatorname{sen} (S - \varphi)}} \qquad (6)$$

Transformación de la fórmula referida al polo del observador.

De esta se obtiene :

$$\cos A = \frac{\operatorname{sen} \delta - \operatorname{sen} h \operatorname{sen} \varphi}{\cos h \cos \varphi} = \frac{\cos \triangle - \operatorname{sen} h \operatorname{sen} \varphi}{\cos h \cos \varphi}$$

y procediendo de la misma manera que en el caso anterior, llegamos a estas otras fórmulas .

$$\operatorname{sen} \tfrac{1}{2} A = \pm \sqrt{\frac{\operatorname{sen} (S - h) \operatorname{sen} (S - \varphi)}{\cos h \cos \varphi}} \qquad (7)$$

$$\cos \tfrac{1}{2} A = \pm \sqrt{\frac{\cos S \cos (S - \triangle)}{\cos h \cos \varphi}} \qquad (8)$$

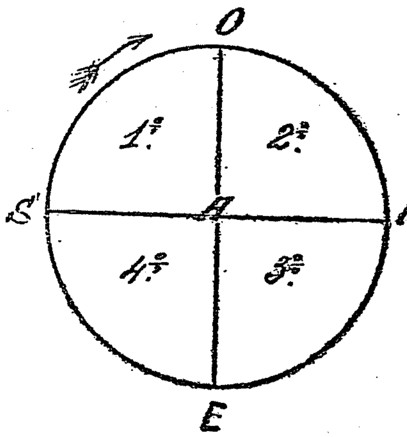
$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} A = \pm \sqrt{\frac{\operatorname{sen} (S - h) \operatorname{sen} (S - \varphi)}{\cos S \cos (S - \triangle)}} \qquad (9)$$

Cualquiera de éstas seis fórmulas puede servir para el objeto propuesto, con tal de dar a sus diversos elementos el signo que en cada caso les corresponda según las convenciones establecidas.

IV. — DETERMINACIÓN DE LOS SIGNOS DE LAS FÓRMULAS.

El doble signo de las fórmulas indica desde luego una ambigüedad que es necesario eliminar para aplicarlas con seguridad y eficacia.

Contándose los azimutes desde el punto sud del horizonte hacia el oeste, norte y este, los cuadrantes resultan numerados en la forma que pone de manifiesto la figura adjunta, siendo A el observador y designándose los puntos cardinales por la inicial de sus nombres respectivos.



Cuando el azimut observado cae en el 1° o 2° cuadrante, es decir, cuando está comprendido entre 0° y 180°, su mitad estará comprendida entre 0° y 90°, y por consiguiente sen $\frac{1}{2}$ A, cos $\frac{1}{2}$ A y tang $\frac{1}{2}$ A son positivos; si el azimut cae en el 3° o 4° cuadrante, estará comprendido entre 180° y 360°, y su mitad entre 90° y 180°, siendo en este caso sen $\frac{1}{2}$ A positivo, pero cos $\frac{1}{2}$ A y tang $\frac{1}{2}$ A negativos.

De lo expuesto se deduce que el valor del ángulo $\frac{1}{2}$ A será agudo u obtuso según que el astro observado quede al oeste o al este del meridiano.

Teniendo presente que los astros al oeste del meridiano tienen un movimiento descendente, y ascendente al este, podemos formular la siguiente regla práctica:

Si el astro observado va bajando, el ángulo $\frac{1}{2}$ A *es agudo, y se tomará para cualquiera de las tres funciones el valor directo que den las tablas; y si va subiendo,* $\frac{1}{2}$ A *es obtuso, y en este caso se tomará el valor suplementario.*

Este valor suplementario corresponde al signo negativo de las fórmulas de cos $\frac{1}{2}$ A y tang $\frac{1}{2}$ A.

Con esta convención, y las que hemos establecido respecto a los signos de δ y de φ, las fórmulas expresadas pueden aplicarse en toda su generalidad.

Hay sin embargo un caso de excepción a la regla anterior, que aunque no es aplicable a nosotros los del hemisferio austral, es menester tener en cuenta: cuando se aplican en el hemisferio norte las fórmulas referidas al polo del observador, se invierte la regla, porque siendo el punto norte del horizonte el origen de los azimutes, se altera la numeración de los cuadrantes, y en este caso $\frac{1}{2}$ A es agudo si el astro observado queda al este del meridiano, y obtuso si queda al oeste.

V.—APLICACIONES PRACTICAS

Como comprobación de las teorías desarrolladas, vamos a hacer aplicación de las fórmulas deducidas a observaciones directas de dos astros en posiciones muy diferentes.

Emplearemos solo las fórmulas de las tangentes (6) y (9), pues la de los senos y cosenos (4), (5), (7) y (8) son las bases de aquellas.

Las observaciones las ejecutamos en la noche del 31 de Julio último, en el centro del terreno destinado al palacio municipal, situado casi en el extremo norte de la Avenida Argentina cuyo rumbo es conocido.

Transportado el eje de la Avenida al punto de estación, se tomó como línea de fe una paralela al mismo, en la forma que indica el croquis final que se acompaña a este trabajo; debiendo advertir que en la determinación y traslación del eje mencionado no se ha puesto mucha prolijidad, pues no era nuestro objeto determinar su verdadero azimut, sino verificar o comprobar una fórmula.

La posición geográfica del punto de observación se ha calculado refiriéndola a la del Observatorio astronómico nacional.

La temperatura, la presión barométrica y la hora media, se tomaron oportunamente en la Oficina meteorológica y Observatorio astronómico, pero reduciéndolas al punto de estación.

Hechas estas aclaraciones pasaremos a la parte práctica del presente estudio.

A.—DATOS DE OBSERVACIÓN Y REDUCCIÓN DE LOS ELEMENTOS

Datos comunes a las dos observaciones.

Longitud referida al meridiano de Paris	:	$\omega = 4^h 26^m 06^s,6 - 0 -$
Latitud (sud)	:	$\varphi = -31°25'18''$
Presión barométrica	:	$0,^m730$
Temperatura	:	$+12°$

Datos particulares (fecha, 31 Julio 1914).

1ª. observación: Arturo (α Boyero).	*2ª. observación:* Júpiter.
$\alpha = 14^h 11^m 46^s,42$ (ascención recta)	$\alpha = 21^h 25^m 28^s,68$
$\delta = +19°37'40'',2$ (declinación)	$\delta = -16°11'08'',8$
$h = 28°26'47'',80$ (altura verdadera)	$h = 29°25'23'',7$
$tm = 8^h 00^m 08^s$ (hora media local p.m)	$tm = 8^h 30^m 11^s$
$a = 163°14'20''$ (ángulo azimutal)	$a = 293°51'20''$

Reducción de los elementos de observacion.

1ª. Observación: Arturo. Altura aparente, $h_o = 28°28'30''$.

Corrección de refracción.

$$\begin{array}{lr} R_m \text{ para } 28° = & 109'',3 \\ R_m \text{ » } 28',5 = & -2,1 \\ \hline R_m \text{ para } 28°28'30'' = & 107'',2 \end{array}$$

Barómetro	a 0,730	;	factor	: 0.961
Termómetro	» +12°	;	»	: 0.993
			Producto	: 0.954

Refracción exacta : $107'',2 \times 0.954 = 102'',2 = 01'42'',2$

$$\begin{array}{lrl} & h_o = & 28°28'30'' \\ & R_e = & -01'42'',2 \\ \hline \text{Altura verdadera,} & h = & 28°26'47'',8. \end{array}$$

2ª. Observación: Júpiter: Altura aparente, $h_o = 29°27'$.

Corrección de refracción:

$$\begin{array}{lr} R_m \text{ para } 29° = & 104'',8 \\ R_m \text{ » } 27' = & -1.9 \\ \hline R_m \text{ para } 29°27' = & 102'',9 \end{array}$$

Refracción exacta: 102",9 × 0,954 = 98",2 = 01'38",2

$$\begin{array}{rr} h_o = & 29°26'60" \\ R_e = & -01'38",2 \\ \hline & 29°25'21",8 \end{array}$$

Corrección de paralaje:	+ 1",9
Altura verdadera, h =	29°25'23",7

Cálculo de las coordenadas de Júpiter.

Tiempo medio de observación	:	$t_m = 8^h\ 30^m\ 11^s$
Longitud oeste de Paris	:	$\omega = 4^h\ 26^m\ 6^s,5$
Tiempo medio correspondiente de Paris	:	$12^h\ 56^m\ 17^s,5$
Hora del paso meridiano de Paris	:	$12^h\ 50^m\ 20^s$
Diferencia después del paso	:	$+\ 5^m 57^s,5 = 0^h,099$

α para el paso meridiano de Paris	$= 21^h 25^m 28^s,80$
$\triangle\ \alpha$ por hora = — 1",234	
$\triangle\ \alpha$ para $0^h,099$ = — 1.234 × 0.099	$= -\ 0^s,12$
α para el momento de observación	$= 21^h 25^m 28^s,68$
δ para el paso meridiano de Paris	= 16°11'08"2
$\triangle\ \delta$ por hora = — 6",24	
$\triangle\ \delta$ para 0^h099 = — 6.24 × 0.099	= — 0",6
δ para el momento de observación	= — 16° 11' 08",8

B.—CÁLCULO DEL AZIMUT PARA LA PRIMERA OBSERVACIÓN (ARTURO), APLICANDO LA FÓRMULA (6).

Como hemos visto anteriormente, los elementos de cálculo φ y δ se toman aquí con los signos de la convención general que rige al respecto.

Los datos son:

$\delta = +\ 19°37'40",2$

$\triangle = 90° - \delta$

$$\begin{array}{rr} h = & 28°26'47",8 \\ \varphi = & -\ 31°25'18",0 \\ \triangle = & 70°22'19",8 \\ \hline 2\,S = & 67°23'49",6 \end{array}$$

$$S = 33^\circ 41' 54'',8 \qquad S - h = 5^\circ 15' 07''$$
$$S - \triangle = - 36^\circ 40' 25'' \qquad S - \varphi = 65^\circ 07' 12'',8$$

En el momento de la observación el astro iba *bajando*, el ángulo $\frac{1}{2}$ A será agudo, y corresponde a la fórmula el signo $+$: tenemos pues,

$$\text{tang} \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\cos S \cos (S - \triangle)}{\text{sen} (S - h) \text{ sen} (S - \varphi)}}$$

$$= \sqrt{\frac{\cos 33^\circ 41' 54'',8 \cos 36^\circ 40' 25''}{\text{sen } 5^\circ 15' 07''. \text{ sen } 65^\circ 07' 12'' 8}}$$

log. cos. 33°41'54'',8	= 9.9201067	log. sen. 5°15'07''	= 8.9615892
+ » » 36°40'25''	= 9.9042018	+ » » 65°07'12'',8	= 9.9576994
log. numerador	9.8243085	log. denominador	8.9192886
— » denominador	8.9192886		
	0.9050199		

$$\log. \text{ tang } \frac{1}{2} A = \frac{0.9050199}{2} = 0.4525099$$

$$\frac{1}{2} A = 70^\circ 34' 07'',5$$

luego
$$A = 141^\circ 08' 15''$$

C.—CÁLCULO DEL AZIMUT PARA LA PRIMERA OBSERVACIÓN (ARTURO) APLICANDO LA FÓRMULA (9).

Los elementos de cálculo φ y δ tienen en este caso signos contrarios a los que resultan de la convención general, porque están referidos al polo sud, que es el del observador.

Los datos son :

$$\delta = - 19^\circ 37' 40'',2 \qquad h = 28^\circ 26' 47'',8$$
$$\triangle = 90^\circ - (-\delta) = 90^\circ + \delta \qquad \varphi = 31^\circ 25' 18''$$
$$\triangle = 109^\circ 37' 40'',2$$
$$2\,S = 169^\circ 29' 46''$$

$$S = 84^\circ 44' 53'' \qquad S - h = 56^\circ 18' 05'',2$$
$$S - \triangle = - 24^\circ 52' 47'',2 \qquad S - \varphi = 53^\circ 19' 35''$$

Como el astro observado *iba bajando*, corresponde a la fórmula el signo +, y tenemos:

$$\text{tang}\,\tfrac{1}{2}\,A = \sqrt{\frac{\text{sen}\,(S - h)\ \text{sen}\,(S - \varphi)}{\cos S\ \cos\,(S - \triangle)}}$$

$$= \sqrt{\frac{\text{sen}\ 56^\circ 18' 05'',2\ \text{sen}\ 53^\circ 19' 35''}{\cos\ 84^\circ 44' 53''\ \ \cos\ 24^\circ 52' 47'',2}}$$

log. sen. 56°18'05'',2	= 9.9201067	log. cos. 84°44'53''	= 8.9615892
+ » » 53°19'35''	= 9.9042018	+ » » 24°52'47'',2	= 9.9576993
log. numerador	9.8243085	log. denominador	8.9192885
— » denominador	8.9192885		
	0.9050200		

$$\text{log. tang.}\ \tfrac{1}{2}\ A = \frac{0.9050200}{2} = 0.4525100$$

$$\tfrac{1}{2}\ A = 70^\circ 34' 07'',5$$

y $$A = 141^\circ 08' 15''$$

o sea el mismo valor hallado anteriormente.

D.—Cálculo del mismo azimut por medio de la fórmula (1)

De ella se saca: $\cos A = \text{tang}\ h\ \text{tang}\ \varphi - / \dfrac{\text{sen}\ \delta}{\cos h\ \cos \varphi}$

log. tang (h = 28°26'47'',8) =	9.7337987	(+)		
+ » » (φ = —31°25'18'') =	9.7859856	(—)		
Nº. log.	9.5197843	= —	0.3309667	
log. cos. (h = 28°26'47'',8) =	9.9441180	(+)		
+ » » (φ = 31°25'18'') =	9.9311291	(+)		
—	9.8752471	(+)		
+ log. sen. (δ = 19°37'40'',2) =	9.5262219	(+)		
Nº. log.	9.6509748	=	0.4476873	

luego tang h tang φ = — 0.3309667

$$-\frac{\text{sen } \delta}{\cos h \cos \varphi} = -\frac{0.4476873}{-0.7786540} = \cos A \qquad \text{(a)}$$

$$\log.\ 0.7786540 = \log.\cos A = 9.8913445$$

$$N^o.\ \log.\cos 9.8913445 = 38^\circ 51' 45''$$

Estando el astro observado al oeste del meridiano, $A < 180^\circ$, y por consiguiente sen A es positivo; pero como al mismo tiempo la igualdad (a) nos indica que cos A es negativo, resulta entonces que el ángulo A corresponde al 2°. cuadrante: luego su verdadero valor es el suplementario del que dan las tablas, de modo que tenemos en definitiva:

$$A = 141^\circ\, 08'\, 15'',$$

que es justamente el mismo que hemos obtenido por las fórmulas (6) y (9):

E. — CÁLCULO DEL TIEMPO PARA LA 1ª OBSERVACIÓN.

Con objeto de comprobar una vez más la exactitud de los elementos de observación, vamos a tratar de deducir la hora en que se efectuó aquella.

La fórmula general es :

$$\text{tang } \tfrac{1}{2}\, t = \sqrt{\frac{\text{sen } (S - h) \cos S}{\text{sen } (S - \varphi) \cos (S - \triangle)}}$$

positiva porque el astro observado está al oeste del meridiano

Los elementos son los mismos que hemos empleado en el parágrafo C para determinar el azimut por la fórmula (9); y en consecuencia podemos reproducir aquí los logaritmos que tomamos para aquel cálculo.

log. sen. 56°18'05",2	= 9.9201067	log. sen. 53°19'35"	= 9.9042018
+ » cos. 84°44'53"	= 8.9615892	+ » cos. 24°52'47",2	= 9.9576993
log. numerador	8.8816959	log. denominador	9.8619011
— » denominador	9.8619011		
	9.0197948		

$$\log. \text{ tang. } \frac{1}{2}\, t = \frac{9.0197948}{2} = 9.5098974$$

$$\frac{1}{2}\, t = 17^\circ\ 55'\ 38'',2$$

y

$$t = 35^\circ\ 51'\ 16'',4 = 2^h\ 23^m\ 25^s,09$$

t = ángulo horario	=	$2^h\ 23^m\ 25^s,09$
α = ascención recta	=	$14^h\ 11^m\ 46_s,42$
θ = tiempo sideral	=	$16^h\ 35^m\ 11^s,51$
Tiempo sideral a medio dia m.	=	$-8^h\ 33^m\ 45^s,83$
Diferencia = intervalo sideral	=	$8^h\ 01^m\ 25^s{}'68$
Corrección	=	$-01^m\ 18^s,87$
t_m = tiempo medio	=	$8^h\ 00^m\ 06^s,81$

El tiempo medio tomado en el momento de la observación fué $8^h\ 00^m\ 08^s$, habiendo con el calculado una diferencia de $1_s,2$, que no es mucho si se tiene en cuenta que no se trataba de operaciones de precisión, y que los instrumentos empleados eran un teodolito de 10'' de apreciación y un cronómetro de bolsillo.

F.—CÁLCULO DEL AZIMUT PARA LA SEGUNDA OBSERVACIÓN (JÚPITER,) APLICANDO LA FÓRMULA (6).

Los signos de φ y δ son en este caso los que resultan de la convención general.

Los datos son :

$$\delta = -16^\circ\ 11'\ 08'',8 \qquad h = 29^\circ 25' 23'',7$$

$$\triangle = 90^\circ - (-\delta) = 90^\circ + \delta \qquad \varphi = -31^\circ 25' 18''$$

$$\triangle = 106^\circ 11{,}08'',8$$

$$2\,S = 104^\circ 11' 14'',5$$

$$S = 52^\circ 05' 37'',2 \qquad S - h = 22^\circ 40' 13'',5$$

$$S - \triangle = -54^\circ 05' 31'',6 \qquad S - \varphi = 83^\circ 30' 55'',2$$

En el momento de la observación el astro *iba subiendo,* el ángulo $\frac{1}{2}$ A será obtuso, y corresponde a la fórmula el signo — :tenemos pues,

$$\text{tang } \frac{1}{2} A = -\sqrt{\frac{\cos S \cos (S - \triangle)}{\text{sen}(S - h) \text{ sen } (S - \varphi)}}$$

$$= -\sqrt{\frac{\cos 52°05'37'',2 \cos 54°05'31'',6}{\text{sen } 22°40'13'',5 \text{ sen } 83°30'55'',2}}$$

log. cos 52°05'37",2 =	9.7884318	log. sen. 22°40'13",5 =	9.5859451
+ » » 54°05'31",6 =	9.7682561	+ » » 83°30'55",2 =	9.9972125
log. numerador	9.5566879	log. denominador	9.5831576
— » denominador	9.5831576		
	9.9735303		

$$\text{log. tang. } \frac{1}{2} A = \frac{9.9735303}{2} = 9.9867651 \qquad (-)$$

$$\frac{1}{2} A = 135° \ 52' \ 22'',5$$
$$A = 271° \ 44' \ 45''$$

G.—CÁLCULO DEL AZIMUT PARA LA SEGUNDA OBSERVACIÓN (JÚPITER) APLICANDO LA FÓRMULA (9).

φ y δ tienen en este caso signos contrarios a los que les corresponde por la convención general, por estar referidos al polo sud, que es el del observador.

Los datos son :

δ =	16° 11' 08",8	h =	29° 25' 23",7
$\triangle$ =	90° — δ	φ =	31° 25' 18"
		$\triangle$ =	73° 48' 51",2
		2 S =	134° 39' 32",9
S =	67° 19' 46",4	S — h =	37° 54' 22",7
S — $\triangle$ =	6° 29' 04",8	S — φ =	35° 54' 28",4

Como en el momento de la observación el astro *iba subiendo*, el ángulo $\frac{1}{2}$ A será obtuso, y corresponde a la fórmula el signo —; así tenemos:

$$\text{tang } \frac{1}{2} A = -\sqrt{\frac{\text{sen } (S - h) \text{ sen } (S - \varphi)}{\cos S \cos (S - \triangle)}}$$

$$= -\sqrt{\frac{\text{sen } 37°54'22'',7 \text{ sen } 35°54'28'',4}{\cos 67°19'46'',4 \cos 6°29'04'',8}}$$

log. sen. 37°54'22",7 =	9.7884314	log. cos 67°19'46",4 =	9.5859456
+ » » 35°54'28",4 =	9.7682561	+ » » 6°29'04",8 =	9.9972125
log. numerador	9.5566875	log. denominador	9.5831581
— » denominador	9.5831581		
	9.9735294		

$$\log. \text{ tang } \frac{1}{2} A = -\frac{9.9735294}{2} = -9.9867647$$

$$\frac{1}{2} A = 135° \, 52' \, 22'',5$$

y $\quad A = 271° \, 44' \, 45''$

que es el mismo valor que hemos encontrado por la fórmula (6).

H.—CÁLCULO DEL MISMO AZIMUT POR MEDIO DE LA FÓRMULA (1)

De ella se obtiene: $\cos A = \text{tang } h \tan \varphi - \dfrac{\text{sen } \delta}{\cos h \cos \varphi}$

log. tang (h = 29°25'23".7) =	9.7512836		(+)
+ » » (φ = — 31°25'18") =	9.7859856		(—)
N°. log.	9.5372692	= — 0.3445634	
log. cos (h = 29°25'23".7) =	9.9400255		(+)
+ » » (φ = — 31°25'18") =	9.9311291		(+)
—	9.8711546		(+)

CÁLCULO DEL AZIMUT POR MEDIO DE LA FÓRMULA (6)

Empleando ésta fórmula, φ y δ tienen los signos que les corresponde por la convención general; y tendremos como datos:

$$\delta = -6°06'47'',4 \qquad h = 39°20'23''$$
$$\triangle = 90° - (-\delta) = 90° + \delta \qquad \varphi = +18°30'$$
$$\triangle = 96°06'47'',4$$
$$2S = 153°57'10'',4$$
$$S = 76°58'35'',2 \qquad S - h = 37°38'12'',2$$
$$S - \triangle = -19°08'12'',2 \qquad S - \varphi = 58°28'35'',2$$

En el momento de la observación el astro quedaba al oeste del meridiano e *iba bajando;* luego corresponde a la fórmula el signo $+$, y ésta es:

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\cos S.\ \cos(S - \triangle)}{\operatorname{sen}(S - h)\operatorname{sen} S - \varphi)}}$$

$$= \sqrt{\frac{\cos 76°58'35'',2\ \cos 19°08'12'',2}{\operatorname{sen} 37°38'12'',2\ \operatorname{sen} 58°28'35'',2}}$$

log. cos. 76°58'35'',2 =	9.3528607	log. sen. 37°38'12'',2 =	9.7857944
+ » » 19°08'12'',2 =	9.9753118	+ » » 58°28'35'',2 =	9.9306563
log. numerador	9.3281725	log. denominador	9.7164507
— » denominador	9.7164507		
	9.6117218		

$$\log.\ \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} A = \frac{9.6117218}{2} = 9.8058609$$

$$\tfrac{1}{2} A = 32°\ 36'\ 00'',5$$
$$A = 65°\ 12'\ 01''$$

CÁLCULO DEL AZIMUT POR MEDIO DE LA FÓRMULA (9)

En este caso φ y δ son positivos cuando quedan en el hemisferio del observador, y negativos en caso contrario.

Conservando estos elementos el mismo signo que en el cálculo anterior, los datos no varían.

El astro en el momento de la observación queda al oeste del meridiano, *va bajando,* y debía corresponder a la fórmula el signo $+$; pero como éste es el caso de excepción que hemos indicado, debe tomarse con el signo —, y así tendremos:

$$\text{tang}\ \tfrac{1}{2}\ A' = -\sqrt{\frac{\text{sen}\,(S-h)\ \text{sen}\,(S-\varphi)}{\cos S\ \cos\,(S-\Delta)}}$$

Los factores son iguales a los del cálculo anterior, y como el cociente se presenta invertido, restaremos los logaritmos en sentido contrario, o

	log. numerador	9.7164507
— »	denominador	9.3281725
		0.3882782

$$\log.\ \text{tang}\ \tfrac{1}{2}\ A' = \frac{0.3882782}{2} = 0.1941391\ \ (-)$$

$$\tfrac{1}{2}\ A' = 122^\circ\ 36'\ 00'',5$$

$$A' = 245^\circ\ 12'\ 01''$$

Azimut referido al punto norte del horizonte: para referirlo al sud no tenemos más que restarle 180°, y nos da el mismo valor obtenido anteriormente, es decir,

$$A = 65^\circ\ 12'\ 01''$$

K.—DEDUCCIÓN DEL AZIMUT DE LA LINEA DE FE Y EJE DE LA AVENIDA ARGENTINA

De la 1ª. observación se obtiene

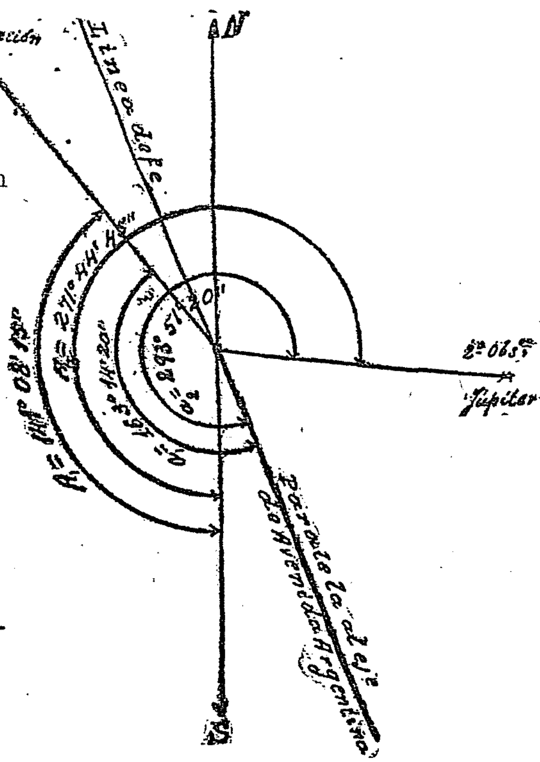
$$a_1 = 163^\circ 14' 20''$$
$$A_1 = 141^\circ 08' 15''$$
$$\text{S. } 22^\circ 06' 05'' \text{ E.}$$

De la segunda

$$a_2 = 293^\circ 51' 20''$$
$$A_2 = 271^\circ 44' 45''$$
$$\text{S. } 22^\circ 06' 35'' \text{ E.}$$

y resulta como promedio de rumbo

$$\text{S. } 22^\circ 06' 20'' \text{ E.}$$



que es el que le corresponde según varias otras determinaciones.

VI.—RESUMEN Y CONCLUSIÓN

De las dos fórmulas (6) y (9) que hemos empleado para el cálculo del azimut, y de la aplicación práctica que hemos hecho de cada una de ellas, resulta que la primera, que es la fórmula general, es la más conveniente por estas razones:

1ª.—Porque se aplica indistintamente y de la misma manera a los dos hemisferios;

2ª.—Porque no se aparta de la convención general y universal que rige con respecto a los signos de φ y δ;

3ª.—Porque da siempre los azimutes referidos al polo sud, en concordancia con la definición de azimut;

y 4ª.—Porque la regla práctica para determinar el signo de la fórmula, es general y no tiene excepción.

JACINTO DEL VISO.—JUAN MORRA.

Fig. 1

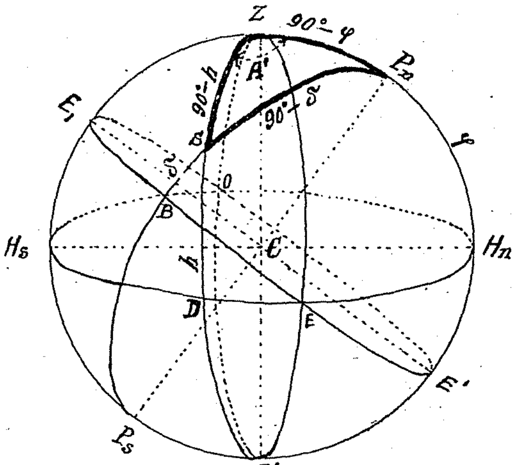


Fig. 2

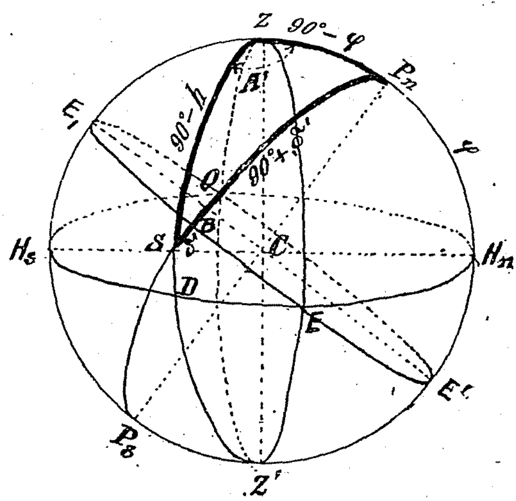


Fig. 3.

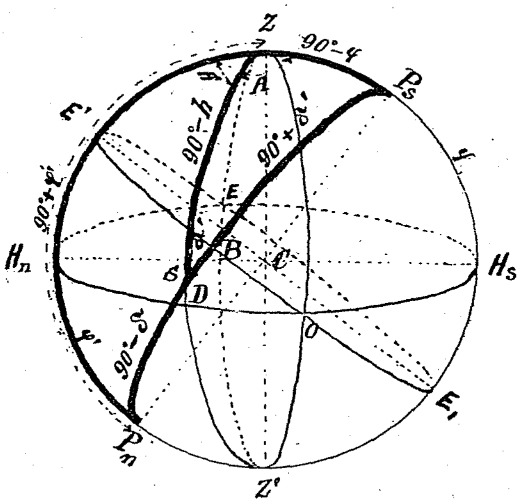


Fig. 4.