AÑO 24. Nº5-6. JULIO-AGOSTO 1937

Sobre las integrales determinantes ordinarias y generalizadas

POR

Carlos Biggeri (Buenos Aires)

INTRODUCCION

I. Es bien sabido que: entre la teoría de las series potenciales y la de las integrales determinantes ordinarias (también llamadas integrales de Laplace - Abel) así como entre la teoría de las series generales de Dirichlet y la de las integrales determinantes generalizadas (1) (llamadas también integrales de Dirichlet), existen muchas "analogías", pero también muchas "discrepancias". He aquí una de las numerosas "faltas de analogía": el radio, R, de convergencia de toda serie potencial:

$$(1) \qquad \sum_{n=o}^{\infty} a_n . z^n$$

se calcula por la fórmula general de Cauchy-Hadamard:

$$(2) \qquad R = \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}} \;;$$

en cambio: *no siempre* se puede calcular la abscisa, C, de conver-

(1) No siempre una integral determinante generalizada se puede reducir a una integral determinante ordinaria. Véase nuestro trabajo de los "Anales de la Sociedad Científica Argentina", Entrega VI, tomo 122, 1936, pág. 361; *"Singularidades de las funciones analíticas de una y de varias variables complejas independientes"*; (introducción).

gencia (simple) de la integral determinante ordinaria:

$$(3) \qquad \int_0^\infty a(t) \cdot e^{-tz} \, . \, dt$$

por la fórmula (*correlativa* de la (2)):

$$(4) \qquad C = \overline{\lim_{t \to \infty}} \, . \, \frac{\log |a(t)|}{t} \, .$$

Lo único que se puede afirmar *en general* es:

$$C \leqq \overline{\lim_{t \to \infty}} \, . \, \frac{\log |a(t)|}{t} \, .$$

Esta misma "falta de analogía" se presenta al pasar de la teoría de las series potenciales a la teoría de las series generales de Dirichlet.

El cálculo de la abscisa, C, de convergencia (simple también llamada condicional) de la integral (3) se ha logrado mediante fórmulas distintas, según el signo de dicha abscisa; por ejemplo: la fórmula de Landau (2) *supone esencialmente que C no es negativa.* Análogamente, la fórmula de Cahen (3) para el cálculo de la abscisa de convergencia condicional de la serie general de Dirichlet:

$$(5) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot e^{-\lambda_n . z} \, ,$$

supone esencialmente que dicha abscisa, C', es positiva.

(2) *Über die Grundlagen der Theorie der Facultatenreichen,* Sitzungber, der k. bayer. Akad. der Wissenschaft en tomo 36, pág. 215.

(3) *Sur la fonction ζ (s) de Reimann et sur des fonctions analogues,* Annales de l' Ecole Normale Supérieure, 3.e série, tomo 11, 1894.

Varios analistas han generalizado la fórmula de Cahen, dando expresiones diversas para el cálculo de la abscisa, C', de convergencia de la serie de Dirichlet (5); expresiones válidas en todos los casos. Véase, en efecto:

a) S. Pincherle, *"Alcune spigolature nel campo delle funzioni determinanti"*, Atti del IV Congresso dei Matematici, Roma, tomo 2, 1908.

b) E. Cotton, *"Sur l'abscisse de convergence des series de Dirichlet"*, Bulletin de la Société mathématique de France, tomo 45, 1917.

c) K. Knopp, *"Ueber die Abszisse der Grenzgeraden einer Dirichletschem Reihen"*, Sitzber. Berliner. Math. Gess, 1910.

d) T. Kojima, *"On the convergence - abscissa of general Dirichlet's series"*, Tôhoku Journal, tomo 6, 1914; y: *"Note on the convergence abscissa of Dirichlet's series"*, Tôhoku Journal, tomo 9, 1916.

e) M. Fujiwara, *"On the convergence - abscissa of general Dirichlet's series"*, Tôhoku Journal, tomo 6, 1914; y: *"Ueber Konvergenzabszisse der Dirichletschen Reihe"*, Tôhoku Journal, tomo 17, 1920.

f) E. Lindh, *"Un nouveau théorème dans la théorie des séries de Dirichlet"*, Comptes rendus de l'Acad. des Sciences de París, tomo 160, 1915.

g) B. Malmrot, *"Sur une formule de M. Fujiwara"*, Arkiv för Math. Ast. och Fys., tomo 14, 1919.

h) S. Kakega, *"On the convergence - abscissa of general Dirichlet's series"*, Tôhoku Journal, tomo 11, 1916.

i) G. Valiron, *"Sur l'abscisse de convergence des séries de Dirichlet"*, Bulletin de la Société mathématique de France, tomo 52, 1924.

Ahora bien, se presenta de modo natural, el siguiente problema: *obtener expresiones generales para el cálculo de la abscisa de convergencia (simple) de toda integral determinante, ordinaria o generalizada;* o sea: resolver para las integrales determinantes el problema que las memorias a), b), c), d), e), f), g), h), i), resuelven para las series generales de Dirichlet.

Este problema es el que resolvemos en la primera parte de esta memoria, logrando demostrar, a tal efecto, los dos siguientes teoremas.

Teorema 1º). *Sea la integral determinante generalizada:*

$$\int_0^{\infty} a(t) \, . \, e^{-\lambda(t) \, . \, z} \, . \, dt \tag{6}$$

y llamemos C *a la abscisa de convergencia simple (o condicional* (4)). *Se tiene:*

$$C = \overline{\lim_{t \to \infty}} \frac{\log \left| \int_{[t]}^{t} \overline{a(\tau)} \, . \, d\tau \right|}{t} \tag{7}$$

indicando con:

$$\int_{[t]}^{t} \overline{a(\tau)} \, . \, d\tau$$

la integral de la función generatriz $a(\tau)$ *entre límites tales que:*

$$[t] \leqq \lambda(\tau) \leqq t \quad ,$$

y con [t] *la parte entera de* t.

Teorema 2º.). (5) *Sean las mismas notaciones del teorema anterior.*

---

(4) El calificativo de *condicional* (que en la teoría de las series tiene adecuada justificación) podría parecer aquí, tratándose de integrales, un tanto arbitrario. Sin embargo no es así, se puede establecer para las integrales, un teorema *análogo* al de Riemann, sobre las series incondicionalmente convergentes.

(5) En esta introducción nos limitamos a enunciar los teoremas y las principales de sus consecuencias. A continuación se exponen las demostraciones detalladas.

C, se puede calcular también por la fórmula:

$$(8) \qquad C = \overline{\lim_{t\to\infty}} \, . \, \frac{\log . \left| \int_0^t a(\tau) . e^{\overline{\lambda(\tau)}^2 - \overline{\lambda(t)}^2} . d\tau \right|}{\lambda(t)} .$$

La abscisa de convergencia absoluta, que designaremos con C_1, de la integral (6) se obtiene reemplazando en (7) o en (8) la función $a(\tau)$ por $|a(\tau)|$. De modo que se verifica:

$$(7') \qquad C_1 = \overline{\lim_{t\to\infty}} \, \frac{\log \int_{[t]}^{t} \overline{|a(\tau)|} . d\tau}{t}$$

y además:

$$(8') \qquad C_1 = \overline{\lim_{t\to\infty}} \, \frac{\log \int_0^t |a(\tau)| . e^{\lambda(\tau)^2 - \lambda(t)^2} . d\tau}{\lambda(t)}$$

Haciendo en (7), (8), (7') y (8'):

$$\lambda(t) \equiv t$$

se obtienen fórmulas generales para el cálculo de las abscisas, simple y absoluta, de toda integral de Laplace. Dado su interés las enunciaremos explícitamente.

Corolarios)

1°.) *Si llamamos C a la abscisa de convergencia simple de la integral determinante (ordinaria):*

$$(3) \qquad \int_0^{\infty} a(t) . e^{-tz} . dt ,$$

se verifica que: (6)

$$C = \overline{\lim_{t\to\infty}} \cdot \frac{\log \left| \int_{[t]}^{t} a(\tau).d\tau \right|}{t} \tag{9}$$

y también:

$$C = \overline{\lim_{t\to\infty}} \cdot \frac{\log \left| \int_{0}^{t} a(\tau) \cdot e^{\tau^2 - t^2} \cdot d\tau \right|}{t} \tag{10}$$

2°.) *Si llamamos C_1 a la abscisa de convergencia absoluta de la integral deteminante ordinaria (3), se verifica que:*

$$C_1 = \overline{\lim_{t\to\infty}} \cdot \frac{\log \int_{[t]}^{t} |a(\tau)|.d\tau}{t} \tag{9'}$$

y también:

$$C_1 = \overline{\lim_{t\to\infty}} \cdot \frac{\log \int_{0}^{t} |a(\tau)|.e^{\tau^2 - t^2}.d\tau}{t} \tag{10'}$$

Recordemos que en toda integral determinante, ordinaria o generalizada, es siempre:

$$C \leqq C_1 \tag{11}$$

La desigualdad (11) nos conduce a plantear la siguiente pregunta: ¿se verificará en toda integral determinante que:

(6) Según (9) se puede enunciar que: si en la fórmula de Landau, cuyo alcance es restringido, se sustituye el extremo inferior (*constante*) por *parte entera de t*, se obtiene una fórmula universal para el cálculo de *C*.

$$o \leqq C_i - C \leqq \overline{\lim_{t\to\infty}} \cdot \frac{\log t}{\lambda(t)} \; ;$$

desigualdad (en sentido amplio) análoga a la de Cahen ([7]), de la teoría de las series de Dirichlet? La respuesta es negativa.

Observación: La fórmula (7) es "*análoga*" a la dada por Kojima ([8]) para series generales de Dirichlet. Un análisis superficial de la fórmula de Kojima, haría creer que la fórmula correspondiente para el cálculo de *C* de la integral (6) sería:

$$C' = \overline{\lim_{t\to\infty}} \cdot \frac{\log \left| \int_{[t]}^{t} a(\tau).d\tau \right|}{\lambda(t)}$$

o bien:

$$C'' = \overline{\lim_{t\to\infty}} \cdot \frac{\log \left| \int_{[t]}^{t} a(\tau).d\tau \right|}{t}$$

o bien:

$$C''' = \overline{\lim_{t\to\infty}} \cdot \frac{\log \left| \int_{[\lambda(t)]}^{\lambda(t)} a(\tau).d\tau \right|}{\lambda(t)}$$

o bien:

$$C'''' = \overline{\lim_{t\to\infty}} \cdot \frac{\log \left| \int_{[\lambda(t)]}^{\lambda(t)} a(\tau).d\tau \right|}{t}$$

(7) Véase loc. cit.
(8) Véanse las memorias d), antes citadas.

Pero estas cuatro últimas fórmulas son *ilusorias*, como lo prueba el siguiente ejemplo:

Tomemos en (6):

$$a(t) \equiv o \qquad \text{para} \qquad o \leqq t < 1$$

y:

$$a(t) \equiv 1 \qquad \text{para} \qquad t \geqq 1$$

y:

$$\lambda(t) \equiv \log t$$

Luego: la función $f(z)$ que define en tal caso la integral (6) es:

$$f(z) = \frac{1}{z-1}$$

y la abscisa, C, calculada *directamente* es:

$$C = 1.$$

Aplicando la fórmula (7) sale:

$$C = \overline{\lim_{t \to \infty}} \frac{\log \left| \int_{e^{[t]}}^{e^t} 1 \, . \, d\tau \right|}{t} = \overline{\lim} \frac{\log \left(e^t - e^{[t]} \right)}{t} =$$

$$= 1 + \overline{\lim_{t \to \infty}} \frac{\log \left(1 - e^{[t]-t} \right)}{t} = 1$$

En cambio, aplicando las cuatro fórmulas anteriores:

$$C' \leqq o \; ; \; C'' \leqq o \; ; \; C''' \leqq o \; ; \; C'''' \leqq o.$$

II. Otra de las tantas diferencias existentes entre la teoría de las series potenciales y la de las integrales determinantes (diferencia que repercute notablemente en el estudio de las singularidades de las funciones analíticas definidas por integrales de Laplace) es la siguiente: en *todo círculo interior* al círculo de convergencia de la serie potencial (1), dicha serie converge *uniformemente*, pero en cambio: existen integrales determinantes tales que, en *todo semiplano interior* a su semiplano de convergencia *simple* (9), dicha integral no converge *uniformemente*.

Como es bien sabido, una diferencia análoga se presenta al pasar de las series potenciales a las series generales de Dirichlet. Recordemos que Bohr introdujo la noción de "semiplano de convergencia uniforme para las series de Dirichlet", véase, en efecto:

a) "*Sur la convergence des séries de Dirichlet*", Comptes rendus hebdomadaires de l'Académie des Sciences de París, tomo 151, 1910
b) "*Ueber die gleichmassige Konvergenz Dirichletscher Reihen*", J für Math , tomo 143, 1913.
c) "*Nogle Bemaerkninger om de Dirichletske Raekkers ligelige Konvergens*", Mat. Tidsskr , 1921.

Ahora bien, siguiendo las ideas de H. Bohr, introducimos en la segunda parte de esta memoria, la noción de: *semiplano de convergencia uniforme de la integral determinante* (6)

He aquí brevemente dicha noción: "Dada la integral:

$$(6) \qquad \int_0^\infty a(t) \cdot e^{-\lambda(t)\, z}\, dt,$$

existe siempre una recta:

$$R(z) \equiv x \equiv C_2,$$

tal que la integral (impropia) (6) converge *uniformemente* para:

$$x > C_2 + \epsilon$$

(9) Evidentemente: toda integral determinante converge uniformemente en todo semiplano interior a su semiplano de convergencia *absoluta*.

y no para:

$$x > C_2 - \epsilon,$$

cualquiera que sea el número positivo ϵ".

Al número C_2 lo llamaremos: *abscisa de convergencia uniforme*; a la recta:

$$R(z) \equiv x \equiv C_2$$

la llamaremos: *recta de convergencia uniforme*, y al semiplano:

$$R(z) > C_2$$

lo llamaremos: *semiplano de convergencia uniforme*.

En la segunda parte del presente trabajo, luego de probar la existencia de C_2, demostramos los siguientes teoremas respecto de la abscisa de convergencia uniforme.

Teorema 3º.). Supongamos:

a) (10) *el límite superior de* $\frac{\log t}{\lambda(t)}$, *para* $t \to +\infty$, *sea finito, y supongamos*:

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\log t}{\lambda(t)} \equiv l \geqslant 0$$

b) *además*:

$$\frac{dt}{d\,\lambda(t)} = O\left[e^{\lambda(t)\,.\,(1+\delta)}\right]$$

siendo δ *un cierto número positivo*.

En tales hipótesis, se verifica que la integral (6) *converge uniformemente, siempre que la función* $f(z)$ *definida por dicha inte-*

(10) En toda integral determinante *ordinaria* esta condición a) así como la condición b) se cumplen evidentemente.

gral sea regular y finita. Es decir, si el número c es tal, que la función f (z) es finita y regular, para:

$$x > c + \epsilon$$

y no para:

$$x > c - \epsilon ,$$

se tiene que:

$$C_2 = c. \tag{12}$$

Haciendo $\lambda(t) = t$, este teorema nos da el siguiente:

Corolario: Si la función f (z) definida por la integral:

$$(3) \qquad \int_0^\infty a(t) \cdot e^{-tz} \cdot dt$$

es regular y finita, para:

$$x > c + \epsilon$$

y no para:

$$x > c - \epsilon ,$$

la abscisa de convergencia uniforme de la integral (3) *es precisamente c.*

Teorema 4º.). Supongamos que: p (t) sea una función derivable, monótona creciente y positiva y supongamos además que la función λ(t) sea derivable y que exista una cierta constante K positiva tal que:

$$o < \lambda(t) + K - \lambda(t + p(t)) < \frac{d\,\lambda(t + p(t))}{dt}. \tag{13}$$

Designemos con:

$$T\ (t,p) \equiv T\ (t,p(t))$$

el extremo superior de la integral:

$$\left| \int_t^{t+p} a(\tau) \cdot e^{-\lambda(\tau) \cdot i y} \cdot d\tau \right|$$

para:

$$o \leq p \leq p\ (t)\ ;$$

cuando la variable y, (siendo: $z = x + i\,y$), varía entre: $-\infty$ y $+\infty$.

En tales hipótesis, la abscisa, C_2, de convergencia uniforme de la integral determinante generalizada (6) *viene dada por la fórmula:*

$$C_2 = \overline{\lim_{t \to \infty}} \,.\, \frac{\log T\ (t,\ p\ (t))}{\lambda\ (t)} \,. \tag{14}$$

Corolario: Sea $p\ (t)$ una función derivable, positiva, monótona creciente y acotada. Supongamos que se verifique la relación:

$$o \leqq K - p\ (t) < 1 + \frac{d\ p\ (t)}{dt} \tag{13'}$$

siendo K una cierta constante positiva.

Designemos con:

$$T\ (t, p) \equiv T\ (t,\ p\ (t))$$

el extremo superior de la integral.

$$\left| \int_t^{t+p} a\,(\tau) \,.\, e^{-\tau i y} \,.\, d\tau \right|$$

para:

$$o \leqq p \leqq p\ (t)$$

cuando la variable y (parte imaginaria de z) varía entre $-\infty$ y $+\infty$.

En tales hipótesis y notaciones la abscisa, C_2, de convergencia uniforme de la integral determinante ordinaria (3) *se puede calcular por la fórmula:*

$$C_2 = \overline{\lim_{t\to\infty}} \, . \, \frac{\log T\,(t, p\,(t))}{t} \tag{14'.}$$

Observación: En el teorema 4º.) (y en su corolario) figura entre las hipótesis una función p (t) quien debe satisfacer a ciertas condiciones y a una desigualdad funcional, como es la (13) (o la (13')). Ahora bien, cabe preguntar: ¿existirá dicha función p (t)? La respuesta es afirmativa. En efecto; limitándonos para brevedad de la exposición, al caso de las integrales determinantes ordinarias, la función p (t) debe satisfacer, además de las condiciones cualitativas estipuladas en el corolario anterior a las tres siguientes desigualdades:

(a) $$p\,(t) \geqq 0$$

(b) $$p\,(t) \leqq K \qquad ; \quad (K > 0)$$

(c) $$p\,(t) + Dp\,(t) > K - 1$$

(indicando con *D* la derivada respecto de t).

Trataremos de satisfacer a la inecuación diferencial (c). Si con α indicamos un número positivo *indeterminado*, se verifica que:

$$D\,p\,(t) + p\,(t) = K - 1 + \alpha .$$

La integral general de esta ecuación diferencial es:

(d) $$p\,(t) = K - 1 + \alpha + B\,.\,e^{-t} .$$

Para que p (t) sea monótona creciente en el intervalo $(0 \leq t < +\infty)$, la constante B debe ser *negativa*. Se satisfacen todas las condiciones tomando:

$$1 - B - K \leq \alpha \leq 1$$

con:

$$B > -K$$

Por ejemplo, se puede tomar como función p (t) la siguiente:

$$p\,(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\,e^{-t} .$$

Teorema 5°.). Supongamos que la función-exponente $\lambda(t)$ *en la integral* (6) *admita función inversa:*

$$t \equiv t(\lambda).$$

Designemos con $T(\alpha)$ *el extremo superior de:*

$$\left| \int_{t_1}^{t_2} a(\tau) \,.\, e^{-\lambda(\tau)\,.\,iy} \,.\, d\tau \right|$$

siendo:

$$y: \quad \left. \begin{array}{l} t_1 \equiv t\,([\alpha]) \\ t_2 \quad t\,(\alpha) \end{array} \right\}$$

cuando y *(parte imaginaria de* z*) varía en el intervalo infinito:* $-\infty < y < +\infty$.

Entonces, la abscisa, C_2*, de convergencia uniforme de la integral determinante generalizada* (6) *viene dada por la fórmula:*

$$C_2 = \overline{\lim_{t \to \infty}} \,.\, \frac{\log T\,(\alpha)}{\alpha}\,. \tag{15}$$

Corolario: Si con $T\,(\alpha)$ *indicamos el extremo superior de la expresión:*

$$\left| \int_{t_1}^{t_2} a(\tau) \,.\, e^{-\tau iy} \,.\, d\tau \right|$$

cuando y *varía entre* $-\infty$ *y* $+\infty$*, teniendo* t_1 *y* t_2 *significados análogos a los del teorema 5°.), se verifica que: la abscisa,* C_2*, de convergencia uniforme de la integral determinante ordinaria* (3) *es:*

$$C_2 = \overline{\lim_{t \to \infty}} \, . \, \frac{\log T\,(\alpha)}{\alpha} \, . \tag{15'}$$

Teorema 6°.) . *Supongamos que la abscisa, C_2, de convergencia uniforme de la integral determinante generalizada* (6) *sea positiva.*

Indiquemos con:

$$T\ (t)$$

el extremo superior de la expresión:

$$\left| \int_0^t a\,(\tau)\,.\,e^{-\lambda(\tau)\,.\,iy}\,.\,d\tau \right|$$

cuando y varía en el intervalo:

$$-\infty < y < +\infty \, .$$

En tales hipótesis se tiene que:

$$C_2 = \overline{\lim_{t \to \infty}} \, . \, \frac{\log T\,(t)}{\lambda(t)} \, . \tag{16}$$

si C_2 no fuese *positiva* el teorema 6°.) ya no es aplicable, y lo único que entonces podría asegurarse *en general* es que:

$$C_2 \leq \overline{\lim_{t \to \infty}} \; \frac{\log T\,(t)}{\lambda\,(t)}$$

Corolario: Si la abscisa, C_2 de convergencia uniforme de la integral determinante ordinaria (3) *es positiva, y con T* (t) *indicamos el extremo superior de la expresión:*

$$\left| \int_0^t a\,(\tau)\,.\,e^{-i\,\tau\,y}\,.\,d\tau \right|$$

cuando y varía entre $-\infty$ *y* $+\infty$, *se verifica:*

$$C_2 = \overline{\lim_{t \to \infty}} \, . \, \frac{\log T(t)}{t} \, . \qquad (16')$$

Entre los teoremas 5º.) y 6º), así como entre sus respectivos corolarios, obsérvese que existe un vínculo "*análogo*" al que hemos señalado entre la fórmula (9) y la fórmula de Landau para el cálculo de la abscisa de *convergencia simple* de la integral (3) (véase nota, al pié de página, del corolario 1º.) ; introducción a la Ira. parte).

Teorema 7º.) : Sea $\varphi(\alpha)$ *una función real (de la variable real* α*), derivable para todo* $\alpha \geqq \lambda(o)$, *que satisfaga, además, a las dos siguientes condiciones:*

a) [11] $$\lim_{\alpha \to +\infty} \frac{d\,\varphi(\alpha)}{d\alpha} = +\infty \quad ;$$

b) *que exista un cierto número positivo k tal que:*

$$\lim_{\alpha \to +\infty} \, . \, \frac{d\,\varphi(\alpha)}{\alpha^k \, d\,\alpha} = o \, .$$

Designaremos con $T(t)$ *el extremo superior de la expresión:*

$$\left| \int_0^t a(\tau) \, . \, e^{\varphi[\lambda(\tau)] - \varphi[\lambda(t)] - \lambda(\tau) \, . \, iy} \, . \, d\tau \right|$$

cuando y varía en el intervalo infinito:

$$-\infty < y < +\infty \, .$$

(11) De esta condición se infiere que.

$$\lim_{\alpha \to +\infty} \, . \, \frac{\varphi(\alpha)}{\alpha} = +\infty \qquad \text{(L'Hôpital)} \, .$$

En tales hipótesis se tiene que:

$$C_2 = \overline{\lim_{t\to\infty}} \cdot \frac{\log T(t)}{\gamma(t)} . \qquad (17)$$

Corolario. Sea $\varphi(\alpha)$ *una función que satisface a las mismas condiciones que en el teorema 7°.). Designemos con* $T(t)$ *el extremo superior de:*

$$\left| \int_0^t a(\tau) \cdot e^{\varphi(\tau)-\varphi(t)-\tau i y} \cdot d\tau \right|$$

para $-\infty < y < +\infty$.

Luego: la abscisa, C_2, *de convergencia uniforme de la integral determinante ordinaria* (3) *se puede calcular por la fórmula:*

$$C_2 = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\log T(t)}{t} \qquad (17')$$

Por ejemplo: tomando como función $\varphi(\alpha)$ la siguiente:

$$\varphi(\alpha) \equiv \alpha^2$$

y si indicamos con $T_1(t)$ el extremo superior de:

$$\left| \int_0^t a(\tau) \cdot e^{\tau^2 - t^2 - \tau i y} \cdot d\tau \right|$$

cuando y varía en el intervalo infinito: $-\infty < y < +\infty$; la abscisa, C_2, de convergencia uniforme de la integral determinante ordinaria (3) es:

$$C_2 = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\log T_1(t)}{t} \qquad (17'')$$

Nótese que los teoremas 3º.), 4º.), 5º.) y 7º.) dan fórmulas *universales* para el cálculo de la abscisa de convergencia uniforme, mientras que el teorema 6º.) supone esencialmente que dicha abscisa es *positiva*.

Entre las tres abscisas, C, C_1 y C_2, de convergencia *simple, absoluta* y *uniforme* de toda integral determinante (ordinaria o generalizada), existen evidentemente las relaciones:

$$C \leqq C_2 \leqq C_1;$$

que también se cumplen, según es bien sabido, entre las tres abscisas homónimas de toda serie de Dirichlet. Es fácil probar que en esta última relación doble se pueden presentar efectivamente las cuatro combinaciones posibles de signos, obteniéndose un resultado análogo a uno de L Neder ([12]), de la teoría de las series generales de Dirichlet.

Los teoremas de la segunda parte hasta aquí enunciados se refieren a la determinación de la abscisa de convergencia uniforme. En cambio el siguiente teorema se refiere al comportamiento de la función analítica, definida por la integral determinante generalizada (6) (o por la integral determinante ordinaria (3), en las proximidades de su recta de convergencia uniforme.

Teorema 8º.). *La función analítica f (z) definida por la integral determinante generalizada* (6) (*o por la integral determinante ordinaria* (3)), *toma en cada faja* (*cuyas rectas-fronteras son paralelas al eje imaginario*):

$$C_2 - \epsilon < R(z) \equiv x < C_2 + \epsilon$$

para todo $\epsilon > o$, *una infinidad de veces, cualquiera valor* (*real o complejo, incluso el punto del infinito*) *arbitrario prefijado, con excepción a lo sumo de un solo valor*

Este teorema es análogo a uno de Bohr de la teoría de las series generales de Dirichlet.

El teorema 8º) *recuerda* al célebre *primer teorema de Picard*

(12) *"Ueber die Lage der Konvergenzabszisse einer Dirichletschen Reihe zur Beschränktheitsabszisse ihrer Summe"*, Arkiv för Mat , Ast. och Fys., tomo 16, 1922.

([13]) sobre las funciones analíticas con punto singular esencial aislado

Hasta aquí hemos tratado de tres clases de abscisas (la de convergencia simple, la de convergencia uniforme y la de convergencia absoluta) de toda integral determinante (ordinaria o generalizada).

Ahora bien, cabe introducir otras tres abscisas características referentes a toda integral determinante, a saber: *abscisa de holomorfismo, abscisa de ultraconvergencia* y la *abscisa de ultraconvergencia estrecha* (o *en sentido restringido*).

Es sabido, que en la teoría de las series de Dirichlet, las abscisas homónimas de estas últimas, desempeñan en las investigaciones modernas un papel primordial ([14]).

Pero el estudio de estas tres nuevas categorías de abscisas de las integrales determinantes tiene interés, por su fecundidad, en el problema de las "singularidades de las funciones analíticas definidas por integrales determinantes". Reservamos, por lo tanto, su exposición para otro trabajo Limitémosnos, en esta memoria, a la introducción del concepto de abscisa de holomorfismo: las nociones de abscisas de ultraconvergencia y de ultraconvergencia en sentido restringido exigirían algunos teoremas previos sobre integrales impropias numéricas de variable real.

Ante todo recordemos la propiedad clásica: ([15]) sobre la recta de convergencia condicional de una integral determinante, puede no existir ningún punto singular de la función analítica definida por dicha integral.

Entonces la función analítica f (z) definida por la integral (6), o por la integral (3), puede ser holomorfa para valores de z cuya parte real es menor que la abscisa de convergencia simple,

---

(13) "*Sur une propriété des fonctions entières*", Comptes Rendus Acad Sc. París, tomo 88, 1879, pág. 1024; *Mémoire sur les fonctions entières*", Annales Ecole Norm. Sup., tomo 9, 1880, pág. 145; y "*Sur les fonctions analytiques uniformes dans le voisinage d' un point singulier essentiel*", Comptes Rendus Acad. Sc, París, tomo 89, 1879, pág 745. Véase: Gaston Julia, "*Leçons sur les fonctions uniformes à point singulier essentiel isolé*", Colección Borel, Gauthier Villars, París, 1924.

(14) Véase: Vladimir Bernstein, "*Leçons sur les progrès récents de la théorie des séries de Dirichlet*", Colección Borel, Gauthier - Villars, París, 1933

(15) Véase nuestro trabajo antes citado, nota al pié de página 351

C, de dicha integral Más aún: f (z) puede ser holomorfa para todo punto de z, aunque C sea finito. Claro está, que en esta consideración la función f (z) es la prolongación analítica de la "suma" de la integral (6), o de la (3), a través de la recta de convergencia simple

Llamemos H el extremo inferior de todos los valores (reales) h tales que la función f (z) es holomorfa en el semiplano:

$$R(z) > h$$

El número H es la *abscisa de holomorfismo* de la integral (6) (o de la (3)), la recta:

$$R(z) = H$$

es la *recta de holomorfismo* y el semiplano:

$$R(z) > H$$

es el *semiplano de holomorfismo*.

Por lo tanto, o bien la función analítica f (z) posee un punto singular, por lo menos, sobre la recta de holomorfismo, o bien, existen infinitos puntos singulares, a la izquierda de dicha recta, que tienen por punto de acumulación un cierto propio de la recta de holomorfismo o su punto impropio

Según lo dicho más arriba se verifica que:

$$H \leqq C \leqq C_2 \leqq C_1$$

Evidentemente H puede alcanzar su cota superior C. He aquí algunos casos sencillos en los cuales se verifica que:

$$H = C$$

(a) Cuando la función generatriz a (t) es positiva.

(b) Cuando la parte real de a(t) es positiva, y el afijo de a(t) varía en un ángulo fijo, de vértice en el origen y de amplitud menor que dos ángulos rectos.

(c) Cuando la parte real de a (t) es positiva, y el argumento φ (t) de la función generatriz a (t) satisface a la condición:

$$\lim_{t \to \infty} \frac{\log \cos \varphi(t)}{t}$$

(d) Cuando se verifican las dos hipótesis siguientes:

1) $$C = C_1$$

2) el argumento $\varphi(t)$ de a (t) satisface a la condición:

$$\lim_{t \to \infty} \frac{\log |\cos \varphi(t)|}{t}$$

(e) Cuando se verifican las dos hipótesis siguientes.

1) $$C = C_1$$

2) el afijo de a(t) varía en dos ángulos opuestos por el vértice (origen de coordenadas del plano esférico representativo de la función generatriz a(t).)

(f) Cuando las abscisas de convergencia simple y absoluta de la integral (6), o de la (3), son iguales y además la generatriz a(t) toma valores únicamente reales (nulo, positivos y negativos), a partir de un valor suficientemente grande (pero fijo) de t

(g) Cuando la función generatriz a(t) es una función analítica entera de t; esto es, cuando se verifica que:

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{\frac{|D^n a(o)|}{n!}} = o.$$

El caso (g) constituye un clásico teorema debido a Pincherle y a Doetsch. Los casos (a) y (b) constituyen correlativos de teoremas conocidos en las series potenciales y en las series de Dirichlet (teoremas de Vivanti - Borel - Pringsheim - Tschebychel, Dienes, Landau y Fekete). En cambio los casos (c), (d), (e) y (f) constituyen teoremas originales.

Una condición suficiente, pero no necesaria, para que la recta de holomorfismo de una integral determinante coincida con la recta de convergencia simple, la proporciona el siguiente teorema (cuya demostración la reservamos para otra memoria)

Teorema). Pongamos:

$$A_n \equiv \left(\frac{\sigma e}{n}\right)^n \cdot \int_\tau^\varrho a(t)\, e^{-(C+i\delta).\lambda(t)}\, t^n\, e^{-\sigma.\lambda(t)} \, . \, dt$$

donde es:

$$\left.\begin{aligned} \lambda(\tau) &= \frac{n}{\sigma} \, . \, (1-\omega) \\ \text{y:} \qquad & \\ \lambda(\varrho) &= \frac{n}{\sigma} \, . \, (1+\omega) \end{aligned}\right\}$$

siendo σ y ω números fijos reales arbitrariamente tomados, pero tales que:

$$\sigma > o \quad , \qquad \text{y} \qquad : \quad o < \omega < 1$$

El número δ es real y arbitrario.

Con tales notaciones se tiene: es condición suficiente (pero no necesaria) para que:

$$H = C ,$$

que exista un valor δ *tal que:*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|A_n|} = 1.$$

Ahora bien, si para todo valor real de δ es:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|A_n|} < 1 ;$$

caben dos posibilidades:

1.ª) $H < C$, en cuyo caso el teorema no asegura nada, o bien:

2.ª) $H = C$, en cuyo caso la demostración del teorema nos asegura: todos los puntos propios de la recta de convergencia simple son *regulares* para f (z), pero esta función f (z) posee infinitos puntos *singulares* a la izquierda de dicha recta, uno de cuyos puntos de acumulación, que puede ser el *único,* es el punto *impropio* de tal recta.

Observemos, finalmente, que la determinación de la abscisa de holomorfismo, en el caso general, constituye un problema esencialmente más difícil, que el cálculo de las abscisas de convergencia simple, uniforme y absoluta: *"puesto que para tal determinación es necesario conocer la distribución de los puntos singulares de la función f* (z)". Además la mayor parte de las propiedades referentes a la abscisa de holomorfismo de las series generales de Dirichlet, no son susceptibles de extenderse correlativamente a la abscisa de holomorfismo de las integrales determinantes.

III. En la tercera parte de este trabajo demostramos dos teoremas originales sobre los *ceros* de las funciones analíticas definidas por integrales determinantes, ordinarias o generalizadas.

He aquí los enunciados de dichos teoremas:

Teorema 9º). *Sea la función analítica f* (z) *definida por la integral determinante generalizada* (6), (*o por la integral determinante ordinaria* (3)).

Supongamos que:

a) *la función generatriz* $a(t)$, *a partir de un valor de* t (*que llamaremos* t_0) *suficientemente grande pero fijo, satisface a la condición:*

$$\left|\varphi(t)\right| \equiv \left|\text{Arg. } a(t)\right| \leq \tau < \frac{\pi}{2} \qquad ; (\tau \equiv \text{fijo});$$

b) *el logaritmo de* $f(z)$ *se puede escribir en la forma:*

$$\log f(z) \equiv k + \int_0^\infty b(t) \cdot e^{-\mu(t) \cdot z} \cdot dt$$

donde k *es una constante real y* $b(t)$ *es una función real no-negativa;*

c) *el punto:*

$$z = C$$

es singular para $f(z)$, *pero para:*

$$z = C + iy$$

con:

$$y \neq o$$

la función $f(z)$ *es regular;*

d) *la expresión:*

$$f(x) \cdot (x - C) \geq o$$

está acotada en un semientorno a la derecha del punto:

$$x = C$$

sobre el eje real.

En tales hipótesis la función $f(z)$ *no se anula en ningún punto de su recta de convergencia simple, excepto, a lo sumo, su punto real.*

Nótese que la primera parte de la hipótesis c) es consecuencia de la hipótesis a), en alguno de los dos casos siguientes:

1) la parte real de la generatriz $a(t)$ es positiva;

2) Las abscisas de convergencia simple y absoluta de (6), o de (3), son iguales.

El teorema 9°.) es análogo o un teorema de Landau ([16]).

Un teorema más general que el teorema anterior, y cuyo correlativo para las series de Dirichlet (que no enunciaremos) generaliza a dicho teorema de Landau, es el siguiente.

Teorema 10°) *Sea la función analítica f (z) definida por la integral determinante generalizada* (6), (*o por la integral determinante ordinaria* (3))

Supongamos:

a) *todos los puntos de la recta de convergencia simple, distintos del punto real (el cual puede ser regular o singular), sean regulares para f (z);*

b) *la expresión:*

$$(x - C) \cdot f(x)$$

está acotada en un semientorno lateral a la derecha, sobre el eje real, del punto:

$$x = C,$$

c) *en un cierto semientorno lateral de cada punto de la recta de convergencia simple, el logaritmo de f (z) se puede poner en la forma:*

$$\log f(z) = \delta(z) + \int_0^\infty b(t) \cdot e^{-\mu(t) \cdot z} \cdot dt$$

donde la nueva función generatriz b (t) es real no-negativa, y δ (z) es una función (compleja o real, constante nula o no) de la variable compleja z, tal que su parte real está acotada inferiormente en todo semientorno paralelo al eje real, de todo punto de la recta de convergencia simple.

(16) *"Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen"*, Leipzig, tomo 2, 1909.

En tales hipótesis: la función f (z) no se anula en ningún punto de la recta de convergencia simple, excepto, eventualmente, en su punto real.

IV. El estudio sistemático de las singularidades de las funciones analíticas definidas por integrales determinantes lo hacemos en nuestro trabajo, anteriormente citado, de los "Anales de la Sociedad Científica Argentina", empleando, principalmente, un criterio original; del cual deducimos algunos teoremas nuevos y simplificaciones de teoremas conocidos.

Por lo tanto en este trabajo no nos ocuparemos del problema de las singularidades. Haremos una sola excepción con el teorema análogo al de Fekete, y ello por la siguiente razón. Con nuestro criterio, del cual recién hablamos, se puede demostrar breve y elegantemente un teorema para las integrales determinantes, ordinarias y generalizadas, que comprende como caso particular al correlativo del teorema de Fekete de las series de Dirichlet; pero en la cuarta parte de esta memoria demostraremos directamente, sin apoyarnos en nuestro criterio, dicho correlativo, para ver, por comparación, la ventaja que desde el punto de vista de la síntesis, reporta tal criterio.

He aquí el teorema.

Teorema 11°). *Sea la función analítica f (z) definida por la integral determinante generalizada* (6) (*o por la integral determinante ordinaria* (3).

Supongamos que:

a) *la parte real de la función generatriz a (t), a partir de un valor de t (que llamaremos t_0) suficientemente grande pero fijo, no es negativa;*

b) *el argumento φ (t), de a (t) a partir de un valor fijo de t, satisface a la condición:*

$$|\varphi(t)| \leqq \tau < \frac{\pi}{2} , \qquad (\tau \equiv \text{fijo}).$$

En tales hipótesis se verifica que: el punto real de la recta de convergencia simple es singular para f (z)

Enunciado en otra forma, aparentemente más general, sería:

"El punto real de la recta de convergencia simple de una integral determinante, es singular para la función analítica definida por dicha integral, si el afijo de la función generatriz a (t), a partir de un valor de t, varía en un ángulo fijo de amplitud menor que π".

Ahora bien, si el afijo de a (t) varía en un ángulo cuya amplitud es igual a π, también se puede asegurar que la conclusión del teorema 11°.) sigue siendo válida, pero entonces hay que imponerle a la generatriz cierta condición de crecimiento ([17]).

Veamos que posición ocupa el teorema 11°.), en la "teoría general de las singularidades de las funciones analíticas". El teorema de Vivanti-Pringsheim ([18]) de las series potenciales, fué extendido a las series generales de Dirichlet por Landau ([19]) y generalizado, dentro de la teoría de las series potenciales por Dienes ([20]). La generalización de Dienes, fué extendida a las series de Dirichlet, por Fekete ([21]).

Los teoremas de Dienes y de Fekete los hemos generalizado, tanto para las series potenciales como para las series de Dirichlet, empleando un procedimiento general, sin basarnos en dichos teoremas, sino en los teoremas restringidos de Vivanti y de Landau, respectivamente ([22])

---

(17) Véase teorema 9°.) de nuestro trabajo antes citado

(18) Vivanti, Rivista di Matematica, tomo 3, pág. 112, 1893; Pringsheim, Mathematische Annalen, tomo 44, pág. 42, 1894. (Este teorema se suele atribuir también a Borel y a Tschebyschef).

(19) Landau, "Ueber einen Satz von Tschebyschef", Mathematische Annalen, tomo 61, 1905.

(20) Dienes, "Essai sur les singularités des fonctions analytiques", Journal de Mathématiques, pág 344, 1909, tomo 4, 3ra. serie.

(21) Fekete, "Sur les séries de Dirichlet" y "Sur un théoreme de M. Landau", Comptes Rendus hebd. de l' Acad. des Sc. de París, tomos 150 y 151 1910.

(22) Véanse nuestras memorias: "*Sobre los puntos singulares de las funciones analíticas*", Revista de la Unión Matemática Argentina, Volumen I, Número 1, pág. 5, 1936 - 1937; y "*Sur les singularités des fonctions analytiques définies par des séries potentielles*", Comptes Rendus hebdomadaires de l' Académie des Sciences de París, tomo 244, pág 30, 1937.

El teorema 11.°) es precisamente el "correlativo" del de Fekete, cuando se refiere a una integral determinante generalizada pero cuando se refiere a una integral determinante ordinaria sería el "correlativo" del de Dienes: si en los dos casos lo llamamos "correlativo" del de Fekete, es porque desde el punto de vista de las "propiedades funcionales" existe más analogía entre la "teoría de las series generales de Dirichlet" y la "teoría de las integrales determinantes ordinarias y generalizadas", que entre ésta última y la "teoría de las series potenciales".

Como dijimos, en la cuarta parte de esta memoria demostraremos directamente el teorema 11.° sin apoyarnos en nuestro criterio ni en los correlativos de los teoremas de Vivanti y de Landau, que enunciados explícitamente serían:

Teorema 12°). (*Correlativo del de Vivanti*). *Sea la función analítica f (z) definida por la integral determinante ordinaria.*

$$(3) \qquad \int_0^{\infty} a(t) \cdot {}^{-\,tz} \cdot dt \,.$$

Si a partir de un valor fijo de t, la generatriz a (t) es real y no-negativa, entonces: el punto real de la recta de convergencia simple de (3) *es singular para f (z).*

Teorema 13°.) (*Correlativo del de Landau*). *Sea la función analítica f (z) definida por la integral determinante generalizada:*

$$(6) \qquad \int_0^{\infty} a(t) \cdot e^{-\lambda(t) \cdot z} \, dt$$

Si a partir de un valor fijo de t, la generatriz a (t) es real y no-negativa, entonces: el punto real de la recta de convergencia simple de (6) *es singular para f (z)*

El teorema 12º) es un caso particular del teorema 13º), y ambos son casos particulares del teorema 11º). Por lo tanto al demostrar *directamente* este último, quedarán demostrados *directamente* aquéllos dos. Se podría demostrar el teorema 12º.), así como el teorema 13.º), siguiendo un raciocinio análogo al de Vivanti-Landau. Sin embargo, en esta introducción, nos limitaremos a responder (apoyándonos en nuestro criterio) a la siguiente pregunta (pregunta más expresiva que el contenido de los teoremas 12º.) y 13º). *¿Cuál es la razón funcional para que el punto real de la recta de convergencia simple de la integral* (3) (*o de la* 6) *sea singular para* $f(z)$? He aquí la respuesta: Si el punto real de la recta de convergencia simple de la (3) (o de la (6)) fuera regular para f (z), entonces (siempre, bien entendido, en el supuesto caso que a (t) es real y no-negativa) todos los puntos de la recta de convergencia simple serían también regulares para f (z). O dicho en otra forma (quizás, más sugestiva): Si existen puntos singulares (que puede ser uno solamente) sobre la recta de convergencia simple de una integral determinante, cuya generatriz es real y no-negativa, uno de ellos (que puede ser el único) es el punto real de dicha recta. En efecto: sin restringir, en absoluto, la generalidad (puesto que la propiedad de que un punto sea singular o regular para una determinada función analítica, es independiente de toda transformación lineal operada sobre la variable independiente) podemos suponer que la abcisa de convergencia simple de (3) es:

$$C = o.$$

Ahora bien, según el teorema 2º) de nuestra memoria antes citada (pág. 363) es condición necesaria y suficiente para que el punto de ordenada γ, situado sobre el eje imaginario del plano z, que se verifique.

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,.\ \sqrt[n]{|\,y_n\,|} < 1; \qquad (n \equiv \text{natural})$$

siendo:

$$y_n \equiv \left(\frac{2e}{3n}\right)^n \cdot \int_n^{2n} a\ (t)\ .\ e^{-i\gamma t}\ .\ t^n\ .\ e^{-\frac{2}{3}t}\ .\ dt$$

Poniendo:

$$H_n \equiv \left(\frac{2e}{3n}\right)^n \cdot \int_n^{2n} a\ (t)\ .\ t^n e^{-\frac{2}{3}t}\ .\ \cos\gamma t\ \ dt$$

y:

$$K_n \equiv \left(\frac{2e}{3n}\right)^n \cdot \int_n^{2n} a\ (t)\ \ t^n\ .\ {}^{-\frac{3}{2}t}\ .\ \mathrm{sen}\ \ \gamma t\ .\ dt$$

se tiene:

(a) $$|\ yn\ |^2 = H_n^2 + K_n^2\ .$$

Pongamos además:

$$Pn \equiv \left(\frac{2e}{3n}\right)^n \cdot \int_n^{2n} a\ (t)\ .\ t^n\ .\ e^{-\frac{2}{3}t}\ .\ dt$$

En virtud de la desigualdad de Schwartz ([23]) y tomando n *suficientemente grande para que* $a\ (t)$ sea positivo o nulo, se tiene:

---

(23) Véase, por ejemplo, Goursat, "*Cours d' Analyse Mathématique*", 5ª. edición, tomo 1, pág. 238.

(b) $$H_n^2 \leqq \left(\frac{2e}{3n}\right)^n \cdot Pn. \int_n^{2n} a(t)\ .\ t^n .\ e^{-\frac{2}{3}t} .\cos^2(\gamma t)\,.\,dt$$

(c) $$K_n^2 \leqq \left(\frac{2e}{3n}\right)^n \cdot Pn. \int_n^{2n} a(t)\ .\ t^n .\ {}^{-\frac{2}{3}t} .\operatorname{sen}^2(\gamma t)\,.\,dt$$

De (a), (b) y (c) se infiere que:

$$|\ yn\ |^2 \leqq P_n^2$$

o sea:

$$|\ yn\ | \leqq Pn\ .$$

Luego: si el punto $z = o$ es regular para $f(z)$, es decir, si:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{Pn} < 1$$

se verificaría para todo valor real de γ que:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|\ yn\ |} < 1\ :$$

es decir: *todos* los puntos propios de la recta de convergencia simple de la integral (3) serían regulares para f (z).

Mutatis mutandis se prueba una conclusión análoga para la integral *generalizada* (6).

Observación general: Con el fin de no dilatar demasiado el desarrollo de los cálculos, en las demostraciones de los teoremas anteriores, nos limitaremos a demostrar aquellos grupos de teoremas cuyas demostraciones son esencialmente diferentes entre sí: pués, los teoremas 1º.) y 2º.) se prueban por un procedimiento análogo así como los teoremas 3º.), 4º.), 5º) y 6º.) se prueban por un raciocinio común distinto del que corresponde para probar el 7º.).

(Continuará)